初等的な不等式 II

柳田 五夫

目次

1　はじめに

ここでは，主に3変数の不等式を扱っている．特に3変数 a, b, c の不等式で，一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるものについて，$p = b - a \geqq 0$, $q = c - a \geqq 0$ という置き換えを試みている．計算は繁雑になる嫌いはあるが，機械的に不等式が証明できる場合も多い．

他には，$\displaystyle\sum_{cyclic}$ を使った式変形による不等式の証明や，微分法を使った不等式の証明も入れた．

次の命題は基本的なので断りなく使うことにする．

[補題 1]　a, c は正の実数で，$D = b^2 - 4ac \leqq 0$ を満たすとき，任意の実数 x, y に対して，次の不等式が成り立つ．

$$ax^2 + bxy + cy^2 \geqq 0.$$

特別な場合として，次のことが言える．

[系 1]　$l > 0, m \geqq 0$ は実数で，$m \leqq 2l$ を満たすとき，任意の実数 p, q に対して，次の不等式が成り立つ．

$$lp^2 \pm mpq + lq^2 \geqq 0.$$

これは，$l > 0$, $(\pm m)^2 - 4l^2 = (m + 2l)(m - 2l) \leqq 0$ から成り立つ．

3次の cyclic 同次多項式 $P(a, b, c)$ に対する不等式 $P(a, b, c) \geqq 0$ の成立をチェックする"Cyclic inequality of Degree 3"(CD3 定理) を証明しておく．これは P. K . Hung[3] により証明されているが，初等的な証明を示す．

3次の cyclic 同次多項式 $P(a, b, c)$ は

$$P(a, b, c) = m \sum_{cyclic} a^3 + n \sum_{cyclic} a^2 b + p \sum_{cyclic} ab^2 + qabc$$

と表せる．

定理 1(CD3) 　$P(a,b,c)$ は 3 次の cyclic 同次多項式とする．任意の負でない実数 a,b,c に対して不等式 $P(a,b,c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は

$$P(1,1,1) \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \text{任意の負でない実数}\, a,b\, \text{に対して}\ P(a,b,0) \geqq 0$$

が成り立つことである．

[証明]　必要性は明らかであるから十分性を示す．

$$P(1,1,1) \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad \text{任意の負でない実数}\, a,b\, \text{に対して}\ P(a,b,0) \geqq 0$$

が成り立つとする．このとき

任意の負でない実数 a,b,c に対して

$$P(a,b,c) = m\sum_{cyclic} a^3 + n\sum_{cyclic} a^2b + p\sum_{cyclic} ab^2 + qabc \geqq 0$$

が成り立つことを示す．

$P(1,1,1) \geqq 0$ から

$$3m+3n+3p+q \geqq 0.$$

任意の負でない実数 a,b に対して $P(a,b,0) \geqq 0$ が成り立つから

$$P(1,0,0) = m \geqq 0,\ P(1,1,0) = 2m+n+p \geqq 0.$$

一般性を失うことなく $a = \min(a,b,c)$ と仮定できるから，$b-a=u \geqq 0,\ c-a=v \geqq 0$ とおき，$b=a+u,\ c=a+v$ を $P(a,b,c) \geqq 0$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&m\Big[a^3+(a+u)^3+(a+v)^3\Big] + n\Big[a^2(a+u)+(a+u)^2(a+v)+(a+v)^2a\Big] \\
&\quad + p\Big[a(a+u)^2+(a+u)(a+v)^2+(a+v)a^2\Big] + qa(a+u)(a+v) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &(3m+3n+3p+q)a^3 + (3mu+3nu+3pu+qu+3mv+3nv+3pv+qv)a^2 \\
&\quad + (3mu^2+nu^2+pu^2+2nuv+2puv+quv+3mv^2+nv^2+pv^2)a \\
&\quad + m(u^3+v^3)+nu^2v+puv^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を $Aa^3+Ba^2+Ca+D \geqq 0$ とおくと

$$\begin{aligned}
A &= 3m+3n+3p+q \geqq 0, \\
B &= 3mu+3nv+3pu+qu+3mu+3nv+3pv+qv \\
&= (3m+3n+3p+q)(u+v) \geqq 0.
\end{aligned}$$

$3m+n+p=m+(2m+n+p) \geqq 0,\ u^2+v^2 \geqq 2uv$ であるから

$$\begin{aligned}
C &= (3m+n+p)(u^2+v^2)+(2n+2p+q)uv \\
&\geqq (3m+n+p)\cdot 2uv+(2n+2p+q)uv=(6m+4n+4p+q)uv \\
&= (\underbrace{3m+3n+3p+q}_{\geqq 0}+\underbrace{3m+n+p}_{\geqq 0})uv \geqq 0,
\end{aligned}$$

$$D=m(u^3+v^3)+nu^2v+puv^2=P(u,v,0) \geqq 0.$$

したがって，不等式 $Aa^3+Ba^2+Ca+D \geqq 0$ は成り立つ． ■

定理 2(SD3)　$P(a,b,c)$ は 3 次の同次対称多項式とする．任意の負でない実数 a,b,c に対して不等式 $P(a,b,c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は

$$P(1,1,1),\ P(1,1,0),\ P(1,0,0) \geqq 0$$

が成り立つことである．

[証明]　必要性は明らかであるから十分性を示す．

$$P(1,1,1),\ P(1,1,0),\ P(1,0,0) \geqq 0$$

が成り立つとする．このとき，CD3 定理から

任意の負でない実数 a,b に対して

$$P(a,b,0) \geqq 0$$

が成り立つことを示せばよい．

$P(a,b,c)$ は 3 次の同次対称多項式であるから

$$P(a,b,c)=m\sum_{cyclic}a^3+n\sum_{cyclic}a^2b+p\sum_{cyclic}ab^2+qabc$$

とおくと，$n=p$ である．

また，$P(1,1,0),\ P(1,0,0) \geqq 0$ から $m+n \geqq 0,\ m \geqq 0$.

$a,b \geqq 0$ のとき

$$a^3+b^3-ab(a+b)=(a-b)^2(a+b) \geqq 0$$

が成り立つことを使うと，$a,b \geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
P(a,b,0) &= m(a^3+b^3)+n(a^2b+ab^2) \\
&\geqq mab(a+b)+n(a^2b+ab^2) \\
&= (m+n)ab(a+b) \geqq 0.
\end{aligned}$$

■

この定理は Hoo Joo Lee により証明された．次に，SD3 定理が使える不等式をいくつか紹介したい．

例題 1　(United Kingdom 1999) （初等的な不等式 I の問題 94)

$p,\ q,\ r$ は正の実数で，$p+q+r=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$7(pq+qr+rp) \leqq 2+9pqr\,.$$

同次化 (Homonization) すると

$$\begin{aligned} &7(pq+qr+rp) \leqq 2+9pqr \\ \iff &7(pq+qr+rp)(p+q+r) \leqq 2(p+q+r)^3+9pqr. \end{aligned}$$

$7(pq+qr+rp)(p+q+r) \leqq 2(p+q+r)^3+9pqr$ は 3 次の同次対称式の不等式なので，SD3 定理から $(p,q,r)=(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ のとき成り立つことをチェックすればよい．

例題 2　(Serbia 2008) （初等的な不等式 I の問題 95）

a,b,c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+3abc \geqq \frac{4}{9}\,.$$

同次化 (Homonization) すると

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+c^2+3abc \geqq \frac{4}{9} \\ \iff &9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc \geqq 4(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

$9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc \geqq 4(a+b+c)^3$ は 3 次の同次対称式の不等式なので，SD3 定理から $(a,b,c)=(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ のとき成り立つことをチェックすればよい．

例題 3　(USA 1979) （初等的な不等式 I の問題 96）

x,y,z は正の実数で，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^3+y^3+z^3+6xyz \geqq \frac{1}{4}\,.$$

同次化 (Homonization) すると

$$
\begin{aligned}
&x^3+y^3+z^3+6xyz \geqq \frac{1}{4} \\
\Longleftrightarrow\ &4(x^3+y^3+z^3)+24xyz \geqq (x+y+z)^3.
\end{aligned}
$$

$4(x^3+y^3+z^3)+24xyz \geqq (x+y+z)^3$ は 3 次の同次対称式の不等式なので，SD3 定理から $(x,y,z)=(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ のとき成り立つことをチェックすればよい．

例題 4 (IMO 1984)（初等的な不等式 I の問題 97）

x,y,z は負でない実数で，$x+y+z=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$0 \leqq xy+yz+zx-2xyz \leqq \frac{7}{27}\,.$$

同次化 (Homonization) して

$$
\begin{aligned}
&0 \leqq 27(xy+yz+zx)(x+y+z)-54xyz \leqq 7(x+y+z)^3 \\
\Longleftrightarrow\quad &0 \leqq 27\sum_{sym} x^2y+27xyz \leqq 7\sum_{cyclic} x^3+21\sum_{sym} x^2y+42xyz\,.
\end{aligned}
$$

$0 \leqq 27\sum_{sym} x^2y+27xyz \leqq 7\sum_{cyclic} x^3+21\sum_{sym} x^2y+42xyz$ は 3 次の同次対称式の不等式なので，SD3 定理から $(x,y,z)=(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ のとき成り立つことをチェックすればよい．

2　練習問題 A

問題 1　a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

解 1　証明すべき不等式は同次化すると

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \cdot abc$$

すなわち

$$(a+b+c)^5 \geqq 81abc(a^2+b^2+c^2) \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる．

一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるから，$p = b-a \geqq 0,\ q = c-a \geqq 0$ とおき，$b = a+p,\ c = a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&(3a+p+q)^5 \geqq 81a(a+p)(a+q)\left[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right] \\
\iff &27(p^2-pq+q^2)a^3 + 9(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)a^2 \\
&\quad + 3(5p^4-7p^3q+30p^2q^2-7pq^3+5q^4)a \\
&\quad\quad + p^5+5p^4q+10p^3q^2+10p^2q^3+5pq^4+q^5 \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

この不等式を，$27Aa^3+9Ba^2+3Ca+D \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ D \geqq 0$ であるから，$C \geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}
&5p^4-7p^3q+30p^2q^2-7pq^3+5q^4-5(p-q)^4 \\
&= 5p^4-7p^3q+30p^2q^2-7pq^3+5q^4-5(p^4-4p^3q+6p^2q^2-4pq^3+q^4) \\
&= 13p^3q+13pq^3 \\
&= 13pq(p^2+q^2)
\end{aligned}$$

より

$$C = 5(p-q)^4 + 13pq(p^2+q^2) \geqq 0. \qquad \blacksquare$$

解 2　不等式を同次化すると

$$(a+b+c)^5 \geqq 81(a^2+b^2+c^2)abc. \qquad \cdots\cdots(*)$$

$(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$ を用いると

$$(ab+bc+ca)^2 \geqq 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)=3abc(a+b+c).$$

ゆえに

$$(ab+bc+ca)^2 \geqq 3abc(a+b+c).$$

これを用いると

$$27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2 \geqq 81(a^2+b^2+c^2)abc(a+b+c)$$

が成り立つから

$$(a+b+c)^6 \geqq 27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2$$

を証明すればよい．

$$a+b+c=s,\ ab+bc+ca=t$$

とおくと

$$\begin{aligned}(a+b+c)^6-27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2 &= s^6-27(s^2-2t)t^2\\ &= s^6-27s^2t^2+54t^3\\ &= (s^2+6t)(s^2-3t)^2 \geqq 0.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

解 3　証明すべき不等式は同次化すると

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geqq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot abc$$

すなわち

$$(a+b+c)^5 \geqq 81abc(a^2+b^2+c^2) \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる．$(*)$ を $abc=1$ という条件を除いて証明する．

$(*)$ は同次式であるから，一般性を失うことなく $a+b+c=3$ と仮定して

$$abc(a^2+b^2+c^2) \leqq 3 \qquad \cdots\cdots(**)$$

を証明すればよい．$f(a,b,c)=abc(a^2+b^2+c^2)$,

$$F(a,b,c,\lambda)=abc(a^2+b^2+c^2)-\lambda(a+b+c-3)$$

とおく．$F_a = F_b = F_c = F_\lambda = 0$ より

$$bc(a^2+b^2+c^2)+2a^2bc-\lambda=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$ca(a^2+b^2+c^2)+2ab^2c-\lambda=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$ab(a^2+b^2+c^2)+2abc^2-\lambda=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$a+b+c=3 \qquad \cdots\cdots ④$$

① − ② から $(b-a)c\Big[(a-b)^2+c^2\Big]=0$　すなわち　$a=b.$
同様にして $b=c,\ c=a.$

　したがって $a=b=c=1$ より

$$f\,(1,1,1)=3.$$

したがって，これが最大値であることを示せばよい．

　まず，最大値の存在を保証するためにワイヤストラスの定理が使える状況にする．$a>0, b>0, c>0, a+b+c=3$ のかわりに $S: a \geqq 0, b \geqq 0, c \geqq 0, a+b+c=3$ を考えると，S は有界閉集合で f は S で連続であるから，最大値（と最小値）が存在する．

　S の境界では a,b,c のうちすくなくとも一つが 0 となるから $c=0$ と仮定する．$c=0, a+b=3$ で $f(a,3-a,0)=0<3$ となるので，境界で最大値をとることはない．極値の候補は一つしかないので $a>0, b>0, c>0, a+b+c=3$ における f の最大値は 3 となる．

　したがって $(**)$ は成り立つ．■

ワイヤストラス（Weierstrass）の定理

　D を $\mathbb{R}^n$ の空でない有界閉集合とする．このとき，D 上の連続関数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は D において最大値と最小値をもつ．

問題 2　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq a^2+b^2+c^2.$$

解　証明すべき不等式は同次化すると

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqq a^2+b^2+c^2$$

すなわち

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a+b+c)^4 \geqq 81a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2) \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\left[a^2(a+p)^2+(a+p)^2(a+q)+(a+q)^2a^2\right](3a+p+q)^4\\
&\geqq 81a^2(a+p)^2(a+q)^2\left[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right]\\
\iff\ & 108(p^2-pq+q^2)a^6+36(4p^3+3p^2q+3pq^2+4q^3)a^5\\
&\quad +6(13p^4+34p^3q+69p^2q^2+34pq^3+13q^4)a^4\\
&\quad\quad +2(14p^5+43p^4q+194p^3q^2+194p^2q^3+43pq^4+14q^5)a^3\\
&\quad\quad\quad +(2p^6+36p^5q+99p^4q^2+292p^3q^3+99p^2q^4+36pq^5+2q^6)a^2\\
&\quad\quad\quad\quad +2pq(p^5+11p^4q+28p^3q^2+28p^2q^3+11pq^4+q^5)a\\
&\quad\quad\quad\quad\quad +p^2q^2(p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4) \geqq 0\,.
\end{aligned}$$

この不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 3　a, b, c が異なる実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2} \geqq 2.$$

㊫　両辺に $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ をかけた

$$\begin{aligned}&a^2(c-a)^2(a-b)^2+b^2(a-b)^2(b-c)^2+c^2(b-c)^2(c-a)^2\\ \geqq\ &2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

$b=a+m,\ c=a+n$ とおき，$(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&a^2m^2n^2+(a+m)^2(m-n)^2m^2+(a+n)^2(m-n)^2n^2-2(m-n)^2m^2n^2\\ =\ &(m^4-2m^3n+3m^2n^2-2mn^3+n^4)a^2\\ &\quad +2(m^5-2m^4n+m^3n^2+m^2n^3-2mn^4+n^5)a\\ &\qquad +m^6-2m^5n-m^4n^2+4m^3n^3-m^2n^4-2mn^5+n^6\\ =\ &(m^2-mn+n^2)^2a^2-2(m+n)(m-n)^2(m^2-mn+n^2)a+(m+n)^2(m-n)^4\\ =\ &\left[(m^2-mn+n^2)a-(m+n)(m-n)^2\right]^2 \geqq 0.\end{aligned}$$

[注]　上の結果から

$$\boldsymbol{\begin{aligned}&a^2(c-a)^2(a-b)^2+b^2(a-b)^2(b-c)^2+c^2(b-c)^2(c-a)^2\\ &\quad -2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\\ &=(a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-b^2c-bc^2-c^2a-ca^2+3abc)^2\end{aligned}}$$

が成り立つことがわかる．

問題 4　a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$4(a+b+c)^3 \geqq 27(ab^2+bc^2+ca^2+abc).$$

解 1　一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a\geqq 0$, $q=c-a\geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}&4(3a+p+q)^3 \geqq 27\left[a(a+p)^2+(a+p)(a+q)^2+(a+q)a^2+a(a+p)(a+q)\right]\\ \iff\ & 9(p^2-pq+q^2)a+4p^3+12p^2q-15pq^2+4q^3\geqq 0\\ \iff\ & 9(p^2-pq+q^2)a+(p+4q)(2p-q)^2\geqq 0.\end{aligned}$$

明らかに $9(p^2-pq+q^2)a+(p+4q)(2p-q)^2\geqq 0$ は成り立つ．　■

解 2　この不等式は $a=b=c=1$ のとき成り立つから，CD3 定理より $c=0$ のとき成り立つことを示せばよい．この場合不等式は

$$4(a+b)^3 \geqq 27ab^2$$

となる．相加平均・相乗平均の不等式より

$$(a+b)^3=\left(a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)^3 \geqq \left(3\sqrt[3]{a\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}}\right)^3=\frac{27}{4}ab^2.$$

したがって，$4(a+b)^3\geqq 27ab^2$ は成り立つ．　■

[注]　別解については，初等的な不等式 I の問題 120 参照．

問題 5 (Vasile Cîrtoaje)

a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geqq (ab+bc+ca)^3.$$

解 一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0$, $q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&\left[a^2+a(a+p)+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\\
&\quad\times\left[(a+q)^2+(a+q)a+a^2\right]\\
&\geqq [a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a]^3\\
\iff\ &9(p^2-pq+q^2)a^4+(10p^3+3p^2q+3pq^2+10q^3)a^3\\
&\quad+3(p^4+3p^3q+p^2q^2+3pq^3+q^4)a^2+3(p^4q+p^3q^2+p^2q^3+pq^4)a\\
&\qquad+p^4q^2+p^2q^4\\
&\geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 6　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，$a+b+c=3$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \leqq 12.$$

解　不等式を同次化すると

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \leqq 12\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6$$

すなわち

$$243(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \leqq 4(a+b+c)^6. \qquad \cdots\cdots(*)$$

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&243\left[a^2-a(a+p)+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2-(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\\
&\quad\times\left[(a+q)^2-(a+q)a+a^2\right]\\
&\leqq 4(3a+p+q)^6\\
\Longleftrightarrow\ &2673a^6+5346(p+q)a^5+9(p^2-pq+q^2)a^4\\
&\quad+27(62p^3+213p^2q+213pq^2+62q^3)a^3\\
&\quad\quad+27(11p^4+71p^3q+84p^2q^2+71pq^3+11q^4)a^2\\
&\quad\quad\quad+9(8p^5+13p^4q+53p^3q^2+53p^2q^3+13pq^4+8q^5)a\\
&\quad\quad\quad\quad+4p^6+24p^5q-183p^4q^2+323p^3q^3-183p^2q^4+24pq^5+4q^6\\
&\geqq 0. \qquad \cdots\cdots(**)
\end{aligned}$$

定数項は

$$\begin{aligned}
&4p^6+24p^5q-183p^4q^2+323p^3q^3-183p^2q^4+24pq^5+4q^6\\
&=(p-2q)^2(2p-q)^2(p^2+11pq+q^2) \geqq 0
\end{aligned}$$

より不等式 $(**)$ は成り立つ．　■

問題 7　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{4a^2-b^2-c^2}{a(b+c)}+\frac{4b^2-c^2-a^2}{b(c+a)}+\frac{4c^2-a^2-b^2}{c(a+b)} \leqq 3.$$

解　両辺に $abc(a+b)(b+c)(c+a)$ をかけた

$$\begin{aligned}&3abc(a+b)(b+c)(c+a)\\ \geqq\ & bc(c+a)(a+b)(4a^2-b^2-c^2)+ca(a+b)(b+c)(4b^2-c^2-a^2)\\ &+ab(b+c)(c+a)(4c^2-a^2-b^2)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}&3a(a+p)(a+q)(2a+p)(2a+p+q)(2a+q)\\ \geqq\ &(a+p)(a+q)(2a+q)(2a+p)\left[4a^2-(a+p)^2-(a+q)^2\right]\\ &+(a+q)a(2a+p)(2a+p+q)\left[4(a+p)^2-(a+q)^2-a^2\right]\\ &+a(a+p)(2a+p+q)(2a+q)\left[4(a+q)^2-a^2-(a+p)^2\right]\\ \Longleftrightarrow\ &4(p^2-pq+q^2)a^4+(2p^3+5p^2q+5pq^2+2q^3)a^3+3pq(p^2+4pq+q^2)a^2\\ &+5p^2q^2(p+q)a+p^2q^2(p^2+q^2) \geqq 0.\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 8　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \geqq \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

解　両辺に $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)(ab+bc+ca)$ をかけた

$$\begin{aligned}&(ab+bc+ca)\left[(b^2+ca)(c^2+ab)+(c^2+ab)(a^2+bc)+(a^2+bc)(b^2+ca)\right]\\ \geqq\ &3(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}&\Big[a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a\Big]\\ &\quad\times\Big[\left\{(a+p)^2+(a+q)a\right\}\left\{(a+q)^2+a(a+p)\right\}\\ &\qquad+\left\{(a+q)^2+a(a+p)\right\}\left\{a^2+(a+p)(a+q)\right\}\\ &\qquad\quad+\left\{a^2+(a+p)(a+q)\right\}\left\{(a+p)^2+(a+q)a\right\}\Big]\\ &\geqq 3\Big[a^2+(a+p)(a+q)\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)a\Big]\Big[(a+q)^2+a(a+p)\Big]\\ \Longleftrightarrow\ &12a^6+24(p+q)a^5+(17p^2+43pq+17q^2)a^4\\ &\quad+(6p^3+25p^2q+25pq^2+6q^3)a^3+(p^4+7p^3q+9p^2q^2+7pq^3+q^4)a^2\\ &\qquad+(p^4q+p^3q^2+p^2q^3+pq^4)a+p^2q^2(p-q)^2 \geqq 0.\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 9　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}>\frac{2}{ab+bc+ca}.$$

解　両辺に $(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)(ab+bc+ca)$ をかけた

$$\begin{aligned}&(ab+bc+ca)\left[(b^2+2ca)(c^2+2ab)+(c^2+2ab)(a^2+2bc)+(a^2+2bc)(b^2+2ca)\right]\\&>2(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a\geqq 0,\ q=c-a\geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}&\Big[a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a\Big]\\&\quad\times\Big[\left\{(a+p)^2+2(a+q)a\right\}\left\{(a+q)^2+2a(a+p)\right\}\\&\qquad+\left\{(a+q)^2+2a(a+p)\right\}\left\{a^2+2(a+p)(a+q)\right\}\\&\qquad\quad+\left\{a^2+2(a+p)(a+q)\right\}\left\{(a+p)^2+2(a+q)a\right\}\Big]\\&>2\Big[a^2+2(a+p)(a+q)\Big]\Big[(a+p)^2+2(a+q)a\Big]\Big[(a+q)^2+2a(a+p)\Big]\\\iff&27a^6+54(p+q)a^5+9(4p^2+11pq+4q^2)a^4\\&\quad+4(2p^3+15p^2q+15pq^2+2q^3)a^3+3pq(4p^2+11pq+4q^2)a^2\\&\qquad+6p^2q^2(p+q)a+p^2q^2(2p^2-3pq+2q^2)\\&>0.\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 10　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab}\geqq 1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}.$$

解　両辺に $(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)(a^2+b^2+c^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}
&a(b+c)(a^2+b^2+c^2)(b^2+2ca)(c^2+2ab)\\
&\quad+b(c+a)(a^2+b^2+c^2)(c^2+2ab)(a^2+2bc)\\
&\quad+c(a+b)(a^2+b^2+c^2)(a^2+2bc)(b^2+2ca)\\
&\geqq (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)
\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a\geqq 0,\ q=c-a\geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&a(2a+p+q)\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[(a+p)^2+2(a+q)a\Big]\\
&\quad\times\Big[(a+q)^2+2a(a+p)\Big]\\
&+(a+p)(2a+q)\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[(a+q)^2+2a(a+p)\Big]\\
&\quad\times\Big[a^2+2(a+p)(a+q)\Big]\\
&+(a+q)(2a+p)\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[a^2+2(a+p)(a+q)\Big]\\
&\quad\times\Big[(a+p)^2+2(a+q)a\Big]\\
&\geqq\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2+a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a\Big]\\
&\quad\times\Big[a^2+2(a+p)(a+q)\Big]\Big[(a+p)^2+2(a+q)a\Big]\Big[(a+q)^2+2a(a+p)\Big]\\
\iff\ &9(p^2-pq+q^2)a^6+3(4p^3+3p^2q+3pq^2+4q^3)a^5\\
&+(7p^4+16p^3q+36p^2q^2+16pq^3+7q^4)a^4\\
&\quad+(2p^5+9p^4q+32p^3q^2+32p^2q^3+9pq^4+2q^5)a^3\\
&\qquad+3(p^5q+7p^4q^2+p^3q^3+7p^2q^4+pq^5)a^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (9p^5q^2 - p^4q^3 - p^3q^4 + 9p^2q^5)a \\
&\qquad + 2(p^6q^2 - p^5q^3 + p^4q^4 - p^3q^5 + p^2q^6) \\
&\geqq 0. \qquad\qquad \cdots\cdots(**)
\end{aligned}
$$

a の 1 次の係数は

$$9p^5q^2 - p^4q^3 - p^3q^4 + 9p^2q^5 = p^2q^2(p+q)(9p^2 - 10pq + 9q^2) \geqq 0.$$

定数項は

$$
\begin{aligned}
&2(p^6q^2 - p^5q^3 + p^4q^4 - p^3q^5 + p^2q^6) \\
&= 2p^2q^2(p^4 - p^3q + p^2q^2 - pq^3 + q^4) \\
&= 2p^2q^2\left[(p-q)^4 + pq(3p^2 - 5pq + 3q^2)\right] \geqq 0
\end{aligned}
$$

であるから，不等式 $(**)$ は成り立つ． ■

問題 11　(Peter Scholze and Darij Grinberg)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geqq 6.$$

解　両辺に $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$ をかけた

$$(b+c)^2(b^2+ca)(c^2+ab)+(c+a)^2(c^2+ab)(a^2+bc)+(a+b)^2(a^2+bc)(b^2+ca)$$
$$\geqq 6(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから $p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&(2a+p+q)^2\Big[(a+p)^2+(a+q)a\Big]\Big[(a+q)^2+a(a+p)\Big]\\
&+(2a+q)^2\Big[(a+q)^2+a(a+p)\Big]\Big[a^2+(a+p)(a+q)\Big]\\
&+(2a+p)^2\Big[a^2+(a+p)(a+q)\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)a\Big]\\
&\geqq 6\Big[a^2+(a+p)(a+q)\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)a\Big]\Big[(a+q)^2+a(a+p)\Big]\\
\iff &8(p^2-pq+q^2)a^4+8(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^3\\
&+2(5p^4+2p^3q-9p^2q^2+2pq^3+5q^4)a^2\\
&\quad+(2p^5+5p^4q-6p^3q^2-6p^2q^3+5pq^4+2q^5)a\\
&\qquad+p^5q+p^4q^2-4p^3q^3+p^2q^4+pq^5 \geqq 0. \qquad \cdots\cdots(**)
\end{aligned}$$

この不等式を，$8Aa^4+8Ba^3+2Ca^2+Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}
B&=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2) \geqq 0,\\
C&=5(p-q)^4+pq(22p^2-39pq+22q^2) \geqq 0,\\
D&=(p+q)(2p^4+3p^3q-9p^2q^2+3pq^2+2q^4)\\
&=(p+q)\Big[2(p-q)^4+pq(11p^2-21pq+11q^2)\Big] \geqq 0,\\
E&=pq(p-q)^2(p^2+3pq+q^2) \geqq 0
\end{aligned}$$

であるから，不等式 $8Aa^4+8Ba^3+2Ca^2+Da+E \geqq 0$ は成り立つ．■

問題 12　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{b+c}{2a^2+bc}+\frac{c+a}{2b^2+ca}+\frac{a+b}{2c^2+ab} \geqq \frac{6}{a+b+c}.$$

解　両辺に $(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)(a+b+c)$ をかけた

$$\begin{aligned}&(b+c)(a+b+c)(2b^2+ca)(2c^2+ab)+(c+a)(a+b+c)(2c^2+ab)(2a^2+bc)\\&\quad+(a+b)(a+b+c)(2a^2+bc)(2b^2+ca)\\&\geqq 6(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)\end{aligned}$$

を証明すればよい．$a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}&(2a+p+q)(3a+p+q)\Big[2(a+p)^2+(a+q)a\Big]\Big[2(a+q)^2+a(a+p)\Big]\\&+(2a+q)(3a+p+q)\Big[2(a+q)^2+a(a+p)\Big]\Big[2a^2+(a+p)(a+q)\Big]\\&+(2a+p)(3a+p+q)\Big[2a^2+(a+p)(a+q)\Big]\Big[2(a+p)^2+(a+q)a\Big]\\&\geqq 6\Big[2a^2+(a+p)(a+q)\Big]\Big[2(a+p)^2+(a+q)a\Big]\Big[2(a+q)^2+a(a+p)\Big]\\\iff& 36(p^2-pq+q^2)a^4+6(10p^3-3p^2q-3pq^2+10q^3)a^3\\&+2(14p^4+17p^3q-30p^2q^2+17pq^3+14q^4)a^2\\&\quad+2(2p^5+9p^4q-7p^3q^2-7p^2q^3+9pq^4+2q^5)a\\&\qquad+2(p^5q+3p^4q^2-8p^3q^3+3p^2q^4+pq^5) \geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$36Aa^4+6Ba^3+2Ca^2+2Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(10p^2-13pq+10q^2) \geqq 0,\\C&=14(p-q)^4+pq(73p^2-114pq+73q^2) \geqq 0,\\D&=(p+q)(2p^4+7p^3q-14p^2q^2+7pq^3+2q^4)\\&=(p+q)\Big[2(p-q)^4+pq(15p^2-26pq+15q^2)\Big] \geqq 0,\\E&=2pq(p-q)^2(p^2+5pq+q^2) \geqq 0\end{aligned}$$

であるから，不等式 $36Aa^4+6Ba^3+2Ca^2+2Da+E \geqq 0$ は成り立つ．　■

問題 13　a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}+\frac{1}{a^2-ab+b^2} \geqq \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

解　両辺に $(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)(ab+bc+ca)$ をかけた

$$\begin{aligned}
&(ab+bc+ca)\left[(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)\right.\\
&\quad\left.+(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)+(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\right]\\
&\geqq 3(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2) \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&[a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a]\\
&\quad\times\Big[\left\{(a+q)^2-(a+q)a+a^2\right\}\left\{a^2-a(a+p)+(a+p)^2\right\}\\
&\qquad+\left\{a^2-a(a+p)+(a+p)^2\right\}\left\{(a+p)^2-(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right\}\\
&\qquad\quad+\left\{(a+p)^2-(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right\}\left\{(a+q)^2-(a+q)a+a^2\right\}\Big]\\
&\geqq 3\left\{(a+p)^2-(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right\}\left\{(a+q)^2-(a+q)a+a^2\right\}\\
&\quad\times\left\{a^2-a(a+p)+(a+p)^2\right\}\\
\iff\ & 6a^6+12(p+q)a^5+2(7p^2+8pq+7q^2)a^4\\
&\quad+(10p^3+13p^2q+13pq^2+10q^3)a^3+(4p^4+7p^3q+6p^2q^2+7pq^3+4q^4)a^2\\
&\qquad+(2p^5-p^4q+3p^3q^2+3p^2q^3-pq^4+2q^5)a\\
&\qquad\quad+p^5q-4p^4q^2+6p^3q^3-4p^2q^4+pq^5
\end{aligned}$$

この不等式を，$Aa^6+12Ba^5+2Ca^4+Da^3+Ea^2+Fa+G \geqq 0$ とおくと，$A>0$, $B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ D \geqq 0,\ E \geqq 0$ であるから，$F \geqq 0,\ G \geqq 0$ を示す．

$$F=(p+q)(2p^2-pq+q^2)(p^2-pq+2q^2) \geqq 0, \quad G=pq(p-q)^4 \geqq 0. \qquad \blacksquare$$

問題 14　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，$ab+bc+ca=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3+7abc \geqq 10.$$

解 1　証明すべき不等式は同次化すると

$$a^3+b^3+c^3+7abc \geqq 10\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3$$

すなわち

$$27(a^3+b^3+c^3+7abc)^2 \geqq 100(ab+bc+ca)^3 \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&27\left[a^3+(a+p)^3+(a+q)^3+7a(a+p)(a+q)\right]^2\\
&\geqq 100\left[a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a\right]^3\\
\iff &720(p^2-pq+q^2)a^4+40(34p^3-15p^2q-15pq^2+34q^3)a^3\\
&+3(261p^4+158p^3q-497p^2q^2+158pq^3+261q^4)a^2\\
&+6(27p^5+63p^4q-73p^3q^2-73p^2q^3+63pq^4+27q^5)a\\
&+27p^6-46p^3q^3+27q^6 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$720Aa^4+40Ba^3+3Ca^2+6Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0, E \geqq 0,$

$$\begin{aligned}
B&=(p+q)(34p^2-49pq+34q^2) \geqq 0,\\
C&=261(p-q)^4+pq(1202p^2-2063pq+1202q^2) \geqq 0,\\
D&=(p+q)(27p^4+36p^3q-109p^2q^2+36pq^3+27q^4)\\
&=(p+q)\left[27(p-q)^4+pq(144p^2-271pq+144q^2)\right] \geqq 0.
\end{aligned}$$

よって，不等式 $720Aa^4+40Ba^3+3Ca^2+6Da+E \geqq 0$ は成り立つ．　■

解 2　$f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+7abc,$

$$F(a,b,c,\lambda)=a^3+b^3+c^3+7abc-\lambda(ab+bc+ca-3)$$

とおく．$F_a=F_b=F_c=F_\lambda=0$ より

$$3a^2+7bc-\lambda(b+c)=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$3b^2+7ca-\lambda(c+a)=0 \qquad \cdots\cdots②$$

$$3a^c+7bc-\lambda(a+b)=0 \qquad \cdots\cdots③$$

$$ab+bc+ca=3 \qquad \cdots\cdots④$$

$(c+a)\times$ ① $-(b+c)\times$ ② から $(3a^2+7bc)(c+a)-(3b^2+7ca)(b+c)=0.$
因数分解すると

$(a-b)\Big[3a^2+3b^2-7c^2+3(ab+bc+ca)\Big]=0$　すなわち　$(a-b)\Big[3a^2+3b^2-7c^2+9\Big]=0.$

よって，$a=b$ または $3a^2+3b^2-7c^2+9=0.$

同様にして，$b=c$ または $3b^2+3c^2-7a^2+9=0.$

$c=a$ または $3c^2+3a^2-7b^2+9=0.$

例えば，$3a^2+3b^2-7c^2+9=0$ かつ $3b^2+3c^2-7a^2+9=0$ のとき $a=c$ が成り立つから，対称性を考慮して次の 2 つの場合を考えればよい．

(i)　$a=b=c$　　(ii)　$3a^2+3b^2-7c^2+9$ かつ $3b^2+3c^2-7a^2+9=0$ かつ $a=c$

(i) の場合，$a=b=c=1$ より

$$f(1,1,1)=10.$$

(ii) の場合，$a^2+2ab=3,\ 3b^2-4a^2+9=0$ から b を消去する．

$$\begin{aligned}
&2ab=3-a^2\\
\Longleftrightarrow\ &4a^2b^2=(3-a^2)^2,\quad a^2\leqq 3\\
\Longleftrightarrow\ &4a^2\cdot\frac{4a^2-9}{3}=(3-a^2)^2,\quad \frac{9}{4}\leqq a^2\leqq 3\\
\Longleftrightarrow\ &13a^4-18a^2-27=0,\quad \frac{9}{4}\leqq a^2\leqq 3\\
\Longleftrightarrow\ &a^2=\frac{9+12\sqrt{3}}{13}.
\end{aligned}$$

よって

$$a=\sqrt{\frac{9+12\sqrt{3}}{13}},\ b=\sqrt{\frac{-27+16\sqrt{3}}{13}}.$$

このとき，$a^3+b^3+c^3+7abc > a^3+c^3+7abc > 10$ を示す．

$a^3+c^3+7abc, = 2a^3+7a\cdot ab = 2a^3+7a\cdot\dfrac{3-a^2}{2} = -\dfrac{3}{2}a^3+\dfrac{21}{2}a$ であるから

$\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき $-\dfrac{3}{2}a^3+\dfrac{21}{2}a > 10$ すなわち $3a^3-21a+20 < 0$ を示せばよい．

$g(a) = 3a^3-21a+20 \ \left(\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}\right)$ とおくと，$g'(a) = 3(3a^2-7)$.

a	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$g\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{8}$，$g(\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}+20 < 0$ より $g(a) < 0$.

$a > 0, b > 0, c > 0, ab+bc+ca = 3$ のかわりに R を $\sqrt[3]{10}$ より大きくとり $S: R \geqq a \geqq 0,\ R \geqq b \geqq 0,\ R \geqq c \geqq 0, ab+bc+ca = 3$ を考えると，S は有界閉集合で f は S で連続であるから，ワイヤストラスの定理より（最大値と）最小値が存在する．

S の境界の 1 つの $c = R, ab+bc+ca = 3$ で明らかに $f(a,b,c) > c^3 = R^3 > 10$ となるからここで最小値をとることなない．また，S の境界の 1 つの $c = 0, ab+bc+ca = 3$ で $f(a,b,c) = a^3+b^3 \geqq 2\sqrt{(ab)^3} = 2\sqrt{3^3} = 6\sqrt{3} > 10$ となるからここで最小値をとることなない．

したがって，$a > 0, b > 0, c > 0, ab+bc+ca = 3$ における f の最小値は 10 となるから

$$a^3+b^3+c^3+7abc \geqq 10. \qquad \blacksquare$$

問題 15 (Tigran Sloyan)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leqq \frac{1}{3}.$$

解 1 両辺に $3(2a+b)(2a+c)(2b+c)(2b+a)(2c+a)(2c+b)$ をかけた

$$\begin{aligned}&3a^2(2b+c)(2b+a)(2c+a)(2c+b) + 3b^2(2c+a)(2c+b)(2a+b)(2a+c)\\&+ 3c^2(2a+b)(2a+c)(2b+c)(2b+a)\\ \leqq\ &(2a+b)(2a+c)(2b+c)(2b+a)(2c+a)(2c+b) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるから，$p = b-a \geqq 0,\ q = c-a \geqq 0$ とおき，$b = a+p,\ c = a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&3a^2(3a+2p+q)(3a+2p)(3a+2q)(3a+p+2q)\\&\quad + 3(a+p)^2(3a+2q)(3a+p+2q)(3a+p)(3a+q)\\&\quad\quad + 3(a+q)^2(3a+p)(3a+q)(3a+2p+q)(3a+2p)\\&\leqq (3a+p)(3a+q)(3a+2p+q)(3a+2p)(3a+2q)(3a+p+2q)\\ \Longleftrightarrow\ &27(p^2-pq+q^2)a^4 + 36(p^3+q^3)a^3\\&\quad + 9(p^4+4p^3q-3p^2q^2+4pq^3+q^4)a^2\\&\quad\quad + 9pq(p^3+q^3)a\\&\quad\quad\quad + 2p^2q^2(p-q)^2 \geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$27Aa^4 + 36Ba^3 + 9Ca^2 + 9Da + E \geqq 0$ とおくと

$$A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ D \geqq 0,\ E \geqq 0,$$

$$C = (p^2-pq+q^2)(p^2+5pq+q^2) \geqq 0.$$

よって，不等式 $27Aa^4 + 36Ba^3 + 9Ca^2 + 9Da + E \geqq 0$ は成り立つ． ■

解 2　a,b,c の中に 0 と等しいものがある場合
$c=0$ としてよく，この場合証明すべき不等式は

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{a+2b}\leqq\frac{2}{3}$$

となる．

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{a+2b}\leqq\frac{2}{3}\\
\iff&3a(a+2b)+3b(2a+b)\leqq 2(2a+b)(a+2b)\\
\iff&a^2-2ab+b^2\geqq 0\iff(a-b)^2\geqq 0
\end{aligned}$$

より，最後の不等式は成り立つ．

$a>0,b>0,c>0$ の場合

証明すべき不等式は対称式であるから，一般性を失うことなく $a\geqq b\geqq c$ と仮定できる．

$$\begin{aligned}
1-3\sum_{cyclic}\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}&=\sum_{cyclic}\left(\frac{a}{a+b+c}-\frac{3a^2}{(2a+b)(2a+c)}\right)\\
&=\sum_{cyclic}\frac{a(a-b)(a-c)}{(a+b+c)(2a+b)(2a+c)}\\
&=\frac{abc}{a+b+c}\sum_{cyclic}\frac{a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}{(2a+b)(2a+c)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a^2(2b+a)(2b+c)-b^2(2a+b)(2a+c)\\
&=(a-b)(2a^2b+2ab^2+a^2c+b^2c+3abc)\\
&=(a-b)\Big[2ab(a+b+c)+c(a^2+ab+b^2)\Big]\geqq 0
\end{aligned}$$

から

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}\geqq\frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)}.$$

同様にして

$$\frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)}\geqq\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}.$$

$$x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c},$$

$$A=\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)},\ B=\frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)},\ C=\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}$$

とおくと

$$x \leqq y \leqq z,\ A \geqq B \geqq C$$

であるから，一般化された Schur の不等式より

$$\begin{aligned}&\sum_{cyclic}\frac{a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}{(2a+b)(2a+c)}\\&=A(x-y)(x-z)+B(y-x)(y-z)+C(z-x)(z-y)\geqq 0.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

解 3　証明すべき不等式は対称式であるから，一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．

$$\begin{aligned}1-3\sum_{cyclic}\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}&=\sum_{cyclic}\left(\frac{a}{a+b+c}-\frac{3a^2}{(2a+b)(2a+c)}\right)\\&=\sum_{cyclic}\frac{a(a-b)(a-c)}{(a+b+c)(2a+b)(2a+c)}\end{aligned}$$

と変形できるから

$$\sum_{cyclic}\frac{a(a-b)(a-c)}{(2a+b)(2a+c)}\geqq 0$$

を示せばよく，$\dfrac{c(c-a)(c-b)}{(2c+a)(2c+b)}\geqq 0$ であるから

$$\frac{a(a-b)(a-c)}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b(b-a)(b-c)}{(2b+a)(2b+c)}\geqq 0$$

を示せばよい．$ab \geqq c^2$, $a^2 \geqq c^2$ が成り立つので

$$\begin{aligned}&\frac{a(a-b)(a-c)}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b(b-a)(b-c)}{(2b+a)(2b+c)}\\&=\frac{(a-b)^2(2a^2b+2ab^2+a^2c+5abc+b^2c-ac^2-bc^2)}{(2a+b)(2a+c)(2b+a)(2b+c)}\\&=\frac{(a-b)^2\left[a(ab-c^2)+b(a^2-c^2)+2ab^2+a^2c+5abc+b^2c\right]}{(2a+b)(2a+c)(2b+a)(2b+c)}\\&\geqq 0.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

問題 16　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b)(b+c)(c+a)+7 \geqq 5(a+b+c).$$

解　証明すべき不等式は同次化すると

$$(a+b)(b+c)(c+a)+7abc \geqq 5(a+b+c)\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2$$

すなわち

$$[(a+b)(b+c)(c+a)+7abc]^3 \geqq 125(a+b+c)^3(abc)^2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

となる．

一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるから，$p = b - a \geqq 0,\ q = c - a \geqq 0$ とおき，$b = a + p,\ c = a + q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\Big[(2a+p)(2a+p+q)(2a+q)+7a(a+p)(a+q)\Big]^3 \\
&\geqq 125(3a+p+q)^3a^2(a+p)^2(a+q)^2 \\
\iff\ & 225(p^2-pq+q^2)a^7+25(13p^3+12p^2q+12pq^2+13q^3)a^6 \\
&\quad +5(31p^4+133p^3q+258p^2q^2+133pq^3+31q^4)a^5 \\
&\quad\quad +5(11p^5+50p^4q+311p^3q^2+311p^2q^3+50pq^4+11q^5)a^4 \\
&\quad\quad\quad +(8p^6+86p^5q+488p^4q^2+1549p^3q^3+488p^2q^4+86pq^5+8q^6)a^3 \\
&\quad\quad\quad\quad +(12p^6q+88p^5q^2+447p^4q^3+447p^3q^4+88p^2q^5+12pq^6)a^2 \\
&\quad\quad\quad\quad\quad +3(2p^6q^2+17p^5q^3+30p^4q^4+17p^3q^5+2p^2q^6)a \\
&\quad\quad\quad\quad\quad\quad +p^6q^3+3p^5q^4+3p^4q^5+p^3q^6 \\
&\geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．■

問題 17　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geqq 10(a + b + c).$$

㊫　証明すべき不等式は同次化すると

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geqq 10(a + b + c)\sqrt[3]{abc}$$

すなわち

$$\left[a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca)\right]^3 \geqq 1000(a + b + c)^3 abc \qquad \cdots\cdots (*)$$

となる．

一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるから，$p = b - a \geqq 0,\ q = c - a \geqq 0$ とおき，$b = a + p,\ c = a + q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\left[a^2 + (a+p)^2 + (a+q)^2 + 9\{a(a+p) + (a+p)(a+q) + (a+q)a\}\right]^3 \\
&\geqq 1000(3a + p + q)^3 a(a+p)(a+q) \\
\iff\ & 2700(p^2 - pq + q^2)a^4 + 200(8p^3 + 15p^2q + 15pq^2 + 8q^3)a^3 \\
&\qquad + 10(29p^4 + 182p^3q + 747p^2q^2 + 182pq^3 + 29q^4)a^2 \\
&\qquad\quad + 20(3p^5 + 7p^4q + 153p^3q^2 + 153p^2q^3 + 7pq^4 + 3q^5)a \\
&\qquad\qquad + p^6 + 27p^5q + 246p^4q^2 + 783p^3q^3 + 246p^2q^4 + 27pq^5 + q^6 \\
&\geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．■

問題 18　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{5(a^2+b^2)-ab}+\frac{1}{5(b^2+c^2)-bc}+\frac{1}{5(c^2+a^2)-ca} \geqq \frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

解　$5(a^2+b^2)-ab>0,\ 5(a^2+b^2)-ab>0,\ 5(a^2+b^2)-ab>0$ より証明すべき不等式は

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)\Big[5(b^2+c^2)-bc\Big]\Big[5(c^2+a^2)-ca\Big]\\
&\quad+(a^2+b^2+c^2)\Big[5(c^2+a^2)-ca\Big]\Big[5(a^2+b^2)-ab\Big]\\
&\quad\quad+(a^2+b^2+c^2)\Big[5(a^2+b^2)-ab\Big]\Big[5(b^2+c^2)-bc\Big]\\
&\geqq \Big[5(a^2+b^2)-ab\Big]\Big[5(b^2+c^2)-bc\Big]\Big[5(c^2+a^2)-ca\Big] \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

となる．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-(a+p)(a+q)\Big]\\
&\quad\times\Big[5\left\{(a+q)^2+a^2\right\}-(a+q)a\Big]\\
&+\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{(a+q)^2+a^2\right\}-(a+q)a\Big]\\
&\quad\times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2\right\}-a(a+p)\Big]\\
&+\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2\right\}-a(a+p)\Big]\\
&\quad\times\Big[5\left\{(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-(a+p)(a+q)\Big]\\
&\geqq\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2\right\}-a(a+p)\Big]\Big[5\left\{(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-(a+p)(a+q)\Big]\\
&\quad\times\Big[5\left\{(a+q)^2+a^2\right\}-(a+q)a\Big]\\
\Longleftrightarrow\ &135(p^2-pq+q^2)a^4+9(34p^3-21p^2q-21pq^2+34q^3)a^3\\
&+3(97p^4-41p^3q-51p^2q^2-41pq^3+97q^4)a^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (140p^5 - 59p^4q - 49p^3q^2 - 49p^2q^3 - 59pq^4 + 140q^5)a \\
&\qquad + 5(5p^6 - p^5q - 5p^4q^2 + 3p^3q^3 - 5p^2q^4 - pq^5 + 5q^6) \\
&\geqq 0.
\end{aligned}
$$

この不等式を，$135Aa^4 + 9Ba^3 + 3Ca^2 + Da + 5E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$
\begin{aligned}
B &= (p+q)(34p^2 - 55pq + 34q^2) \geqq 0, \\
C &= 97(p-q)^4 + pq(347p^2 - 633pq + 347q^2) \geqq 0, \\
D &= (p+q)(140p^4 - 199p^3q + 150p^2q^2 - 199pq^3 + 140q^4) \\
&= (p+q)\Big[140(p-q)^4 + pq(361p^2 - 690pq + 361q^2)\Big] \geqq 0, \\
E &= 5(p-q)^6 + pq(29p^4 - 80p^3q + 103p^2q^2 - 80pq^3 + 29q^4) \\
&= 5(p-q)^6 + pq\Big[29(p-q)^4 + pq(36p^2 - 71pq + 36q^2)\Big] \geqq 0.
\end{aligned}
$$

よって，不等式 $135Aa^4 + 9Ba^3 + 3Ca^2 + Da + 5E \geqq 0$ は成り立つ． ■

問題 19 (Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{5-2ab}+\frac{1}{5-2bc}+\frac{1}{5-2ca}\leqq 1.$$

解　$2ab\leqq a^2+b^2\leqq a^2+b^2+c^2=3$ より，$5-2ab>0$.
同様にして，$5-2bc>0,\ 5-2ca>0$ である．

証明すべき不等式は同次化すると

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{5(a^2+b^2+c^2)-6ab}+\frac{a^2+b^2+c^2}{5(a^2+b^2+c^2)-6bc}+\frac{a^2+b^2+c^2}{5(a^2+b^2+c^2)-6ca}\leqq 1$$

すなわち

$$\begin{aligned}
&\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ab\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6bc\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ca\Big]\\
&\geqq (a^2+b^2+c^2)\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ab\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6bc\Big]\\
&\quad+(a^2+b^2+c^2)\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6bc\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ca\Big]\\
&\quad+(a^2+b^2+c^2)\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ca\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ab\Big] \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

となる．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a\geqq 0,\ q=c-a\geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6a(a+p)\Big]\\
&\qquad\times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+p)(a+q)\Big]\\
&\qquad\qquad\times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+q)a\Big]\\
&\geqq\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6a(a+p)\Big]\\
&\qquad\times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+p)(a+q)\Big]\\
&\quad+\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+p)(a+q)\Big]\\
&\qquad\times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+q)a\Big]\\
&\quad+\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+q)a\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6a(a+p)\right]\\
\iff & 90(p^2-pq+q^2)a^4+8(23p^3-12p^2q-12pq^2+23q^3)a^3\\
&+12(17p^4-11p^3q+4p^2q^2-11pq^3+17q^4)a^2\\
&+24(5p^5-4p^4q+p^3q^2+p^2q^3-4pq^4+5q^5)a\\
&+10(5p^6-9p^5q+15p^4q^2-18p^3q^3+15p^2q^4-9pq^5+5q^6)\\
\geqq\ & 0.
\end{aligned}
$$

この不等式を，$90Aa^4+8Ba^3+12Ca^2+24Da+10E\geqq 0$ とおくと，$A\geqq 0$,

$$
\begin{aligned}
&B=(p+q)(23p^2-35pq+23q^2)\geqq 0,\\
&C=17(p-q)^4+pq(57p^2-98pq+57q^2)\geqq 0,\\
&D=(p+q)(p^2+q^2)(5p^2-9pq+5q^2)\geqq 0,\\
&E=(p^2+q^2)^2(5p^2-9pq+5q^2)\geqq 0.
\end{aligned}
$$

よって，不等式 $90Aa^4+8Ba^3+12Ca^2+24Da+10E\geqq 0$ は成り立つ． ■

問題 20　(yanagita)

a, b, c は負でない実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{5-2ab}+\frac{1}{5-2bc}+\frac{1}{5-2ca} \geqq \frac{3}{5}.$$

解　$2ab \leqq a^2+b^2 \leqq a^2+b^2+c^2=3$ 等より，$5-2ab>0,\ 5-2bc>0,\ 5-2ca>0.$

証明すべき不等式は同次化すると

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{5(a^2+b^2+c^2)-6ab}+\frac{a^2+b^2+c^2}{5(a^2+b^2+c^2)-6bc}+\frac{a^2+b^2+c^2}{5(a^2+b^2+c^2)-6ca} \geqq \frac{3}{5}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
&3\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ab\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6bc\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ca\Big]\\
&\leqq 5(a^2+b^2+c^2)\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ab\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6bc\Big]\\
&\quad +5(a^2+b^2+c^2)\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6bc\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ca\Big]\\
&\quad +5(a^2+b^2+c^2)\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ca\Big]\Big[5(a^2+b^2+c^2)-6ab\Big] \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

となる．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0$,

$q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&3\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6a(a+p)\Big]\\
&\qquad \times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+p)(a+q)\Big]\\
&\qquad\qquad \times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+q)a\Big]\\
&\geqq 5\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6a(a+p)\Big]\\
&\qquad \times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+p)(a+q)\Big]\\
&\quad +5\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+p)(a+q)\Big]\\
&\qquad \times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+q)a\Big]\\
&\quad +5\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6(a+q)a\Big]\\
&\qquad \times\Big[5\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-6a(a+p)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iff & 1458a^6 + 2916(p+q)a^5 + 18(206p^2 + 199pq + 206q^2)a^4 \\
& + 48(55p^3 + 72p^2q + 72pq^2 + 55q^3)a^3 \\
& \quad + 6(215p^4 + 230p^3q + 498p^2q^2 + 230pq^3 + 215q^4)a^2 \\
& \qquad + 60(5p^5 + 9p^4q + 14p^3q^2 + 14p^2q^3 + 9pq^4 + 5q^5)a \\
& \qquad\quad + 150pq(p^2+q^2)^2 \\
& \geqq 0.
\end{aligned}
$$

この不等式は明らかに成り立つ. ■

問題 21　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(2-ab)(2-bc)(2-ca) \geqq 1.$$

解　不等式を同次化すると

$$\begin{aligned}&\Big[2(a^2+b^2+c^2)-3ab\Big]\Big[2(a^2+b^2+c^2)-3bc\Big]\Big[2(a^2+b^2+c^2)-3ca\Big]\\ &\geqq (a^2+b^2+c^2)^3. \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&\Big[2\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-3a(a+p)\Big]\\ &\quad\times\Big[2\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-3(a+p)(a+q)\Big]\\ &\qquad\times\Big[2\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-3(a+q)a\Big]\\ &\geqq \left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^3\right\}^3\\ \Longleftrightarrow\ & 18(p^2-pq+q^2)a^4+4(8p^3-3p^2q-3pq^2+8q^3)a^3\\ &+3(11p^4-6p^3q+5p^2q-6pq^3+11q^4)a^2\\ &\quad+6(3p^5-2p^4q+p^3q^2+p^2q^3-2pq^4+3q^5)a\\ &\qquad+7p^6-12p^5q+21p^4q^2-24p^3q^3+21p^2q^4-12pq^5+7q^6 \geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$18Aa^4+4Ba^3+3Ca^2+6Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(8p^2-11pq+8q^2) \geqq 0,\\ C&=(p^2+pq+q^2)(11p^2-17pq+11q^2) \geqq 0,\\ D&=(p+q)(p^2+q^2)(3p^2-5pq+3q^2) \geqq 0,\\ E&=(p^2+q^2)^2(7p^2-12pq+7q^2) \geqq 0.\end{aligned}$$

よって，不等式 $18Aa^4+4Ba^3+3Ca^2+6Da+E \geqq 0$ は成り立つ．　■

問題 22　(Pham Kim Hung)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geqq 2.$$

解　両辺に $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$ をかけた

$$a(b+c)(b^2+ca)(c^2+ab)+b(c+a)(c^2+ab)(a^2+bc)+c(a+b)(a^2+bc)(b^2+ca)$$
$$\geqq 2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \qquad \cdots\cdots(*)$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&a(2a+p+q)\left[(a+p)^2+(a+q)a\right]\left[(a+q)^2+a(a+p)\right]\\
&\quad +(a+p)(2a+q)\left[(a+q)^2+a(a+p)\right]\left[a^2+(a+p)(a+q)\right]\\
&\qquad +(a+q)(2a+p)\left[a^2+(a+p)(a+q)\right]\left[(a+p)^2+(a+q)a\right]\\
&\geqq 2\left[a^2+(a+p)(a+q)\right]\left[(a+p)^2+(a+q)a\right]\left[(a+q)^2+a(a+p)\right]\\
\Longleftrightarrow\ &8a^6+16(p+q)a^5+10(p^2+3pq+q^2)a^4\\
&\quad +(2p^3+17p^2q+17pq^2+2q^3)a^3+pq(3p^2+8pq+3q^2)a^2\\
&\qquad +p^2q^2(p+q)a+p^2q^2(p-q)^2\\
&\geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 23　a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geqq 2.$$

解　両辺に $(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&a(b+c)(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)+b(c+a)(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)\\&\quad+c(a+b)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\\&\geqq 2(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\qquad\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a\geqq 0,\ q=c-a\geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&a(2a+p+q)\left[(a+q)^2+(a+q)a+a^2\right]\left[a^2+a(a+p)+(a+p)^2\right]\\&\quad+(a+p)(2a+q)\left[a^2+a(a+p)+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\\&\qquad+(a+q)(2a+p)\left[(a+p)^2+(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\left[(a+q)^2+(a+q)a+a^2\right]\\&\geqq 2\left[a^2+a(a+p)+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\\&\quad\times\left[(a+q)^2+(a+q)a+a^2\right]\\\iff&6(p^2-pq+q^2)a^4+6(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^3\\&\quad+2(4p^4+p^3q-6p^2q^2+pq^3+4q^4)a^2+(2p^5+3p^4q-4p^3q^2-4p^2q^3+3pq^4+2q^5)a\\&\quad+pq(p^4-p^3q-pq^3+q^4)\\&\geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$6Aa^4+6Ba^3+2Ca^2+Da+E\geqq 0$ とおくと，$A\geqq 0$.

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2)\geqq 0,\\C&=(p+q)^2(4p^2-7pq+4q^2)\geqq 0,\\D&=(p+q)(2p^4+p^3q-5p^2q^2+pq^3+2q^4)\\&=(p+q)\Big[2(p-q)^4+pq(9p^2-17pq+9q^2)\Big]\geqq 0,\\E&=pq(p-q)^2(p^2+pq+q^2)\geqq 0.\end{aligned}$$

したがって，不等式 $6Aa^4+6Ba^3+2Ca^2+Da+E\geqq 0$ は成り立つ．■

問題 24　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2} \geqq \frac{9}{(a+b+c)^2}.$$

解　両辺に $(a+b+c)^2(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^2(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)+(a+b+c)^2(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\\
&\quad+(a+b+c)^2(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)\\
&\geqq 9(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから $p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&(3a+p+q)^2\left[a^2+a(a+p)+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\\
&\quad+(3a+p+q)^2\left[(a+p)^2+(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\left[(a+q)^2+(a+q)a+a^2\right]\\
&\quad\quad+(3a+p+q)^2\left[(a+q)^2+(a+q)a+a^2\right]\left[a^2+a(a+p)+(a+p)^2\right]\\
&\geqq 9\left[a^2+a(a+p)+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\\
&\quad\times\left[(a+q)^2+(a+q)a+a^2\right]\\
\Longleftrightarrow\ & 27(p^2-pq+q^2)a^4+27(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^3\\
&\quad+3(13p^4+p^3q-15p^2q^2+pq^3+13q^4)a^2\\
&\quad\quad+3(4p^5+3p^4q-5p^3q^2-5p^2q^3+3pq^4+4q^5)a\\
&\quad\quad\quad+p^6+3p^5q-3p^4q^2-p^3q^3-3p^2q^4+3pq^5+q^6 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$27Aa^4+27Ba^3+3Ca^2+3Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}
B&=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2) \geqq 0,\\
C&=13(p-q)^4+pq(53p^2-93pq+53q^2) \geqq 0,\\
D&=(p+q)(4p^4-p^3q-4p^2q^2-pq^3+4q^4)\\
&=(p+q)\Big[4(p-q)^4+pq(15p^2-28pq+15q^2)\Big] \geqq 0,\\
E&=(p-q)^6+pq(9p^4-18p^3q+19p^2q^2-18pq^3+9q^4)\\
&=(p-q)^6+pq\Big[9(p-q)^4+pq(18p^2-35pq+18q^2)\Big] \geqq 0.
\end{aligned}$$

■

問題 25　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^3+3abc}{(b+c)^2}+\frac{b^3+3abc}{(c+a)^2}+\frac{c^3+3abc}{(a+b)^2} \geqq a+b+c.$$

解　両辺に $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ をかけた

$$\begin{aligned}&(a^3+3abc)(c+a)^2(a+b)^2+(b^3+3abc)(a+b)^2(b+c)^2+(c^3+3abc)(b+c)^2(c+a)^2\\ &\geqq (a+b+c)(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから $p=b-a \geqq 0$, $q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p$, $c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&\Big[a^3+3a(a+p)(a+q)\Big](2a+q)^2(2a+p)^2\\ &\quad+\Big[(a+p)^3+3a(a+p)(a+q)\Big](2a+p)^2(2a+p+q)^2\\ &\qquad+\Big[(a+q)^3+3a(a+p)(a+q)\Big](2a+p+q)^2(2a+q)^2\\ &\geqq (3a+p+q)(2a+p)^2(2a+p+q)^2(2a+q)^2\\ \Longleftrightarrow\ & 48(p^2-pq+q^2)a^5+60(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^4\\ &\quad+16(7p^4+p^3q-9p^2q^2+pq^3+7q^4)a^3\\ &\qquad+(50p^5+43p^4q-70p^3q^2-70p^2q^3+43pq^4+50q^5)a^2\\ &\qquad\quad+(11p^6+17p^5q-10p^4q^2-29p^3q^3-10p^2q^4+17pq^5+11q^6)a\\ &\qquad\qquad+p^7+2p^6q-3p^4q^3-3p^3q^4+2pq^6+q^7 \geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$48Aa^5+60Ba^4+16Ca^3+Da^2+Ea+F \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}&B=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2) \geqq 0,\ C=7(p-q)^4+pq(29p^2-51pq+29q^2) \geqq 0,\\ &D=(p+q)(50p^4-7p^3q-63p^2q^2-7pq^3+50q^4)\\ &\quad=(p+q)\Big[50(p-q)^4+pq(193p^2-363pq+193q^2)\Big] \geqq 0,\\ &E=11(p-q)^6+pq(83p^4-175p^3q+191p^2q^2-175pq^3+83q^4)\\ &\quad=11(p-q)^6+pq\Big[83(p-q)^4+pq(157p^2-307pq+157q^2)\Big]\\ &F=(p-q)^2(p+q)^3(p^2+pq+q^2) \geqq 0.\end{aligned}$$

■

問題 26　a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{ab-bc+ca}{b^2+c^2}+\frac{bc-ca+ab}{c^2+a^2}+\frac{ca-ab+bc}{a^2+b^2} \geqq \frac{3}{2}.$$

解 1　両辺に $2(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&2(ab-bc+ca)(c^2+a^2)(a^2+b^2)+2(bc-ca+ab)(a^2+b^2)(b^2+c^2)\\&\quad+2(ca-ab+bc)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geqq 3(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&2\left[a(a+p)-(a+p)(a+q)+(a+q)a\right]\left[(a+q)^2+a^2\right]\left[a^2+(a+p)^2\right]\\&\quad+2\left[(a+p)(a+q)-(a+q)a+a(a+p)\right]\left[a^2+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+q)^2\right]\\&\quad+2\left[(a+q)a-a(a+p)+(a+p)(a+q)\right]\left[(a+p)^2+(a+q)^2\right]\left[(a+q)^2+a^2\right]\\&\geqq 3\left[a^2+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+q)^2\right]\left[(a+q)^2+a^2\right]\\\iff &8(p^2-pq+q^2)a^4+8(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^3\\&\quad+12(p^4-p^2q^2+q^4)a^2+2(2p^5+p^4q-2p^3q-2p^2q^3+pq^4+2q^5)a\\&\qquad+2p^5q-3p^4q^2+2p^3q^3-3p^2q^4+2pq^5 \geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$8Aa^4+8Ba^3+12Ca^2+2Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0,\ C \geqq 0,$

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2) \geqq 0,\\D&=(p+q)(2p^4-p^3q-p^2q^2-pq^3+2q^4)\\&=(p+q)\Big[2(p-q)^4+pq(7p^2-13pq+7q^2)\Big] \geqq 0,\\E&=pq(p-q)^2(2p^2+pq+2q^2) \geqq 0.\end{aligned}$$

■

解 2　差をとると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{cyclic}\left(\frac{ab-bc+ca}{b^2+c^2}-\frac{1}{2}\right)\\
&=\sum_{cyclic}\frac{(b+c)(2a-b-c)}{2(b^2+c^2)}\\
&=\sum_{cyclic}\frac{(b+c)\left[(a-b)-(c-a)\right]}{2(b^2+c^2)}\\
&=\sum_{cyclic}\frac{(b+c)(a-b)}{2(b^2+c^2)}-\sum_{cyclic}\frac{(b+c)(c-a)}{2(b^2+c^2)}\\
&=\sum_{cyclic}\frac{(b+c)(a-b)}{2(b^2+c^2)}-\sum_{cyclic}\frac{(c+a)(a-b)}{2(c^2+a^2)}\\
&=\sum_{cyclic}\frac{(a-b)^2(ab+bc+ca-c^2)}{2(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\\
&=\frac{1}{2(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\sum_{cyclic}(a-b)^2(a^2+b^2)(ab+bc+ca-c^2).
\end{aligned}
$$

$$A=(b^2+c^2)(ab+bc+ca-a^2),\ B=(c^2+a^2)(ab+bc+ca-b^2),$$

$$C=(a^2+b^2)(ab+bc+ca-c^2)$$

とおき

$$A(b-c)^2+B(c-a)^2+C(a-b)^2\geqq 0$$

を示せばよい．

一般性を失うことなく $a\geqq b\geqq c$ と仮定できる．このとき，$B\geqq 0,\ C\geqq 0$ が成り立つ．

$A\geqq 0$ のときは明らかに $A(b-c)^2+B(c-a)^2+C(a-b)^2\geqq 0$ は成り立つから，$A<0$ としてよく

$$A(b-c)^2+B(c-a)^2\geqq 0$$

を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&A(b-c)^2+B(c-a)^2\geqq 0\\
\iff&(c^2+a^2)(ab+bc+ca-b^2)(a-c)^2\geqq(b^2+c^2)(a^2-ab-bc-ca)(b-c)^2.
\end{aligned}
$$

この不等式は

$$a^2 + c^2 \geqq b^2 + c^2, \quad a - c \geqq b - c \ (\geqq 0 \ ),$$

$$(ab + bc + ca - b^2)(a - c) \geqq (a^2 - ab - bc - ca)(b - c) \ (\geqq 0 \ ) \qquad \cdots\cdots(*)$$

の辺々をかければよい.

$(*)$ は

$$\begin{aligned}
&(ab + bc + ca - b^2)(a - c) - (a^2 - ab - bc - ca)(b - c) \\
&= 2a^2c + 2b^2c - 2ac^2 - 2bc^2 \\
&= 2c(a^2 + b^2 - ac - bc) \\
&= 2ac(a - c) + 2bc(b - c) \geqq 0
\end{aligned}$$

から成り立つ. ■

問題 27　a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{ab+4bc+ca}{b^2+c^2}+\frac{bc+4ca+ab}{c^2+a^2}+\frac{ca+4ab+bc}{a^2+b^2} \geqq 4.$$

㊎ 両辺に $(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&(ab+4bc+ca)(c^2+a^2)(a^2+b^2)+(bc+4ca+ab)(a^2+b^2)(b^2+c^2)\\&\quad+(ca+4ab+bc)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\\&\geqq 4(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&[a(a+p)+4(a+p)(a+q)+(a+q)a]\left[(a+q)^2+a^2\right]\left[a^2+(a+p)^2\right]\\&\quad+[(a+p)(a+q)+4(a+q)a+a(a+p)]\left[a^2+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+q)^2\right]\\&\quad+[(a+q)a+4a(a+p)+(a+p)(a+q)]\left[(a+p)^2+(a+q)^2\right]\left[(a+q)^2+a^2\right]\\&\geqq 4\left[a^2+(a+p)^2\right]\left[(a+p)^2+(a+q)^2\right]\left[(a+q)^2+a^2\right]\\\iff &40a^6+80(p+q)a^5+8(8p^2+17pq+8q^2)a^4+2(14p^3+43p^2q+43pq^2+14q^3)a^3\\&\quad+2(3p^4+15p^2q^2+17p^2q^2+15pq^3+3q^4)a^2\\&\quad\quad+(2p^5+p^4q+8p^3q+8p^2q^3+pq^4+2q^5)a\\&\quad\quad\quad+pq(p^4-4p^3q+6p^2q^2-4pq^3+q^4)\geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$40a^6+80Aa^5+8Ba^4+12Ca^3+2Da^2+Ea+F \geqq 0$ とおくと

$$A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ D \geqq 0,\ E \geqq 0,$$

$$F=pq(p-q)^4 \geqq 0.$$

したがって，不等式 $40a^6+80Aa^5+8Ba^4+12Ca^3+2Da^2+Ea+F \geqq 0$ は成り立つ． ■

問題 28　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{ab-2bc+ca}{b^2-bc+c^2}+\frac{bc-2ca+ab}{c^2-ca+a^2}+\frac{ca-2ab+bc}{a^2-ab+b^2}\geqq 0.$$

解 1　両辺に $(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&(ab-2bc+ca)(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)\\&\quad+(bc-2ca+ab)(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)\\&\quad\quad+(ca-2ab+bc)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\geqq 0\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(*)$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a\geqq 0, q=c-a\geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&[a(a+p)-2(a+p)(a+q)+(a+q)a]\left[(a+q)^2-(a+q)a+a^2\right]\\&\quad\times\left[a^2-a(a+p)+(a+p)^2\right]\\&\quad+[(a+p)(a+q)-2(a+q)a+a(a+m)]\left[a^2-a(a+p)+(a+p)^2\right]\\&\quad\times\left[(a+p)^2-(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\\&\quad+[(a+q)a-2a(a+p)+(a+p)(a+q)]\left[(a+p)^2-(a+p)(a+q)+(a+q)^2\right]\\&\quad\times\left[(a+q)^2-(a+q)a+a^2\right]\geqq 0\\\Longleftrightarrow\ &2(p^2-pq+q^2)a^4+2(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^3\\&\quad+2(2p^4-p^3q-pq^3+2q^4)a^2+(2p^5-p^4q-pq^4+2q^5)a\\&\quad+p^5q-p^4q^2-p^2q^4+pq^5\geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$2Aa^4+2Ba^3+2Ca^2+Da+E\geqq 0$ とおくと，$A\geqq 0$,

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2)\geqq 0,\\C&=2(p-q)^4+pq(7p^2-12pq+7q^2)\geqq 0,\\D&=(p+q)(2p^4-3p^3q+3p^2q^2-3pq^3+2q^4)\\&=(p+q)\Big[2(p-q)^4+pq(5p^2-9pq+5q^2)\Big]\geqq 0,\\E&=pq(p-q)^2(p^2+pq+q^2)\geqq 0.\end{aligned}$$

■

解 2　(*yanagita*)　$ab-2bc+ca=c(a-b)-b(c-a)$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{cyclic}\frac{ab-2bc+ca}{b^2-bc+c^2} &= \sum_{cyclic}\frac{c(a-b)}{b^2-bc+c^2}-\sum_{cyclic}\frac{b(c-a)}{b^2-bc+c^2}\\
&= \sum_{cyclic}\frac{c(a-b)}{b^2-bc+c^2}-\sum_{cyclic}\frac{c(a-b)}{c^2-ca+a^2}\\
&= \sum_{cyclic}\frac{c(a-b)^2(a+b-c)}{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}\\
&= \sum_{cyclic}\frac{(a-b)^2c(a+b-c)(a^2-ab+b^2)}{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}.
\end{aligned}$$

$A=a(b+c-a)(b^2-bc+c^2),\ B=b(c+a-b)(c^2-ca+a^2),\ C=c(a+b-c)(a^2-ab+b^2)$

とおき

$$A(b-c)^2+B(c-a)^2+C(a-b)^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示せばよい．

一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．このとき，$B \geqq 0,\ C \geqq 0$ が成り立つ．

$A \geqq 0$ のときは，明らかに $(*)$ は成り立つから，$A \leqq 0$ とする．

$(*)$ を示すために，$a^2B+b^2A \geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}
&a^2B+b^2A \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ & ab\left[a(c+a-b)(c^2-ca+a^2)-b(a-b-c)(b^2-bc+c^2)\right] \geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は

$$a \geqq b, \quad c+a-b \geqq a-b-c,$$

$$c^2-ca+a^2 \geqq b^2-bc+c^2$$

の辺々をかければよい．

$c^2-ca+a^2 \geqq b^2-bc+c^2$ は，差をとると

$$c^2-ca+a^2-(b^2-bc+c^2)=(a-b)(a+b-c) \geqq 0$$

から成り立つ．■

解 2 で用いた解法をまとめておこう．

a, b, c, A, B, C を実数とし，$S = A(b-c)^2 + B(c-a)^2 + C(a-b)^2$ とおく．

(1) $A \geqq 0, B \geqq 0, C \geqq 0$ のとき $S \geqq 0$.

(2) $a \geqq b \geqq c,\ B \geqq 0,\ B + A \geqq 0,\ B + C \geqq 0$ のとき $S \geqq 0$.

(3) $a \geqq b \geqq c,\ A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ B + C \geqq 0$ のとき $S \geqq 0$.

(4) $a \geqq b \geqq c \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ a^2B + b^2A \geqq 0$ のとき $S \geqq 0$.

(5) $A + B > 0$ または $B + C > 0$ または $C + A > 0,\ AB + BC + CA \geqq 0$ のとき $S \geqq 0$.

[証明]　(1) は明らかに成り立つ．

(2)　$a \geqq b \geqq c,\ B \geqq 0,\ B + A \geqq 0,\ B + C \geqq 0$ とする．

$$\begin{aligned} S &= A(b-c)^2 + B(c-a)^2 + C(a-b)^2 \\ &= (A+B)(b-c)^2 + (B+C)(a-b)^2 + B(c-a)^2 - B(b-c)^2 - B(a-b)^2 \\ &= (A+B)(b-c)^2 + (B+C)(a-b)^2 + 2B(ab + bc - ca - b^2) \\ &= (A+B)(b-c)^2 + (B+C)(a-b)^2 + 2B(a-b)(b-c) \geqq 0. \end{aligned}$$

(3)　$a \geqq b \geqq c,\ A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ B + C \geqq 0$ とする．このとき

$$a \geqq b \geqq c,\ B \geqq 0,\ B + A \geqq 0,\ B + C \geqq 0$$

を満たすから，(2) より $S \geqq 0$.

(4)　$a \geqq b \geqq c \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ a^2B + b^2A \geqq 0$ とする．

$$S = A(b-c)^2 + B(c-a)^2 + C(a-b)^2 \geqq A(b-c)^2 + B(c-a)^2$$

より

$$A(b-c)^2 + B(c-a)^2 \geqq 0$$

を示せばよい．

(i)　$b = c$ のとき，$A(b-c)^2 + B(c-a)^2 = B(c-a)^2 \geqq 0$.

(ii)　$b \fallingdotseq c$ のとき

$\dfrac{a-c}{b-c} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{c(a-b)}{b(b-c)} \geqq 0$ より

$$\frac{a-c}{b-c} \geqq \frac{a}{b} \ (>0).$$

このことから

$$\begin{aligned} A(b-c)^2 + B(c-a)^2 &= (b-c)^2 \left[A + B\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^2 \right] \\ &\geqq (b-c)^2 \left[A + B\left(\frac{a}{b}\right)^2 \right] \\ &= \frac{(b-c)^2}{b^2}(a^2B + b^2A) \geqq 0. \end{aligned}$$

(5)　$B+C>0,\ AB+BC+CA \geqq 0$ とする．

$$\begin{aligned} S &= A(b-c)^2 + B(a-c)^2 + C(a-b)^2 \\ &= A(b-c)^2 + B[(a-b)+(b-c)]^2 + C(a-b)^2 \\ &= (B+C)(a-b)^2 + 2B(a-b)(b-c) + (A+B)(b-c)^2 \\ &= (B+C)\left[(a-b) + \frac{B}{B+C}(b-c)\right]^2 + \frac{AB+BC+CA}{B+C}(b-c)^2 \geqq 0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

問題 29　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqq \frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}.$$

解 1　両辺に $(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$ をかけた

$$\begin{aligned}&\Big[(c+a)(a+b)+(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)\Big](a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\\ &\geqq (a+b)(b+c)(c+a)\\ &\qquad\times\Big[a(b^2+ca)(c^2+ab)+b(c^2+ab)(a^2+bc)+c(a^2+bc)(b^2+ca)\Big] \quad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから
$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&\Big[(2a+q)(2a+p)+(2a+p)(2a+p+q)+(2a+p+q)(2a+q)\Big]\\ &\quad\times\Big[a^2+(a+p)(a+q)\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)a\Big]\Big[(a+q)^2+a(a+p)\Big]\\ &\geqq (2a+p)(2a+p+q)(2a+q)\\ &\quad\times\Big[a\left\{(a+p)^2+(a+q)a\right\}\left\{(a+q)^2+a(a+p)\right\}\\ &\qquad+(a+p)\left\{(a+q)^2+a(a+p)\right\}\left\{a^2+(a+p)(a+q)\right\}\\ &\qquad\quad+(a+q)\left\{a^2+(a+p)(a+q)\right\}\left\{(a+p)^2+(a+q)a\right\}\Big]\\ \Longleftrightarrow\ &16(p^2-pq+q^2)a^6+32(p^3+q^3)a^5\\ &\quad+8(3p^4+4p^3q-p^2q^2+4pq^3+3q^4)a^4\\ &\qquad+(8p^5+28p^4q+8p^3q^2+8p^2q^3+28pq^4+8q^5)a^3\\ &\qquad\quad+(p^6+9p^5q+7p^4q^2+7p^3q^3+7p^2q^4+9pq^5+q^6)a^2\\ &\qquad\qquad+(p^6q+p^5q^2+3p^4q^3+3p^3q^4+p^2q^5+pq^6)a+p^4q^4\\ &\geqq 0. \qquad\qquad \cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

a^4 の係数は

$$8(3p^4+4p^3q-p^2q^2+4pq^3+3q^4)=8(p^2-pq+q^2)(3p^2+7pq+3q^2)\geqq 0$$

であるから，$(**)$ は成り立つ．■

解 2　a,b,c の中に 0 がある場合

$c=0$ と仮定してよく，このとき，証明すべき不等式は

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b} \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

となり，明らかに成り立つ．

$a,b,c>0$ の場合

一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定できる．

$$\begin{aligned}
\sum_{cyclic}\frac{1}{b+c}-\sum_{cyclic}\frac{a}{a^2+bc} &= \sum_{cyclic}\left(\frac{1}{b+c}-\frac{a}{a^2+bc}\right) \\
&= \sum_{cyclic}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(a^2+bc)} \\
&= \sum_{cyclic}\frac{a^2bc(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})}{(b+c)(a^2+bc)} \\
&= abc\sum_{cyclic}\frac{a}{(b+c)(a^2+bc)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right).
\end{aligned}$$

$$x=\frac{a}{(b+c)(a^2+bc)},\ y=\frac{b}{(c+a)(b^2+ca)},\ z=\frac{c}{(a+b)(c^2+ab)}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
x-y &= \frac{(a-b)c\Big[a^2+b^2+(a+b)c\Big]}{(b+c)(c+a)(a^2+bc)(b^2+ca)} \geqq 0, \\
y-z &= \frac{(b-c)a\Big[b^2+c^2+(b+c)a\Big]}{(c+a)(a+b)(b^2+ca)(c^2+ab)} \geqq 0
\end{aligned}$$

より $x \geqq y \geqq z$.

また，$A=\dfrac{1}{a},\ B=\dfrac{1}{b},\ C=\dfrac{1}{c}$ とおくと，$A \leqq B \leqq C$. したがって，一般化された Schur の不等式より

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyclic}\frac{a}{(b+c)(a^2+bc)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) \\
&= x(A-B)(A-C)+y(B-A)(B-C)+z(C-A)(C-B) \geqq 0.
\end{aligned}$$

■

解 3　一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できる．

$$\sum_{cyclic} \frac{1}{b+c} - \sum_{cyclic} \frac{a}{a^2+bc} = \sum_{cyclic} \left(\frac{1}{b+c} - \frac{a}{a^2+bc} \right)$$
$$= \sum_{cyclic} \frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(a^2+bc)}.$$

$(a-b)(a-c) \geqq 0$ であるから

$$\frac{(b-c)(b-a)}{(c+a)(b^2+ca)} + \frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)(c^2+ab)} \geqq 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を示せばよい．

$$(*) \iff (b-c)\Big[(b^2-a^2)(c^2+ab) + (a^2-c^2)(b^2+ca)\Big] \geqq 0$$
$$\iff a(b-c)^2(b^2 + \underbrace{c^2-a^2}_{\geqq 0} + ab + bc + ca) \geqq 0$$

より最後の不等式は成り立つ．　■

問題 30　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqq \frac{2a}{3a^2+bc}+\frac{2b}{3b^2+ca}+\frac{2c}{3c^2+ab}.$$

解 1　両辺に $(a+b)(b+c)(c+a)(3a^2+bc)(3b^2+ca)(3c^2+ab)$ をかけた

$$\begin{aligned}&\Big[(c+a)(a+b)+(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)\Big](3a^2+bc)(3b^2+ca)(3c^2+ab)\\ &\geqq 2(a+b)(b+c)(c+a)\\ &\qquad\times\Big[a(3b^2+ca)(3c^2+ab)+b(3c^2+ab)(3a^2+bc)+c(3a^2+bc)(3b^2+ca)\Big]\end{aligned} \quad \cdots\cdots(*)$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから $p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&\Big[(2a+q)(2a+p)+(2a+p)(2a+p+q)+(2a+p+q)(2a+q)\Big]\\ &\quad\times\Big[3a^2+(a+p)(a+q)\Big]\Big[3(a+p)^2+(a+q)a\Big]\Big[3(a+q)^2+a(a+p)\Big]\\ &\geqq 2(2a+p)(2a+p+q)(2a+q)\\ &\quad\times\Big[a\left\{3(a+p)^2+(a+q)a\right\}\left\{3(a+q)^2+a(a+p)\right\}\\ &\qquad+(a+p)\left\{3(a+q)^2+a(a+p)\right\}\left\{3a^2+(a+p)(a+q)\right\}\\ &\qquad\quad+(a+q)\left\{3a^2+(a+p)(a+q)\right\}\left\{3(a+p)^2+(a+q)a\right\}\Big]\\ \Longleftrightarrow\ &96(p^2-pq+q^2)a^6+4(34p^3+21p^2q+21pq^2+34q^3)a^5\\ &\quad+4(21p^4+43p^3q+83p^2q^2+43pq^3+21q^4)a^4\\ &\qquad+(26p^5+103p^4q+306p^3q^2+306p^2q^3+103pq^4+26q^5)a^3\\ &\qquad\quad+(3p^6+30p^5q+101p^4q^2+241p^3q^3+101p^2q^4+30pq^5+3q^6)a^2\\ &\qquad\qquad+(3p^6q+10p^5q^2+67p^4q^3+67p^3q^4+10p^2q^5+3pq^6)a\\ &\qquad\qquad\quad+3p^5q^3+15p^4q^4+3p^3q^5\\ &\geqq 0.\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．■

㊫ 2

$$\sum_{cyclic}\frac{1}{b+c}-\sum_{cyclic}\frac{2a}{3a^2+bc}=\sum_{cyclic}\left(\frac{1}{b+c}-\frac{2a}{3a^2+bc}\right)$$
$$=\sum_{cyclic}\frac{(a-b)(a-c)+a(2a-b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}$$
$$=\sum_{cyclic}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}+\sum_{cyclic}\frac{a(2a-b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}$$

より次の 2 つの不等式を証明すればよい．

$$\sum_{cyclic}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

$$\sum_{cyclic}\frac{a(2a-b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar\bigstar)$$

($\bigstar$ の証明) $a=\min(a,b,c)$ と仮定する．このとき，$(a-b)(a-c)\geqq 0$ であるから

$$\frac{(b-c)(b-a)}{(c+a)(3b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)(3c^2+ab)}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を証明すればよい．

$$(*)\iff(b-c)\Big[(b^2-a^2)(3c^2+ab)+(a^2-c^2)(3b^2+ca)\Big]\geqq 0$$
$$\iff a(b-c)^2(b^2+c^2-a^2+3ab+bc+3ca)\geqq 0.$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．

($\bigstar\bigstar$ の証明)

$$\sum_{cyclic}\frac{a(2a-b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}=\sum_{cyclic}\frac{a(a-b)}{(b+c)(3a^2+bc)}-\sum_{cyclic}\frac{a(c-a)}{(b+c)(3a^2+bc)}$$
$$=\sum_{cyclic}\frac{a(a-b)}{(b+c)(3a^2+bc)}-\sum_{cyclic}\frac{b(a-b)}{(c+a)(3b^2+ca)}$$
$$=\sum_{cyclic}(a-b)\left[\frac{a}{(b+c)(3a^2+bc)}-\frac{b}{(c+a)(3b^2+ca)}\right]$$
$$=\sum_{cyclic}\frac{c(a-b)^2\Big[(a-b)^2+c(a+b)\Big]}{(b+c)(c+a)(3a^2+bc)(3b^2+ca)}\geqq 0.$$

■

問題 31　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{13}{6}-\frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

解 1　両辺に $6(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&6\Big[a(c+a)(a+b)+b(a+b)(b+c)+c(b+c)(c+a)\Big](a^2+b^2+c^2)\\ &\geqq (a+b)(b+c)(c+a)\Big[13(a^2+b^2+c^2)-4(ab+bc+ca)\Big] \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&6\Big[a(2a+q)(2a+p)+(a+p)(2a+p)(2a+p+q)+(a+q)(2a+p+q)(2a+q)\Big]\\ &\quad\times\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2)\Big]\\ &\geqq (2a+p)(2a+p+q)(2a+q)\\ &\quad\times\Big[13\left\{a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right\}-4\left\{a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a\right\}\Big]\\ \iff &4(p^2-pq+q^2)a^3+(10p^3-9p^2q-9pq^2+10q^3)a^2\\ &\quad+2(8p^4-11p^3q+10p^2q^2-11pq^3+8q^4)a\\ &\qquad+6p^5-7p^4q+3p^3q^2+3p^2q^3-7pq^4+6q^5\\ &\geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$4Aa^3+Ba^2+2Ca+D \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(10p^2-19pq+10q^2) \geqq 0,\\ C&=8(p-q)^4+pq(21p^2-38pq+21q^2) \geqq 0,\\ D&=(p+q)(6p^4-13p^3q+16p^2q^2-13pq^3+6q^4)\\ &=(p+q)\Big[6(p-q)^4+pq(11p^2-20pq+11q^2)\Big] \geqq 0\end{aligned}$$

したがって，不等式 $4Aa^3+Ba^2+2Ca+D \geqq 0$ は成り立つ．　■

解 2　不等式の両辺から $\dfrac{3}{2}$ を引く．

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{13}{6}-\frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)} \\
\iff &\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2} \geqq \frac{2}{3}\left(1-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right) \\
\iff &\sum_{cyclic}\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)} \geqq \frac{1}{3}\sum_{cyclic}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} \\
\iff &\sum_{cyclic}(a-b)^2\cdot\frac{3(a^2+b^2+c^2)-2(b+c)(c+a)}{6(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)} \geqq 0 \\
\iff &\sum_{cyclic}(a-b)^2\cdot\frac{(c-a-b)^2+2(a-b)^2}{6(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)} \geqq 0.
\end{aligned}
$$

したがって，不等式

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{13}{6}-\frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

は成り立つ．　■

問題 32　(Pham Huu Duc)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqq \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

解 1　両辺に $2(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&2\Big[a^2(c+a)(a+b)+b^2(a+b)(b+c)+c^2(b+c)(c+a)\Big](a^2+b^2+c^2)\\ &\geqq 3(a+b)(b+c)(c+a)(a^3+b^3+c^3) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&2\Big[a^2(2a+q)(2a+p)+(a+p)^2(2a+p)(2a+p+q)+(a+q)^2(2a+q)(2a+p+q)\Big]\\ &\quad\times\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2)\Big]\\ &\geqq 3(2a+p)(2a+q)(2a+p+q)\\ &\quad\times\Big[a^3+(a+p)^3+(a+q)^3\Big]\\ \iff &4(p^2-pq+q^2)a^4+(6p^3-p^2q-pq^2+6q^3)a^3\\ &\quad+(14p^4-19p^3q+30p^2q^2-19pq^3+14q^4)a^2\\ &\quad\quad+(10p^5-11p^4q+9p^3q^2+9p^2q^3-11pq^4+10q^5)a\\ &\quad\quad\quad+2p^6-p^5q-p^4q^2+4p^3q^3-p^2q^4-pq^5+2q^6 \geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$4Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(6p^2-7pq+6q^2)\geqq 0,\\ C&=14(p-q)^4+pq(37p^2-54pq+37q^2)\geqq 0,\\ D&=(p+q)(10p^4-21p^3q+30p^2q^2-21pq^3+10q^4)\\ &=(p+q)\Big[10(p-q)^4+pq(19p^2-30pq+19q^2)\Big]\geqq 0,\\ E&=(p+q)^2(p^2-pq+q^2)(2p^2-3pq+2q^2)\geqq 0\end{aligned}$$

したがって，不等式 $4Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E \geqq 0$ は成り立つ．　■

解 2　証明すべき不等式を同値変形する．

$$2\sum_{cyclic}\frac{a^2}{b+c}-\sum_{cyclic}a \geqq \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}-(a+b+c).$$

左辺は

$$\begin{aligned}2\sum_{cyclic}\frac{a^2}{b+c}-\sum_{cyclic}a &= \sum_{cyclic}\frac{2a^2-a(b+c)}{b+c}=\sum_{cyclic}\frac{a(a-b+a-c)}{b+c}\\ &= \sum_{cyclic}\frac{a(a-b)}{b+c}-\sum_{cyclic}\frac{a(c-a)}{b+c}\\ &= \sum_{cyclic}\frac{a(a-b)}{b+c}-\sum_{cyclic}\frac{b(a-b)}{c+a}\\ &= \sum_{cyclic}\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}.\end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}-(a+b+c)\\ &=\frac{2(a^3+b^3+c^3)-a(b^2+c^2)-b(c^2+a^2)-c(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2}\\ &=\frac{a^3+b^3-ab(a+b)+(b^3+c^3)-bc(b+c)+(c^3+a^3)-ca(c+a)}{a^2+b^2+c^2}\\ &=\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}\\ &=\sum_{cyclic}\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}.\end{aligned}$$

したがって証明すべき不等式は

$$\sum_{cyclic}(a-b)^2\left(\frac{a+b+c}{(b+c)(c+a)}-\frac{a+b}{a^2+b^2+c^2}\right)\geqq 0$$

となる．

　不等式の左辺を変形すると

$$\sum_{cyclic}(a-b)^2\left(\frac{a+b+c}{(b+c)(c+a)}-\frac{a+b}{a^2+b^2+c^2}\right)$$

$$
= \sum_{cyclic} (a-b)^2 \cdot \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b)(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)}
$$

$$
= \sum_{cyclic} (a-b)^2 \cdot \frac{a^3+b^3+c^3-2abc}{(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)}
$$

$$
= \sum_{cyclic} (a-b)^2 \cdot \frac{(a^3+b^3+c^3-3abc)+abc}{(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)}.
$$

相加平均・相乗平均の不等式より

$$
a^3+b^3+c^3 \geqq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3} = 3abc.
$$

したがって

$$
\sum_{cyclic} (a-b)^2 \left(\frac{a+b+c}{(b+c)(c+a)} - \frac{a+b}{a^2+b^2+c^2} \right)
$$

$$
= \sum_{cyclic} (a-b)^2 \cdot \frac{(a^3+b^3+c^3-3abc)+abc}{(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2)} \geqq 0. \qquad \blacksquare
$$

問題 33 (Russia 1999)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

解 両辺に $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&(a^2+2bc)(c^2+a^2)(a^2+b^2)+(b^2+2ca)(a^2+b^2)(b^2+c^2)+(c^2+2ab)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\\ &>3(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから
$p=b-a\geqq 0,\ q=c-a\geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&\Big[a^2+2(a+p)(a+q)\Big]\Big[(a+q)^2+a^2\Big]\Big[a^2+(a+p)^2\Big]\\ &\quad+\Big[(a+p)^2+2(a+q)a\Big]\Big[a^2+(a+p)^2\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\\ &\qquad+\Big[(a+q)^2+2a(a+p)\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[(a+q)^2+a^2\Big]\\ &>3\Big[a^2+(a+p)^2\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[(a+q)^2+a^2\Big]\\ \Longleftrightarrow\ &12a^6+24(p+q)a^5+4(6p^2+9pq+6q^2)a^4+2(10p^3+9p^2q+9pq^2+10q^3)a^3\\ &\quad+(13p^4+4p^3q+3p^2q^2+4pq^3+13q^4)a^2+2(3p^5-p^4q-pq^4+3q^5)a\\ &\qquad+(p^6-2p^4q^2+2p^3q^3-2p^2q^4+q^6)\\ &>0.\end{aligned}$$

この不等式を，$12a^6+24Aa^5+4Ba^4+2Ca^3+Da^2+2Ea+F>0$ とおくと

$$A\geqq 0,\ B\geqq 0,\ C\geqq 0,\ D\geqq 0,$$

$$\begin{aligned}E&=(p+q)(3p^4-4p^3q+4p^2q^2-4pq^3+3q^4)\\ &=(p+q)\Big[3(p-q)^4+2pq(4p^2-7pq+4q^2)\Big]\geqq 0,\\ F&=(p-q)^2(p^4+2p^3q+p^2q^2+2pq^3+q^4)\geqq 0\end{aligned}$$

したがって，不等式 $12a^6+24Aa^5+4Ba^4+2Ca^3+Da^2+2Ea+F>0$ は成り立つ． ■

問題 34　(Darij Grinberg)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geqq a+b+c.$$

解 1　両辺に $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&a^2(b+c)(c^2+a^2)(a^2+b^2)+b^2(c+a)(a^2+b^2)(b^2+c^2)+c^2(a+b)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\\ &\geqq (a+b+c)(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから $p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&a^2(2a+p+q)\Big[(a+q)^2+a^2\Big]\Big[a^2+(a+p)^2\Big]\\ &\quad+(a+p)^2(2a+q)\Big[a^2+(a+p)^2\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\\ &\quad\quad+(a+q)^2(2a+p)\Big[(a+q)^2+a^2\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\\ &\geqq (3a+p+q)\Big[a^2+(a+p)^2\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[(a+q)^2+a^2\Big]\\ \Longleftrightarrow\ &8(p^2-pq+q^2)a^5+10(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^4+20(p^4-p^2q^2+q^4)a^3\\ &\quad+5(2p^5+p^4q-2p^3q^2-2p^2q^3+pq^4+2q^5)a^2\\ &\quad\quad+(2p^6+4p^5q-5p^4q^2-5p^2q^4+4pq^5+2q^6)a\\ &\quad\quad\quad+p^6q-p^5q^2-p^2q^5+pq^6.\end{aligned}$$

この不等式を，$8Aa^5+10Ba^4+20Ca^3+5Da^2+Ea+F \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0,\ C \geqq 0,$

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2) \geqq 0,\\ D&=(p+q)(2p^4-p^3q-p^2q^2-pq^3+2q^4)\\ &=(p+q)\Big[2(p-q)^4+pq(7p^2-13pq+7q^2)\Big] \geqq 0,\\ E&=2(p-q)^6+pq(16p^4-35p^3q+40p^2q^2-35pq^3+16q^4)\\ &=2(p-q)^6+pq\Big[16(p-q)^4+pq(29p^2-56pq+29q^2)\Big] \geqq 0,\\ F&=pq(p+q)(p-q)^2(p^2+q^2) \geqq 0\end{aligned}$$

したがって，不等式 $8Aa^5+10Ba^4+20Ca^3+5Da^2+Ea+F \geqq 0$ は成り立つ．　■

解 2　差をとると

$$\begin{aligned}\sum_{cyclic} \frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} - \sum_{cyclic} a &= \sum_{cyclic} \frac{a^2b - ab^2 + a^2c - ac^2}{b^2+c^2} \\ &= \sum_{cyclic} \frac{ab(a-b)}{b^2+c^2} - \sum_{cyclic} \frac{ca(c-a)}{b^2+c^2} \\ &= \sum_{cyclic} \frac{ab(a-b)}{b^2+c^2} - \sum_{cyclic} \frac{ab(a-b)}{c^2+a^2} \\ &= \sum_{cyclic} \frac{ab(a+b)(a-b)^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geqq 0.\end{aligned}$$

よって，証明すべき不等式は成り立つ.　■

問題 35　a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geqq 2.$$

解　差をとると

$$\begin{aligned}
\sum_{cyclic}\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}-2 &= \sum_{cyclic}\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}-\sum_{cyclic}\frac{2a}{a+b+c} \\
&= \frac{1}{a+b+c}\sum_{cyclic}\frac{ab(a-b)-ca(c-a)}{b^2+bc+c^2} \\
&= \frac{1}{a+b+c}\left(\sum_{cyclic}\frac{ab(a-b)}{b^2+bc+c^2}-\sum_{cyclic}\frac{ca(c-a)}{b^2+bc+c^2}\right) \\
&= \frac{1}{a+b+c}\left(\sum_{cyclic}\frac{ab(a-b)}{b^2+bc+c^2}-\sum_{cyclic}\frac{ab(a-b)}{c^2+ca+a^2}\right) \\
&= \frac{1}{a+b+c}\sum_{cyclic}ab(a-b)\left(\frac{1}{b^2+bc+c^2}-\frac{1}{c^2+ca+a^2}\right) \\
&= \sum_{cyclic}\frac{ab(a-b)^2}{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)} \geqq 0.
\end{aligned}$$

よって，証明すべき不等式は成り立つ．　■

問題 36　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，$(a+b)(b+c)(c+a)=2$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leqq 1.$$

解　不等式を同次化して

$$4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leqq (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&(2a+p)^2(2a+q)^2(2a+p+q)^2\\
&\geqq 4\Big[a^2+(a+p)(a+q)\Big]\Big[(a+p)^2+(a+q)a\Big]\Big[(a+q)^2+a(a+p)\Big]\\
\Longleftrightarrow\ &32a^6+64(p+q)a^5+40(p^2+3pq+q^2)a^4+4(2p^3+17p^2q+17pq^2+2q^3)a^3\\
&\quad+4(3p^3q+8p^2q^2+3pq^3)a^2+4(p^3q^2+p^2q^3)a+p^2q^2(p-q)^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 37　(Iran 1996)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2} \geqq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

解　両辺に $4(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2(ab+bc+ca)$ をかけた

$$\begin{aligned}&4(ab+bc+ca)\Big[(c+a)^2(a+b)^2+(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2\Big]\\ &\geqq 9(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&4\Big[a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a\Big]\\ &\quad\times\Big[(2a+q)^2(2a+p)^2+(2a+p)^2(2a+p+q)^2+(2a+p+q)^2(2a+q)^2\Big]\\ &\geqq 9(2a+p)^2(2a+p+q)^2(2a+q)^2\\ \Longleftrightarrow\ &32(p^2-pq+q^2)a^4+32(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^3\\ &\quad+8(5p^4+2p^3q-9p^2q^2+2pq^3+5q^4)a^2\\ &\quad\quad+4(2p^5+5p^4q-6p^3q^2-6p^2q^3+5pq^4+2q^5)a\\ &\quad\quad\quad+pq(4p^4-p^3q-6p^2q^2-pq^3+4q^4)\geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$32Aa^4+32Ba^3+8Ca^2+4Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$.

$$\begin{aligned}B&=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2)\geqq 0,\\ C&=5(p-q)^4+pq(22p^2-39pq+22q^2)\geqq 0,\\ D&=(p+q)(2p^4+3p^3q-9p^2q^2+3pq^3+2q^4)\\ &=(p+q)\Big[2(p-q)^4+pq(11p^2-21pq+11q^2)\Big]\geqq 0,\\ E&=pq(p-q)^2(4p^2+7pq+4q^2)\geqq 0\end{aligned}$$

したがって，不等式 $32Aa^4+32Ba^3+8Ca^2+4Da+E \geqq 0$ は成り立つ．■

問題 38 (Pham Kim Hung)

a, b, c は負でない実数で，$a+b+c=2$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1} \leqq 1.$$

解 不等式を同次化して

$$\frac{4bc}{4a^2+(a+b+c)^2}+\frac{4ca}{4b^2+(a+b+c)^2}+\frac{4ab}{4c^2+(a+b+c)^2} \leqq 1$$

すなわち

$$\begin{aligned}
&\Big[4a^2+(a+b+c)^2\Big]\Big[4b^2+(a+b+c)^2\Big]\Big[4c^2+(a+b+c)^2\Big] \\
&\geqq 4bc\Big[4b^2+(a+b+c)^2\Big]\Big[4c^2+(a+b+c)^2\Big] \\
&\quad + 4ca\Big[4c^2+(a+b+c)^2\Big]\Big[4a^2+(a+b+c)^2\Big] \\
&\quad\quad + 4ab\Big[4a^2+(a+b+c)^2\Big]\Big[4b^2+(a+b+c)^2\Big] \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\Big[4a^2+(3a+p+q)^2\Big]\Big[4(a+p)^2+(3a+p+q)^2\Big]\Big[4(a+q)^2+(3a+p+q)^2\Big] \\
&\geqq 4(a+p)(a+q)\Big[4(a+p)^2+(3a+p+q)^2\Big]\Big[4(a+q)^2+(3a+p+q)^2\Big] \\
&\quad + 4(a+q)a\Big[4(a+q)^2+(3a+p+q)^2\Big]\Big[4a^2+(3a+p+q)^2\Big] \\
&\quad\quad + 4a(a+p)\Big[4a^2+(3a+p+q)^2\Big]\Big[4(a+p)^2+(3a+p+q)^2\Big] \\
&\Longleftrightarrow 169a^6+338(p+q)a^5+(211p^2+634pq+211q^2)a^4 \\
&\quad + 4(27p^3+65p^2q+65pq^2+27q^3)a^3+(95p^4-28p^3q+58p^2q^2-28pq^3+95q^4)a^2 \\
&\quad\quad + 2(17p^5+5p^4q-22p^3q^2-22p^2q^3+5pq^4+17q^5)a \\
&\quad\quad\quad + 5p^6+2p^5q+11p^4q^2-36p^3q^3+11p^2q^4+2pq^5+5q^6 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$169a^6+338Aa^5+Ba^4+4Ca^3+Da^2+2Ea+F \geqq 0$ とおくと，

$A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,$

$$
\begin{aligned}
D &= 95(p-q)^4 + 32pq(11p^2 - 16pq + 11q^2) \geqq 0,\\
E &= (p+q)(p-q)^2(17p^2 + 22pq + 17q^2) \geqq 0,\\
F &= (p-q)^2(5p^2 + 2pq + q^2)(p^2 + 2pq + 5q^2) \geqq 0
\end{aligned}
$$

したがって，不等式 $169a^6 + 338Aa^5 + Ba^4 + 4Ca^3 + Da^2 + 2Ea + F \geqq 0$ は成り立つ． ■

問題 39　(Pham Kim Hung)

a, b, c は負でない実数で，$a^2+b^2+c^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1} \leqq \frac{3}{4}.$$

解　不等式を同次化して

$$\frac{bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{ca}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{ab}{a^2+b^2+2c^2} \leqq \frac{3}{4}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
&3(2a^2+b^2+c^2)(a^2+2b^2+c^2)(a^2+b^2+2c^2)\\
&\geqq 4bc(a^2+2b^2+c^2)(a^2+b^2+2c^2)\\
&\quad+4ca(a^2+b^2+2c^2)(2a^2+b^2+c^2)\\
&\qquad+4ab(2a^2+b^2+c^2)(a^2+2b^2+c^2) \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&3\Big[2a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[a^2+2(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[a^2+(a+p)^2+2(a+q)^2\Big]\\
&\geqq 4(a+p)(a+q)\Big[a^2+2(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[a^2+(a+p)^2+2(a+q)^2\Big]\\
&\quad+4(a+q)a\Big[a^2+(a+p)^2+2(a+q)^2\Big]\Big[2a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\\
&\qquad+4a(a+p)\Big[2a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[2a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\\
\iff &32(p^2-pq+q^2)a^4+8(6p^3-p^2q-pq^2+6q^3)a^3\\
&\quad+24(2p^4-p^3q+2p^2q^2-pq^3+2q^4)a^2\\
&\qquad+2(10p^5-p^4q+6p^3q^2+6p^2q^3-pq^4+10q^5)a\\
&\qquad\quad+6p^6-8p^5q+21p^4q^2-20p^3q^3+21p^2q^4-8pq^5+6q^6\\
&\geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$32Aa^4+8Ba^3+24Ca^2+2Da+E \geqq 0$ とおくと，

$A \geqq 0,$

$$
\begin{aligned}
B &= (p+q)(6p^2 - 7pq + 6q^2) \geqq 0, \\
C &= 2(p-q)^4 + pq(7p^2 - 10pq + 7q^2) \geqq 0, \\
D &= (p+q)(10p^4 - 11p^3q + 17p^2q^2 - 11pq^3 + 10q^4) \\
&= (p+q)\Big[10(p-q)^4 + pq(29p^2 - 43pq + 29q^2)\Big] \geqq 0, \\
E &= (2p^2 + q^2)(p^2 + 2q^2)(3p^2 - 4pq + 3q^2) \geqq 0
\end{aligned}
$$

したがって，不等式 $32Aa^4 + 8Ba^3 + 24Ca^2 + 2Da + E \geqq 0$ は成り立つ． ■

問題 40 (Vasile Cîrtoaje and Wolfgang Berndt)

a, b, c は負でない実数で，$a^2+b^2+c^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{3+a^2-2bc}+\frac{1}{3+b^2-2ca}+\frac{1}{3+c^2-2ab} \leqq \frac{9}{8}.$$

解　不等式を同次化して

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4a^2+3b^2+3c^2-2bc}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3a^2+4b^2+3c^2-2ca}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3a^2+3b^2+4c^2-2ab} \leqq \frac{9}{8}.$$

すなわち

$$\begin{aligned}
&9(4a^2+3b^2+3c^2-2bc)(3a^2+4b^2+3c^2-2ca)(3a^2+3b^2+4c^2-2ab)\\
&\geqq 8(a^2+b^2+c^2)(3a^2+4b^2+3c^2-2ca)(3a^2+3b^2+4c^2-2ab)\\
&\quad +8(a^2+b^2+c^2)(3a^2+3b^2+4c^2-2ab)(4a^2+3b^2+3c^2-2bc)\\
&\quad\quad +8(a^2+b^2+c^2)(4a^2+3b^2+3c^2-2bc)(3a^2+4b^2+3c^2-2ca) \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&9\Big[4a^2+3(a+p)^2+3(a+q)^2-2(a+p)(a+q)\Big]\\
&\quad\times\Big[3a^2+4(a+p)^2+3(a+q)^2-2(a+q)a\Big]\\
&\quad\quad\times\Big[3a^2+3(a+p)^2+4(a+q)^2-2a(a+p)\Big]\\
&\geqq 8\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[3a^2+4(a+p)^2+3(a+q)^2-2(a+q)a\Big]\\
&\quad\times\Big[3a^2+3(a+p)^2+4(a+q)^2-2a(a+p)\Big]\\
&\quad+8\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[3a^2+3(a+p)^2+4(a+q)^2-2a(a+p)\Big]\\
&\quad\times\Big[4a^2+3(a+p)^2+3(a+q)^2-2(a+p)(a+q)\Big]\\
&\quad+8\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]\Big[4a^2+3(a+p)^2+3(a+q)^2-2(a+p)(a+q)\Big]\\
&\quad\times\Big[3a^2+4(a+p)^2+3(a+q)^2-2(a+q)a\Big]\\
&\Longleftrightarrow 128(p^2-pq+q^2)a^4+128(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^3\\
&\quad+16(19p^4-14p^3q+9p^2q^2-14pq^3+19q^4)a^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+4(38p^5-19p^4q+6p^3q^2+6p^2q^3-19pq^4+38q^5)a \\
&\quad +60p^6-104p^5q+199p^4q^2-226p^3q^3+199p^2q^4-104pq^5+60q^6 \\
\geqq{}& 0.
\end{aligned}
$$

この不等式を，$128Aa^4+128Ba^3+16Ca^2+4Da+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$
\begin{aligned}
B &= (p+q)(2p^2-3pq+2q^2) \geqq 0, \\
C &= 19(p-q)^4+pq(62p^2-105pq+62q^2) \geqq 0, \\
D &= (p+q)(38p^4-57p^3q+63p^2q^2-57pq^3+38q^4) \\
&= (p+q)\Big[38(p-q)^4+5pq(19p^2-33pq+19q^2)\Big] \geqq 0, \\
E &= 60(p-q)^6+pq(256p^4-701p^3q+974p^2q^2-701pq^3+256q^4) \\
&= 60(p-q)^6+pq\Big[(256(p-q)^4+pq(323p^2-562pq+323q^2)\Big] \geqq 0
\end{aligned}
$$

したがって，不等式 $128Aa^4+128Ba^3+16Ca^2+4Da+E \geqq 0$ は成り立つ． ■

問題 41　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとする．$r > -2$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sum_{cyclic} \frac{ab+(r-1)bc+ca}{b^2+rbc+c^2} \geqq \frac{3(r+1)}{r+2}.$$

解　両辺に $(r+2)(b^2+rbc+c^2)(c^2+rca+a^2)(a^2+rab+b^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&(r+2)\sum_{cyclic}\left[ab+(r-1)bc+ca\right](c^2+rca+a^2)(a^2+rab+b^2)\\ &\geqq 3(r+1)(b^2+rbc+c^2)(c^2+rca+a^2)(a^2+rab+b^2) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから $p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&(r+2)\Big[a(a+p)+(r-1)(a+p)(a+q)+(a+q)a\Big]\\ &\quad\times\Big[(a+q)^2+r(a+q)a+a^2\Big]\Big[a^2+ra(a+p)+(a+p)^2\Big]\\ &\ +(r+2)\Big[(a+p)(a+q)+(r-1)(a+q)a+a(a+p)\Big]\\ &\quad\times\Big[a^2+ra(a+p)+(a+p)^2\Big]\Big[(a+p)^2+r(a+p)(a+q)+(a+q)^2\Big]\\ &\ +(r+2)\Big[(a+q)a+(r-1)a(a+p)+(a+p)(a+q)\Big]\\ &\quad\times\Big[(a+p)^2+r(a+p)(a+q)+(a+q)^2\Big]\Big[(a+q)^2+r(a+q)a+a^2\Big]\\ &\geqq 3(r+1)\Big[(a+p)^2+r(a+p)(a+q)+(a+q)^2\Big]\\ &\quad\times\Big[(a+q)^2+ra(a+q)+a^2)\Big]\Big[a^2+ra(a+p)+(a+p)^2\Big]\\ \iff &2(r+2)^2(p^2-pq+q^2)a^4+2(r+2)^2(2p^3-p^2q-pq^2+2q^3)a^3\\ &\ +2(r+2)(3p^4-3p^2q^2+3q^4+rp^4+rp^3q-3rp^2q^2+rpq^3+rq^4)a^2\\ &\ +(r+2)(2p^5+p^4q-2p^3q^2-2p^2q^3+pq^4+2q^5\\ &\quad+2rp^4q-2rp^3q^2-2rp^2q^3+2rpq^4)a\\ &\ +pq(2p^4-3p^3q+2p^2q^2-3pq^3+2q^4\\ &\quad+rp^4-rp^3q-rpq^3+rq^4+r^2p^3q-2r^2p^2q^2+r^2pq^3)\geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を

$$2(r+2)^2Aa^4+2(r+2)^2Ba^3+2(r+2)Ca^2+(r+2)Da+pqE \geqq 0$$

とおくと，$A \geqq 0$,

$$B=(p+q)(2p^2-3pq+2q^2) \geqq 0,$$

$$C=(r+3)(p-q)^4+pq\Big[\underbrace{(5r+12)p^2-(9r+21)pq+(5r+12)q^2}_{5r+12>0,\ 2(5r+12)>9r+21}\Big] \geqq 0,$$

$$\begin{aligned} D&=(p+q)(2p^4-p^3q-p^2q^2-pq^3+2q^4+2rp^3q-4rp^2q^2+2rpq^3)\\ &=(p+q)\Big[2(p-q)^4+pq\big\{\underbrace{(2r+7)p^2-(4r+13)pq+(2r+7)q^2}_{2r+7>0,\ 2(2r+7)>4r+13}\big\}\Big] \geqq 0, \end{aligned}$$

$$E=(p-q)^2\Big[(r+2)p^2+(r^2+r+1)pq+(r+2)q^2\Big] \geqq 0$$

したがって，不等式

$$2(r+2)^2Aa^4+2(r+2)^2Ba^3+2(r+2)Ca^2+(r+2)Da+pqE \geqq 0$$

は成り立つ． ■

問題 42　a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとする．$r > -2$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sum_{cyclic} \frac{ab + (r+2)^2bc + ca}{b^2 + rbc + c^2} \geqq r + 4.$$

解　両辺に $(b^2 + rbc + c^2)(c^2 + rca + a^2)(a^2 + rab + b^2)$ をかけた

$$\sum_{cyclic} \left[ab + (r+2)^2bc + ca\right](c^2 + rca + a^2)(a^2 + rab + b^2)$$
$$\geqq (r+4)(b^2 + rbc + c^2)(c^2 + rca + a^2)(a^2 + rab + b^2) \qquad \cdots\cdots (*)$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるから $p = b - a \geqq 0,\ q = c - a \geqq 0$ とおき，$b = a + p,\ c = a + q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\Big[a(a+p) + (r+2)^2(a+p)(a+q) + (a+q)a\Big] \\
&\quad \times \Big[(a+q)^2 + r(a+q)a + a^2\Big]\Big[a^2 + ra(a+p) + (a+p)^2\Big] \\
&+ \Big[(a+p)(a+q) + (r+2)^2(a+q)a + a(a+p)\Big] \\
&\quad \times \Big[a^2 + ra(a+p) + (a+p)^2\Big]\Big[(a+p)^2 + r(a+p)(a+q) + (a+q)^2\Big] \\
&+ \Big[(a+q)a + (r+2)^2a(a+p) + (a+p)(a+q)\Big] \\
&\quad \times \Big[(a+p)^2 + r(a+p)(a+q) + (a+q)^2\Big]\Big[(a+q)^2 + ra(a+q) + a^2)\Big] \\
\geqq\ & (r+4)\Big[(a+p)^2 + r(a+p)(a+q) + (a+q)^2\Big] \\
&\quad \times \Big[(a+q)^2 + ra(a+q) + a^2)\Big]\Big[a^2 + ra(a+p) + (a+p)^2\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff & 2(20 + 32r + 21r^2 + 7r^3 + r^4)a^6 \\
&+ 4(20p + 20q + 32rp + 32rq + 21r^2p + 21r^2q + 7r^3p + 7r^3q + r^4p + r^4q)a^5 \\
&+ 2(r+2)\Big[(r^3 + 6r^2 + 14r + 16)p^2 + (4r^3 + 19r^2 + 41r + 34)pq \\
&\quad + (r^3 + 6r^2 + 14r + 16)q^2\Big]a^4 \\
&+ (r+2)(p+q)\Big[(2r^2 + 6r + 14)p^2 + (4r^3 + 19r^2 + 41r + 29)pq \\
&\quad + (2r^2 + 6r + 14)q^2\Big]a^3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(6p^4+30p^3q+34p^2q^2+30pq^3+6q^4+2rp^4+35rp^3q+58rp^2q^2\\
&\quad +35rpq^3+2rq^4+15r^2p^3q+42r^2p^2q^2+15r^2pq^3\\
&\qquad +3r^3p^3q+14r^3p^2q^2+3r^3pq^3+2r^4p^2q^2)a^2\\
&+(p+q)(2p^4-p^3q+9p^2q^2-pq^3+2q^4+2rp^3q+7rp^2q^2+2rpq^3\\
&\quad +5r^2p^2q^2+r^3p^2q^2)a\\
&+pq(p-q)^4 \geqq 0.
\end{aligned}
$$

この不等式を

$$2Aa^6+4Ba^5+2(r+2)Ca^4+(r+2)(p+q)Da^3+Ea^2+(p+q)Fa+G \geqq 0$$

とおくと，$G \geqq 0$,

$$
\begin{aligned}
A&=(r+2)^2(r^2+3r+5) \geqq 0,\\
B&=(r+2)^2(r^2+3r+5)(p+q) \geqq 0
\end{aligned}
$$

$$r^3+6r^2+14r+12=(r+2)(r^2+4r+6)>0,$$

$$4r^3+19r^2+41r+38=(r+2)(4r^2+11r+19)>0$$

より

$$r^3+6r^2+14r+16>4,\ 4r^3+19r^2+41r+34>-4.$$

よって

$$C=(r^3+6r^2+14r+16)(p^2+q^2)+(4r^3+19r^2+41r+34)pq \geqq 4(p^2+q^2)-4pq \geqq 0.$$

同様にして

$$2r^2+6r+14 \geqq \frac{19}{2},\ 4r^3+19r^2+41r+29>-9$$

より

$$D=(2r^2+6r+14)(p^2+q^2)+(4r^3+19r^2+41r+29) \geqq \frac{1}{2}(19p^2-18pq+19q^2) \geqq 0.$$

次に E について考える．

$p=0$ のとき $E=(2r+6)q^4 \geqq 0$.

$q=0$ のとき $E=(2r+6)p^4 \geqq 0$.

$p \neq 0,\ q \neq 0$ のとき，$t=\dfrac{p}{q}\ (>0),\ s=t+\dfrac{1}{t}\ (\geqq 2)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\frac{E}{q^4} &= (6t^4+30t^3+34t^2+30t+6+2rt^4+35rt^3+58rt^2+35rt+2r \\
&\qquad +15r^2t^3+42r^2t^2+15r^2t+3r^3t^3+14r^3t^2+3r^3t+2r^4t^2), \\
\frac{E}{q^4t^2} &= 6\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+(3r^3+15r^2+35r+30)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2r^4+14r^3+42r^2+58r+34 \\
&= 6\left(s^2-2\right)+(3r^3+15r^2+35r+30)s+2r^4+14r^3+42r^2+58r+34.
\end{aligned}
$$

$3r^3+15r^2+35r+34=(r+2)(3r^2+9r+17)>0$ より $3r^3+15r^2+35r+30>-4$ が成り立つから

$$
-\frac{3r^3+15r^2+35r+30}{12}<\frac{1}{3}.
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\frac{E}{q^4t^2} &= 6\left(s^2-2\right)+(3r^3+15r^2+35r+30)s+2r^4+14r^3+42r^2+58r+34 \\
&\geqq 6\left(2^2-2\right)+(3r^3+15r^2+35r+30)\cdot 2+2r^4+14r^3+42r^2+58r+34 \\
&= 2r^4+20r^3+72r^2+128r+106 \\
&= 2(r+2)^4+4(r+2)^3+16(r+2)+10>0.
\end{aligned}
$$

最後に F について考える．

$p=0$ のとき $F=2q^4\geqq 0$.

$q=0$ のとき $F=2p^4\geqq 0$.

$p\fallingdotseq 0,\ q\fallingdotseq 0$ のとき，$t=\dfrac{p}{q}(>0),\ s=t+\dfrac{1}{t}(\geqq 2)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\frac{F}{q^4} &= 2t^4-t^3+9t^2-t+2+2rt^3+7rt^2+2rt+5r^2t^2+r^3t^2, \\
\frac{F}{q^4t^2} &= 2\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+(2r-1)\left(t+\frac{1}{t}\right)+r^3+5r^2+7r+9 \\
&= 2(s^2-2)+(2r-1)s+r^3+5r^2+7r+9 \\
&\left(-\frac{2r-1}{4}<\frac{5}{4}\quad \text{が成り立っているから}\right) \\
&\geqq 2(2^2-2)+(2r-1)\cdot 2+r^3+5r^2+7r+9 \\
&= r^3+5r^2+11r+11=(r+2)^3-(r+2)^2+3(r+2)+1 \\
&= (r+2)\Big[\underbrace{(r+2)^2-(r+2)+3}_{>0}\Big]+1>1.
\end{aligned}
$$

■

問題 43　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとする．p, r は実数で $r > -2,\ p \leqq r-1$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sum_{cyclic} \frac{ab+pbc+ca}{b^2+rbc+c^2} \geqq \frac{3(p+2)}{r+2}.$$

解　両辺に $(r+2)(b^2+rbc+c^2)(c^2+rca+a^2)(a^2+rab+b^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyclic}(r+2)\left(ab+pbc+ca\right)\left(c^2+rca+a^2\right)(a^2+rab+b^2)\\
&\geqq 3(p+2)(b^2+rbc+c^2)(c^2+rca+a^2)(a^2+rab+b^2) \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるから $m = b-a \geqq 0,\ n = c-a \geqq 0$ とおき，$b = a+m,\ c = a+n$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&(r+2)\Big[a(a+m)+p(a+m)(a+n)+(a+n)a\Big]\\
&\quad\times\Big[(a+n)^2+r(a+n)a+a^2\Big]\Big[a^2+ra(a+m)+(a+m)^2\Big]\\
&+(r+2)\Big[(a+m)(a+n)+p(a+n)a+a(a+m)\Big]\\
&\quad\times\Big[a^2+ra(a+m)+(a+m)^2\Big]\Big[(a+m)^2+r(a+m)(a+n)+(a+n)^2\Big]\\
&+(r+2)\Big[(a+n)a+pa(a+m)+(a+m)(a+n)\Big]\\
&\quad\times\Big[(a+m)^2+r(a+m)(a+n)+(a+n)^2\Big]\Big[(a+n)^2+r(a+n)a+a^2\Big]\\
&\geqq 3(p+2)\Big[(a+m)^2+r(a+m)(a+n)+(a+n)^2\Big]\\
&\quad\times\Big[(a+n)^2+r(a+n)a+a^2)\Big]\Big[a^2+ra(a+m)+(a+m)^2\Big]\\
\Longleftrightarrow\ & 2(r+2)^2(r-p)(m^2-mn+n^2)a^4\\
&+(r+2)^2(m+n)(2m^2-5mn+2n^2-2pm^2+pmn-2pn^2+2rm^2-rmn\\
&\quad+2rn^2)a^3\\
&+(r+2)(4m^4-2m^3n-12m^2n^2-2mn^3+4n^4-2pm^4-2pm^3n\\
&\quad-6pm^2n^2-2pmn^3-2pn^4+4rm^4+rm^3n+rmn^3+4rn^4\\
&\quad-3prm^3n-3prmn^3+3r^2m^3n+3r^2mn^3)a^2
\end{aligned}$$

$$+ (r+2)(m+n)(2m^4 - 3m^3n - m^2n^2 - 3mn^3 + 2n^4 - 2pm^3n - 2pmn^3$$
$$+ 4rm^3n - 5rm^2n^2 + 4rmn^3 - prm^2n^2 + r^2m^2n^2)a$$
$$+ mn(2m^4 - 6m^3n + 4m^2n^2 - 6mn^3 + 2n^4 - 3pm^3n + 2pm^2n^2 - 3pmn^3$$
$$+ rm^4 + 2rm^3n - 4rm^2n^2 + 2rmn^3 + rn^4 - 2prm^2n^2 + r^2m^3n + r^2mn^3).$$

この不等式を

$2(r+2)^2(r-p)Aa^4 + (r+2)^2(m+n)Ba^3 + (r+2)Ca^2 + (r+2)(m+n)Da + mnE \geqq 0$

とおく.

$$A = m^2 - mn + n^2 \geqq 0,$$

$2 - 2p + 2r \geqq 2 + 2(1-r) + 2r = 4$ より

$$\begin{aligned} B &= (2-2p+2r)(m^2+n^2) + (-5+p-r)mn \\ &\geqq (2-2p+2r)\cdot 2mn + (-5+p-r)mn = (-3p-1+3r)mn \\ &\geqq \Big[3(1-r) - 1 + 3r\Big]mn = 2mn \geqq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 - 2p + 4r &\geqq 4 + 2(1-r) + 4r = 2r + 6 > 0, \\ 14 - 10p + 17r - 3pr + 3r^2 &= -(3r+10)p + 14 + 17r + 3r^2 \\ &\geqq (3r+10)(1-r) + 14 + 17r + 3r^2 = 24 + 10r > 0 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} C &= (4-2p+4r)(m-n)^4 + mn(14m^2 - 36mn + 14n^2 - 10pm^2 + 6pmn - 10pn^2 \\ &\quad + 17rm^2 - 24rmn + 17rn^2 - 3prm^2 - 3prn^2 + 3r^2m^2 + 3r^2n^2) \\ &= (4-2p+4r)(m-n)^4 + mn\Big[(14 - 10p + 17r - 3pr + 3r^2)(m^2+n^2) \\ &\qquad + (-36 + 6p - 24r)mn\Big] \\ &\geqq (4-2p+4r)(m-n)^4 + mn\Big[(14 - 10p + 17r - 3pr + 3r^2)\cdot 2mn \\ &\qquad + (-36 + 6p - 24r)mn\Big] \\ &= (4-2p+4r)(m-n)^4 + m^2n^2\Big[-(6r+14)p - 8 + 10r + 6r^2\Big] \\ &\geqq (4-2p+4r)(m-n)^4 + m^2n^2\Big[(6r+14)(1-r) - 8 + 10r + 6r^2\Big] \\ &= (4-2p+4r)(m-n)^4 + m^2n^2(2r+6) \geqq 0. \end{aligned}$$

同様にして

$5-2p+4r \geqq 5+2(1-r)+4r=2r+7>0$ であるから

$$\begin{aligned}
D &= 2(m-n)^4+mn(5m^2-13mn+5n^2-2pm^2-2pn^2+4rm^2-5rmn \\
&\quad +4rn^2-prmn+r^2mn) \\
&= 2(m-n)^4+mn\Big[(5-2p+4r)(m^2+n^2)+(-13-5r-pr+r^2)mn\Big] \\
&\geqq 2(m-n)^4+mn\Big[(5-2p+4r)\cdot 2mn+(-13-5r-pr+r^2)mn\Big] \\
&= 2(m-n)^4+m^2n^2\Big[-(r+4)p-3+3r+r^2\Big] \\
&\geqq 2(m-n)^4+m^2n^2\Big[(r+4)(1-r)-3+3r+r^2\Big] \\
&= 2(m-n)^4+m^2n^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

最後に，E について考える．

$2-3p+6r+r^2 \geqq 2+3(1-r)+6r+r^2=r^2+3r+5>0$ であるから

$$\begin{aligned}
E &= (r+2)(m-n)^4+mn(2m^2-8mn+2n^2-3pm^2+2pmn-3pn^2+6rm^2 \\
&\quad -10rmn+6rn^2-2prmn+r^2m^2+r^2n^2) \\
&= (r+2)(m-n)^4+mn\Big[(2-3p+6r+r^2)(m^2+n^2)+(-8+2p-10r-2pr)mn\Big] \\
&\geqq (r+2)(m-n)^4+mn\Big[(2-3p+6r+r^2)\cdot 2mn+(-8+2p-10r-2pr)mn\Big] \\
&= (r+2)(m-n)^4+m^2n^2\Big[-(2r+4)p-4+2r+2r^2\Big] \\
&\geqq (r+2)(m-n)^4+m^2n^2\Big[(2r+4)(1-r)-4+2r+2r^2\Big] \\
&= (r+2)(m-n)^4 \geqq 0.
\end{aligned}$$

したがって

$$2Aa^6+4Ba^5+2(r+2)^2Ca^4+(r+2)^2(m+n)Da^3+(r+2)Ea^2+(r+2)(m+n)Fa+G \geqq 0$$

は成り立つ， ■

問題 44 (Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとする．p, r は実数で $r > -2$, $r-1 \leqq p \leqq (r+2)^2$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sum_{cyclic} \frac{ab+pbc+ca}{b^2+rbc+c^2} \geqq \frac{p}{r+2} + 2.$$

解 両辺に $(r+2)(b^2+rbc+c^2)(c^2+rca+a^2)(a^2+rab+b^2)$ をかけた

$$\begin{aligned}&\sum_{cyclic} (r+2)\left[ab+pbc+ca\right](c^2+rca+a^2)(a^2+rab+b^2)\\ &\geqq (p+2r+4)(b^2+rbc+c^2)(c^2+rca+a^2)(a^2+rab+b^2) \qquad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

を証明すればよい．一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるから $m = b - a \geqq 0$, $n = c - a \geqq 0$ とおき，$b = a + m$, $c = a + n$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&(r+2)\Big[a(a+m)+p(a+m)(a+n)+(a+n)a\Big]\\ &\quad\times\Big[(a+n)^2+r(a+n)a+a^2\Big]\Big[a^2+ra(a+m)+(a+m)^2\Big]\\ &+(r+2)\Big[(a+m)(a+n)+p(a+n)a+a(a+m)\Big]\\ &\quad\times\Big[a^2+ra(a+m)+(a+m)^2\Big]\Big[(a+m)^2+r(a+m)(a+n)+(a+n)^2\Big]\\ &+(r+2)\Big[(a+n)a+pa(a+m)+(a+m)(a+n)\Big]\\ &\quad\times\Big[(a+m)^2+r(a+m)(a+n)+(a+n)^2\Big]\Big[(a+n)^2+r(a+n)a+a^2\Big]\\ &\geqq (p+2r+4)\Big[(a+m)^2+r(a+m)(a+n)+(a+n)^2\Big]\\ &\quad\times\Big[(a+n)^2+r(a+n)a+a^2)\Big]\Big[a^2+ra(a+m)+(a+m)^2\Big]\\ \iff\ & 2(8+8p+4r+12pr-6r^2+6pr^2-5r^3+pr^3-r^4)a^6\\ &+4(8m+8n+8pm+8pn+4rm+4rn+12prm+12prn-6r^2m-6r^2n\\ &\quad+6pr^2m+6pr^2n-5r^3m-5r^3n+pr^3m+pr^3n-r^4m-r^4n)a^5\\ &+2(r+2)^2\Big(4m^2+6mn+4n^2+3pm^2+7pmn+3pn^2\\ &\quad-2rm^2-3rmn-2rn^2+prm^2+4prmn+prn^2-r^2m^2-4r^2mn-r^2n^2\Big)a^4\end{aligned}$$

$$+(r+2)^2(m+n)\Big(6m^2+mn+6n^2+2pm^2+7pmn+2pn^2$$
$$-2rm^2-3rmn-2rn^2+4prmn-4r^2mn\Big)a^3$$
$$+(r+2)(6m^4+6m^3n+2m^2n^2+6mn^3+6n^4+6pm^3n+8pm^2n^2+6pmn^3$$
$$+2rm^4-rm^3n-6rm^2n^2-rmn^3+2rn^4+3prm^3n+8prm^2n^2+3prmn^3$$
$$-3r^2m^3n-6r^2m^2n^2-3r^2mn^3+2pr^2m^2n^2-2r^3m^2n^2)a^2$$
$$+(r+2)(m+n)(2m^4-m^3n+m^2n^2-mn^3+2n^4+2pm^2n^2$$
$$+2rm^3n-5rm^2n^2+2rmn^3+prm^2n^2-r^2m^2n^2)a$$
$$+mn(m-n)^2(2m^2+2n^2-pmn+rm^2+2rmn+rn^2+r^2mn).$$

この不等式を

$$2Aa^6+4Ba^5+2(r+2)^2Ca^4+(r+2)^2(m+n)Da^3+(r+2)Ea^2+(r+2)(m+n)Fa+G \geqq 0$$

とおく.

$$A=(r+2)^3(1+p-r)\geqq 0,$$
$$B=(r+2)^3(m+n)(1+p-r)\geqq 0$$

$4+3p-2r+pr-r^2=(r+3)p+4-2r-r^2 \geqq (r+3)(r-1)+4-2r-r^2=1$ より

$$\begin{aligned}C&=(4+3p-2r+pr-r^2)(m^2+n^2)+(6+7p-3r+4pr-4r^2)mn\\&\geqq(4+3p-2r+pr-r^2)\cdot 2mn+(6+7p-3r+4pr-4r^2)mn\\&=(14+13p-7r+6pr-6r^2)mn=\Big[(6r+13)p+14-7r-6r^2\Big]mn\\&\geqq\Big[(6r+13)(r-1)+14-7r-6r^2\Big]mn=mn\geqq 0.\end{aligned}$$

同様にして　$6+2p-2r\geqq 6+2(r-1)-2r=4$ より

$$\begin{aligned}D&=(6+2p-2r)(m^2+n^2)+(1+7p-3r+4pr-4r^2)mn\\&\geqq(6+2p-2r)\cdot 2mn+(1+7p-3r+4pr-4r^2)mn\\&=(13+11p-7r+4pr-4r^2)mn=\Big[(4r+11)p+13-7r-4r^2\Big]mn\\&\geqq\Big[(4r+11)(r-1)+13-7r-4r^2\Big]mn=2mn\geqq 0.\end{aligned}$$

次に E について考える．

$m=0$ のとき $E=(2r+6)n^4 \geqq 0.$

$n=0$ のとき $E=(2r+6)m^4 \geqq 0.$

$m \fallingdotseq 0,\ n \fallingdotseq 0$ のとき，$t=\dfrac{m}{n}(>0),\ s=t+\dfrac{1}{t}(\geqq 2)$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{E}{n^4t^2} &= (6+2r)\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+(6+6p-r+3pr-3r^2)\left(t+\frac{1}{t}\right)\\ &\quad +2+8p-6r+8pr-6r^2+2pr^2-2r^3\\ &= (6+2r)\left(s^2-2\right)+(6+6p-r+3pr-3r^2)s\\ &\quad +2+8p-6r+8pr-6r^2+2pr^2-2r^3\end{aligned}$$

$6+6p-r+3pr-3r^2=(6+3r)p+6-r-3r^2 \geqq (6+3r)(r-1)+6-r-3r^2=2r>-4$ より

$$-\frac{6+6p-r+3pr-3r^2}{2(6+2r)}<\frac{4}{2(6+2r)}<1$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{E}{q^4t^2} &= (6+2r)\left(s^2-2\right)+(6+6p-r+3pr-3r^2)s\\ &\quad +2+8p-6r+8pr-6r^2+2pr^2-2r^3\\ &\geqq (6+2r)\left(2^2-2\right)+(6+6p-r+3pr-3r^2)\cdot 2\\ &\quad +2+8p-6r+8pr-6r^2+2pr^2-2r^3\\ &= (20+14r+2r^2)p+26-4r-12r^2-2r^3\\ &\geqq (20+14r+2r^2)(r-1)+26-4r-12r^2-2r^3\\ &= 2r+6>0.\end{aligned}$$

F については

$$\begin{aligned}F &= 2(m-n)^4+mn\Big[(7+2r)(m^2+n^2)+(-11+2p-5r+pr-r^2)mn\Big]\\ &\geqq 2(m-n)^4+mn\Big[(7+2r)\cdot 2mn+(-11+2p-5r+pr-r^2)mn\Big]\\ &= 2(m-n)^4+m^2n^2\Big[(r+2)p+3-r-r^2\Big]\\ &\geqq 2(m-n)^4+m^2n^2\Big[(r+2)(r-1)+3-r-r^2\Big]\\ &\geqq 2(m-n)^4+m^2n^2 \geqq 0.\end{aligned}$$

G については

$$\begin{aligned} G &= mn(m-n)^2\Big[(r+2)(m^2+n^2)+(-p+2r+r^2)mn\Big] \\ &\geqq mn(m-n)^2\Big[(r+2)\cdot 2mn+(-p+2r+r^2)mn\Big] \\ &= m^2n^2(m-n)^2\Big[\underbrace{(r+2)^2-p}_{\geqq 0}\Big] \geqq 0. \end{aligned}$$

したがって

$$2Aa^6+4Ba^5+2(r+2)^2Ca^4+(r+2)^2(m+n)Da^3+(r+2)Ea^2+(r+2)(m+n)Fa+G \geqq 0$$

は成り立つ． ■

問題 45　(Michael Rozenberg)

a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3 + b^3 + c^3 + 15 \geqq 6\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

解　不等式を同次化して

$$a^3 + b^3 + c^3 + 15abc \geqq 6(ab + bc + ca)\sqrt[3]{abc}$$

すなわち

$$(a^3 + b^3 + c^3 + 15abc)^2 \geqq 216(ab + bc + ca)^3 abc \qquad \cdots\cdots (*)$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a = \min(a, b, c)$ と仮定できるから，$p = b - a \geqq 0,\ q = c - a \geqq 0$ とおき，$b = a + p,\ c = a + q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\Big[a^3 + (a+p)^3 + (a+q)^3 + 15a(a+p)(a+q)\Big]^3 \\
&-216\Big[a(a+p) + (a+p)(a+q) + (a+q)a\Big]^3 a(a+p)(a+q) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 972(p^2 - pq + q^2)a^7 + 108(29p^3 - 12p^2q - 12pq^2 + 29q^3)a^6 \\
&+ 54(67p^4 + 40p^3q - 117p^2q^2 + 40pq^3 + 67q^4)a^5 \\
&+ 54(33p^5 + 85p^4q - 87p^3q^2 - 87p^2q^3 + 85pq^4 + 33q^5)a^4 \\
&+ 27(15p^6 + 87p^5q + 6p^4q^2 - 185p^3q^3 + 6p^2q^4 + 87pq^5 + 15q^6)a^3 \\
&+ 27(3p^7 + 12p^6q + 27p^5q^2 - 41p^4q^3 - 41p^3q^4 + 27p^2q^5 + 12pq^6 + 3q^7)a^2 \\
&+ 9(p^8 + 5p^7q + p^6q^2 + 2p^5q^3 - 14p^4q^4 + 2p^3q^5 + p^2q^6 + 5pq^7 + q^8)a \\
&+ p^9 + 3p^6q^3 + 3p^3q^6 + q^9 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を

$$972Aa^7 + 108Ba^6 + 54Ca^5 + 54Da^4 + 27Ea^3 + 27Fa^2 + 9Ga + H \geqq 0$$

とおくと，　$A \geqq 0,\ H \geqq 0,$

$$\begin{aligned}
&B = (p+q)(29p^2 - 41pq + 29q^2) \geqq 0, \\
&C = 67(p-q)^4 + pq(308p^2 - 519pq + 308q^2) \geqq 0, \\
&D = (p+q)(33p^4 + 52p^3q - 139p^2q^2 + 52pq^3 + 33q^4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (p+q)\Big[33(p-q)^4 + pq(184p^2 - 337pq + 184q^2)\Big] \geqq 0, \\
E &= 15(p-q)^6 + pq(177p^4 - 219p^3q + 115p^2q^2 - 219pq^3 + 177q^4) \\
&= 15(p-q)^6 + pq\Big[177(p-q)^4 + pq(489p^2 - 947pq + 489q^2)\Big] \geqq 0, \\
F &= (p+q)(3p^6 + 9p^5q + 18p^4q^2 - 59p^3q^3 + 18p^2q^4 + 9pq^5 + 3q^6) \\
&= (p+q)\Big[3(p-q)^6 + pq(27p^4 - 27p^3q + p^2q^2 - 27pq^3 + 27q^4)\Big] \\
&= (p+q)\Big[3(p-q)^6 + pq\big\{27(p-q)^4 + pq(81p^2 - 161pq + 81q^2)\big\}\Big] \geqq 0, \\
G &= (p-q)^8 + pq(13p^6 - 27p^5q + 58p^4q^2 - 84p^3q^3 + 58p^2q^4 - 27pq^5 + 13q^6) \\
&= (p-q)^8 + pq\Big[13(p-q)^6 + pq(51p^4 - 137p^3q + 176p^2q^2 - 137pq^3 + 51q^4)\Big] \\
&= (p-q)^8 + pq\Big[13(p-q)^6 + pq\big\{51(p-q)^4 + pq(67p^2 - 130pq + 67q^2)\big\}\Big] \geqq 0
\end{aligned}
$$

したがって

$$972Aa^7 + 108Ba^6 + 54Ca^5 + 54Da^4 + 27Ea^3 + 27Fa^2 + 9Ga + H \geqq 0$$

は成り立つ． ■

問題 46 (Pham Huu Duc)

a, b, c は負でない実数で $ab+bc+ca=3$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc}+\frac{b(c^2+a^2)}{b^2+ca}+\frac{c(a^2+b^2)}{c^2+ab} \geqq 3.$$

解 不等式を同次化して

$$\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc}+\frac{b(c^2+a^2)}{b^2+ca}+\frac{c(a^2+b^2)}{c^2+ab} \geqq 3\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

すなわち

$$\Big[a(b^2+c^2)(b^2+ca)(c^2+ab)+b(c^2+a^2)(c^2+ab)(a^2+bc)+c(a^2+b^2)(a^2+bc)(b^2+ca)\Big]^2$$
$$\geqq 3(ab+bc+ca)(a^2+bc)^2(b^2+ca)^2(c^2+ab)^2 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\Big[a\{(a+p)^2+(a+q)^2\}\{(a+p)^2+(a+q)a\}\{(a+q)^2+a(a+p)\}\\
&\quad+(a+p)\{(a+q)^2+a^2\}\{(a+q)^2+a(a+p)\}\{a^2+(a+p)(a+q)\}\\
&\quad\quad+(a+q)\{a^2+(a+p)^2\}\{a^2+(a+p)(a+q)\}\{(a+p)^2+(a+q)a\}\Big]^2\\
&-3\Big[a(a+p)+(a+p)(a+q)+(a+q)a\Big]\\
&\quad\times\Big[a^2+(a+p)(a+q)\Big]^2\Big[(a+p)^2+(a+q)a\Big]^2\Big[(a+q)^2+a(a+p)\Big]^2 \geqq 0\\
\iff\ &64(p^2-pq+q^2)a^{12}+16(22p^3-9p^2q-9pq^2+22q^3)a^{11}\\
&+16(53p^4+15p^3q-61p^2q^2+15pq^3+53q^4)a^{10}\\
&+20(58p^5+67p^4q-74p^3q^2-74p^2q^3+67pq^4+58q^5)a^9\\
&+3(332p^6+774p^5q-103p^4q^2-1174p^3q^3-103p^2q^4+744pq^5+332q^6)a^8\\
&+2(278p^7+1019p^6q+711p^5q^2-1523p^4q^3-1523p^3q^4+711p^2q^5\\
&\quad+1019pq^6+278q^7)a^7\\
&+(199p^8+1150p^7q+1875p^6q^2-823p^5q^3-3455p^4q^4-823p^3q^5\\
&\quad+1875p^2q^6+1150pq^7+199q^8)a^5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2(21p^9+204p^8q+586p^7q^2+268p^6q^3-866p^5q^4-866p^4q^5+268p^3q^6\\
&\qquad+586p^2q^7+204pq^8+21q^9)a^5\\
&+(4p^{10}+85p^9q+426p^8q^2+561p^7q^3-317p^6q^4-1039p^5q^5-317p^4q^6\\
&\qquad+561p^3q^7+426p^2q^8+85pq^9+4q^{10})a^4\\
&+2(4p^{10}q+44p^9q^2+113p^8q^3+35p^7q^4-143p^8q^3-143p^5q^6+35p^4q^7\\
&\qquad+113p^3q^8+44p^2q^9+4pq^{10})a^3\\
&+p^2q^2(8p^8+47p^7q+52p^6q^2-39p^5q^3-71p^4q^4-39p^3q^5+52p^2q^6\\
&\qquad+47pq^7+8q^8)a^2\\
&+2p^3q^3(2p^7+6p^6q-p^5q^2-4p^4q^3-4p^3q^4-p^2q^5+6pq^6+2q^7)a\\
&+p^4q^4(p^6-p^3q^3+q^6)\geqq 0.
\end{aligned}
$$

この不等式を

$$
\begin{aligned}
&64Aa^{12}+16Ba^{11}+16Ca^{10}+20Da^9+3Ea^8+2Fa^7+Ga^6\\
&+2Ha^5+Ia^4+2Ja^3+Ka^2+2La+M\geqq 0
\end{aligned}
$$

とおくと，　$A\geqq 0,\ M\geqq 0,$

$$
\begin{aligned}
B&=(p+q)(22p^2-31pq+22q^2)\geqq 0,\\
C&=53(p-q)^4+pq(227p^2-379pq+227q^2)\geqq 0,\\
D&=(p+q)(58p^4+9p^3q-83p^2q^2+9pq^3+58q^4)\\
&=(p+q)\Big[58(p-q)^4+pq(241p^2-431pq+241q^2)\Big]\geqq 0,\\
E&=332(p-q)^6+pq(2736p^4-5083p^3q+5466p^2q^2-5083pq^3+2736q^4)\\
&=15(p-q)^6+pq\Big[2736(p-q)^4+pq(5861p^2-10950pq+5861q^2)\Big]\geqq 0,\\
F&=(p+q)(278p^6+741p^5q-30p^4q^2-1493p^3q^3-30p^2q^4+741pq^5+278q^6)\\
&=(p+q)\Big[278(p-q)^6+pq(2409p^4-4200p^3q+4067p^2q^2-4200pq^3+2409q^4)\Big]\\
&=(p+q)\Big[3(p-q)^6+pq\Big\{2409(p-q)^4+pq(5436p^2-10387pq+5436q^2)\Big\}\Big]\geqq 0,\\
G&=199(p-q)^8\\
&\quad+pq(2742p^6-3697p^5q+10321p^4q^2-17385p^3q^3+10321p^2q^4-3697pq^5\\
&\qquad+2742q^6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 199(p-q)^8 \\
&\quad + pq\Big[2742(p-q)^6 + pq(12755p^4 - 30809p^3q + 37455p^2q^2 - 30809pq^3 + 12755q^4)\Big] \\
&= 199(p-q)^8 \\
&\quad + pq\Big[2742(p-q)^6 + pq\Big\{12755(p-q)^4 + 3pq(6737p^2 - 13025pq + 6737q^2)\Big\}\Big] \geqq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= (p+q)(21p^8 + 183p^7q + 403p^6q^2 - 135p^5q^3 - 731p^4q^4 - 135p^3q^5 + 403p^2q^6 \\
&\qquad\qquad + 183pq^7 + 21q^8) \\
&= (p+q)\Big[21(p-q)^8 + pq(351p^6 - 185p^5q + 1041p^4q^2 - 2201p^3q^3 + 1041p^2q^4 \\
&\qquad\qquad - 185pq^5 + 351q^6)\Big] \\
&= (p+q)\Big[21(p-q)^8 + pq\Big\{351(p-q)^6 + pq(1921p^4 - 4224p^3q + 4819p^2q^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 4224pq^3 + 1921q^4)\Big\}\Big] \\
&= (p+q)\Big[21(p-q)^8 \\
&\qquad\qquad + pq\Big\{351(p-q)^6 \\
&\qquad\qquad\qquad + pq\Big(1921(p-q)^4 + pq(3460p^2 - 6707pq + 3460q^2)\Big)\Big\}\Big] \geqq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= 4(p-q)^{10} + pq(125p^8 + 246p^7q + 1041p^6q^2 - 1157p^5q^3 - 31p^4q^4 - 1157p^3q^5 \\
&\qquad\qquad\qquad + 1041p^2q^6 + 246pq^7 + 125q^8) \\
&= 4(p-q)^{10} + pq\Big[125(p-q)^8 \\
&\qquad\qquad\qquad + pq(1246p^6 - 2459p^5q + 5843p^4q^2 - 8781p^3q^3 + 5843p^2q^4 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - 2459pq^5 + 1246q^6)\Big] \\
&= 4(p-q)^{10} \\
&\quad + pq\Big[125(p-q)^8 \\
&\qquad\quad + pq\Big\{1246(p-q)^6 \\
&\qquad\qquad\quad + pq(5017p^4 - 12847p^3q + 16139p^2q^2 - 12847pq^3 + 5017q^4)\Big\}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4(p-q)^{10} \\
&\quad + pq\Big[125(p-q)^8 \\
&\qquad\quad + pq\Big\{1246(p-q)^6 \\
&\qquad\qquad\quad + pq\Big(5017(p-q)^4 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + pq(7221p^2 - 13963pq + 7221q^2)\Big)\Big\}\Big] \geqq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J &= (p+q)pq(4p^8 + 40p^7q + 73p^6q^2 - 38p^5q^3 - 105p^4q^4 - 38p^3q^5 \\
&\qquad\qquad + 73p^2q^6 + 40pq^7 + 4q^8) \\
&= (p+q)pq\Big[4(p-q)^8 \\
&\qquad\qquad + pq(72p^6 - 39p^5q + 186p^4q^2 - 385p^3q^3 + 186p^2q^4 - 39pq^5 + 72q^6)\Big] \\
&= (p+q)pq\Big[4(p-q)^8 \\
&\qquad\qquad + pq\Big\{72(p-q)^6 + pq(393p^4 - 894p^3q + 1055p^2q^2 - 894pq^3 + 393q^4)\Big\}\Big] \\
&= (p+q)pq\Big[4(p-q)^8 \\
&\qquad\qquad + pq\{72(p-q)^6 \\
&\qquad\qquad\quad + pq\Big(393(p-q)^4 + pq(678p^2 - 1303pq + 678q^2)\Big)\Big\}\Big] \geqq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K &= p^2q^2(8p^8 + 47p^7q + 52p^6q^2 - 39p^5q^3 - 71p^4q^4 - 39p^3q^5 \\
&\qquad + 52p^2q^6 + 47pq^7 + 8q^8) \\
&= p^2q^2\Big[8(p-q)^8 \\
&\qquad + pq(111p^6 - 172p^5q + 409p^4q^2 - 631p^3q^3 + 409p^2q^4 - 172pq^5 + 111q^6)\Big] \\
&= p^2q^2\Big[8(p-q)^8 \\
&\qquad + pq\Big\{111(p-q)^6 \\
&\qquad\quad + pq(494p^4 - 1256p^3q + 1589p^2q^2 - 1256pq^3 + 494q^4)\Big\}\Big] \\
&= p^2q^2\Big[8(p-q)^8 + pq\Big\{111(p-q)^6 \\
&\qquad\qquad + pq\Big(494(p-q)^4 + 5pq(144p^2 - 275pq + 144q^2)\Big)\Big\}\Big] \geqq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= p^3q^3(p+q)(2p^6+4p^5q-5p^4q^2+p^3q^3-5p^2q^4+4pq^5+2q^6) \\
&= p^3q^3(p+q)\Big[2(p-q)^6+pq(16p^4-35p^3q+41p^2q^2-35pq^3+16q^4)\Big] \\
&= p^3q^3(p+q)\Big[2(p-q)^6+pq\Big\{16(p-q)^4+pq(29p^2-55pq+29q^2)\Big\}\Big] \geqq 0
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&64Aa^{12}+16Ba^{11}+16Ca^{10}+20Da^9+3Ea^8+2Fa^7+Ga^6 \\
&+2Ha^5+Ia^4+2Ja^3+Ka^2+2La+M \geqq 0
\end{aligned}
$$

は成り立つ． ■

3　練習問題 B

問題 47　x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^3+y^3+z^3+2(x^2y+y^2z+z^2x) \geqq 3(xy^2+yz^2+zx^2).$$

解　$x = \min(x, y, z)$ と仮定して，$m = y-x \geqq 0$, $n = z-x \geqq 0$ とおく．$y = x+m$, $z = x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}&x^3+(x+m)^3+(x+n)^3+2\left[x^2(x+m)+(x+m)^2(x+n)+(x+n)^2x\right]\\&\geqq 3\left[x(x+m)^2+(x+m)(x+n)^2+(x+n)x^2\right]\\\iff &2(m^2-mn+n^2)x+m^3+2m^2n-3mn^2+n^3 \geqq 0.\end{aligned}$$

この不等式を，$2Ax+B \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$B = m^3+2m^2n-3mn^2+n^3 = m(m-n)^2+n(2m-n)^2 \geqq 0.$$

したがって，すべての正の数 x に対して $2Ax+B \geqq 0$ は成り立つ．■

[注]　CD3 定理を使うと次のように解ける．

x, y, z が負でない実数のとき，次の不等式を証明する．

$$x^3+y^3+z^3+2(x^2y+y^2z+z^2x) \geqq 3(xy^2+yz^2+zx^2).$$

$x = y = z = 1$ のとき，不等式は成り立つから，CD3 定理より $z = 0$ のとき成り立つことを示せばよい．このとき，不等式は

$$x^3+y^3+2x^2y \geqq 3xy^2$$

となる．

$x \geqq y$ のとき $x^3+y^3+2x^2y \geqq x^3+2x^2y \geqq xy^2+2xy^2 = 3xy^2$.

$y > x$ のとき $x^3+y^3+2x^2y = x^3+(y-x)^3-x^2(y-x)$ と変形して，相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+(y-x)^3 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}x^2(y-x) \geqq x^2(y-x).$$

よって，$x^3+y^3+2x^2y = x^3+(y-x)^3-x^2(y-x) \geqq 0$.　□

問題 48　x, y, z が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^4+y^4+z^4+5(x^3y+y^3z+z^3x) \geqq 6(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

解　$x=\min(x,y,z)$ と仮定して，$m=y-x \geqq 0,\ n=z-x \geqq 0$ とおく．$y=x+m,\ z=x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&x^4+(x+m)^4+(x+n)^4+5\left[x^3(x+m)+(x+m)^3(x+n)+(x+n)^3x\right]\\
&\geqq 6\left[x^2(x+m)^2+(x+m)^2(x+n)^2+(x+n)^2x^2\right]\\
\iff &9(m^2-mn+n^2)x^2+3(3m^3+m^2n-4mn^2+3n^3)x\\
&\quad +m^4+5m^3n-6m^2n^2+n^4 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$9Ax^2+3Bx+C \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}
B&=3m(m-n)^2+n(7m^2-7mn+3n^2) \geqq 0,\\
C&=(m-n)^4+mn(3m-2n)^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

したがって，すべての負でない実数 x に対して $9Ax^2+3Bx+C \geqq 0$ は成り立つ．■

問題 49　x, y, z が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^3+y^3+z^3+\frac{8}{3}xyz \geqq \frac{17}{9}(x^2y+y^2z+z^2x).$$

解 1　$x=\min(x,y,z)$ と仮定して，$m=y-x \geqq 0,\ n=z-x \geqq 0$ とおく．$y=x+m,\ z=x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&9\left[x^3+(x+m)^3+(x+n)^3\right]+24x(x+m)(x+n)\\
&\geqq 17\left[x^2(x+m)+(x+m)^2(x+n)+(x+n)^2x\right]\\
\iff &10(m^2-mn+n^2)x+9m^3-17m^2n+9n^3 \geqq 0.
\end{aligned}$$

$10(m^2-mn+n^2)x \geqq 0$ であるから

$$9m^3-17m^2n+9n^3 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示せばよい．

$n=0$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

$n \neq 0$ のとき，$t=\dfrac{m}{n}$ とおき，$t \geqq 0$ のとき

$$9t^3-17t^2+9 \geqq 0$$

を示せばよい．

$f(t) = 9t^3 - 17t^2 + 9 \quad (t \geqq 0)$ とおくと，$f'(t) = 27t^2 - 34t$.

$f'(t) = 0$ を解くと $t = 0, \dfrac{34}{27}$.

t	0		$\frac{34}{27}$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって，$f(t)$ は $t = \dfrac{34}{27}$ で最小値 $f\left(\dfrac{34}{27}\right) = \dfrac{31}{2187}$ をとるから，$f(t) > 0$. ■

解 2　x, y, z が負でない実数のとき，次の不等式が成り立つことを証明する．

$$x^3+y^3+z^3+\frac{8}{3}xyz \geqq \frac{17}{9}(x^2y+y^2z+z^2x).$$

$x=y=z=1$ のとき，不等式は成り立つから，CD3 定理より $z=0$ のとき成り立つことを示せばよい．このとき，不等式は

$$x^3+y^3 \geqq \frac{17}{9}x^2y$$

となる．

相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+y^3 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{x^6y^3}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}x^2y.$$

したがって

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{4}} > \frac{17}{9} \quad \text{すなわち} \quad \frac{27}{4} > \left(\frac{17}{9}\right)^3$$

を示せばよい．

$$27\cdot 9^3 - 4\cdot 17^3 = 19683 - 19652 = 31 > 0$$

より $\dfrac{27}{4} > \left(\dfrac{17}{9}\right)^3$ は成り立つ．■

問題 50　(Vasile Cîrtoaje)

x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \geqq 3(x^3y+y^3z+z^3x).$$

解　$x = \min(x, y, z)$ と仮定して，$m = y - x \geqq 0,\ n = z - x \geqq 0$ とおく．$y = x + m,\ z = x + n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned} &\left[x^2+(x+m)^2+(x+n)^2\right]^2 \geqq 3\left[x^3(x+m)+(x+m)^3(x+n)+(x+n)^3x\right] \\ \Longleftrightarrow\ &(m^2-mn+n^2)x^2+(m^3-5m^2n+4mn^2+n^3)x+m^4-3m^3n+2m^2n^2+n^4 \\ &\geqq 0. \qquad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

$m = n = 0$ のときは，明らかに $(*)$ は成り立つから，$m \neq 0$ または $n \neq 0$ とする．

$(*)$ の左辺の判別式 D は

$$\begin{aligned} D &= (m^3-5m^2n+4mn^2+n^3)^2-4(m^2-mn+n^2)(m^4-3m^3n+2m^2n^2+n^4) \\ &= -3(m^6-2m^5n-3m^4n^2+6m^3n^3+2m^2n^4-4mn^5+n^6) \\ &= -3(m^3-m^2n-2mn^2+n^3)^2 \leqq 0. \end{aligned}$$

$m^2 - mn + n^2 > 0$ であるから，すべての実数 x に対して $(*)$ は成り立つ．　■

問題 51　(Vasile Cîrtoaje)

x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^4+y^4+z^4+xy^3+yz^3+zx^3 \geqq 2(x^3y+y^3z+z^3x).$$

解　$x=\min(x,y,z)$ と仮定して，$m=y-x \geqq 0,\ n=z-x \geqq 0$ とおく．$y=x+m,\ z=x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&x^4+(x+m)^4+(x+n)^4+x(x+m)^3+(x+m)(x+n)^3+(x+n)x^3 \\
&\geqq 2\left[x^3(x+m)+(x+m)^3(x+n)+(x+n)^3x\right] \\
\iff &3(m^2-mn+n^2)x^2+3(m^3-2m^2n+mn^2+n^3)x+m^4-2m^3n+mn^3+n^4 \\
&\geqq 0. \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

$m=n=0$ のときは，明らかに $(*)$ は成り立つから，$m \fallingdotseq 0$ または $n \fallingdotseq 0$ とする．

$(*)$ の左辺の判別式 D は

$$\begin{aligned}
D &= 9(m^3-2m^2n+mn^2+n^3)^2-12(m^2-mn+n^2)(m^4-2m^3n+mn^3+n^4) \\
&= -3(m^6-6m^4n^2+2m^3n^3+9m^2n^4-6mn^5+n^6) \\
&= -3(m^3-3mn^2+n^3)^2 \leqq 0.
\end{aligned}$$

$m^2-mn+n^2>0$ であるから，すべての実数 x に対して $(*)$ は成り立つ．■

[注]　x, y, z が実数のとき，問題 51 から

$$y^4+x^4+z^4+yx^3+xz^3+zy^3 \geqq 2(y^3x+x^3z+z^3y)$$

すなわち

$$x^4+y^4+z^4+x^3y+y^3z+z^3x \geqq 2(xy^3x+yz^3+zx^3)$$

が成り立つ．

問題 52　x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^4+y^4+z^4+17(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geqq 6(x+y+z)(x^2y+y^2z+z^2x).$$

解　$x = \min(x, y, z)$ と仮定して，$m = y-x \geqq 0,\ n = z-x \geqq 0$ とおく．$y = x+m,\ z = x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&x^4+(x+m)^4+(x+n)^4+17\Big[x^2(x+m)^2+(x+m)^2(x+n)^2+(x+n)^2x^2\Big]\\
&\geqq 6(3x+m+n)\left[x^2(x+m)+(x+m)^2(x+n)+(x+n)^2x\right]\\
\Longleftrightarrow\ &4(m^2-mn+n^2)x^2-2(m^3+m^2n-8mn^2+n^3)x+m^4-6m^3n+11m^2n^2+n^4\\
&\geqq 0. \qquad\qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

$m=n=0$ のときは，明らかに $(*)$ は成り立つから，$m \fallingdotseq 0$ または $n \fallingdotseq 0$ とする．

$(*)$ の左辺の判別式 D は

$$\begin{aligned}
D &= 4(m^3+m^2n-8mn^2+n^3)^2-16(m^2-mn+n^2)(m^4-6m^3n+11m^2n^2+n^4)\\
&= -12(m^6-10m^5n+29m^4n^2-18m^3n^3-6m^2n^4+4mn^5+n^6)\\
&= -12(m^3-5m^2n+2mn^2+n^3)^2 \leqq 0.
\end{aligned}$$

$m^2-mn+n^2>0$ であるから，すべての実数 x に対して $(*)$ は成り立つ．　■

問題 53　(Vasile Cîrtoaje)

x, y, z が実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3(x^4+y^4+z^4-x^3y-y^3z-z^3x) \geqq x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2.$$

解　$x=\min(x,y,z)$ と仮定して，$m=y-x \geqq 0,\ n=z-x \geqq 0$ とおく．$y=x+m,\ z=x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&3\Big[x^4+(x+m)^4+(x+n)^4-x^3(x+m)-(x+m)^3(x+n)-(x+n)^3x\Big]\\
&\geqq x^2(m-n)^2+(x+m)^2n^2+(x+n)^2m^2\\
\iff\ &7(m^2-mn+n^2)x^2+(9m^3-11m^2n-2mn^2+9n^3)x\\
&\quad+3m^4-3m^3n-2m^2n^2+3n^4\\
&\geqq 0. \qquad\cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

$m=n=0$ のときは，明らかに $(*)$ は成り立つから，$m \neq 0$ または $n \neq 0$ とする．

$(*)$ の左辺の判別式 D は

$$\begin{aligned}
D&=(9m^3-11m^2n-2mn^2+9n^3)^2-4\cdot 7(m^2-mn+n^2)(3m^4-3m^3n-2m^2n^2+3n^4)\\
&=-3(m^6+10m^5n+9m^4n^2-78m^3n^3+74m^2n^4-16mn^5+n^6)\\
&=-3(m^3+5m^2n-8mn^2+n^3)^2 \leqq 0.
\end{aligned}$$

$m^2-mn+n^2>0$ であるから，すべての実数 x に対して $(*)$ は成り立つ．　■

問題 54　(Pham Kim Hung)

x, y, z が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^4+y^4+z^4-xyz(x+y+z) \geqq 2\sqrt{2}(x^3y+y^3z+z^3x-xy^3-yz^3-zx^3).$$

解　$x=\min(x,y,z)$ と仮定して，$m=y-x \geqq 0,\ n=z-x \geqq 0$ とおく．$y=x+m,\ z=x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&x^4+(x+m)^4+(x+n)^4-x(x+m)(x+n)(3x+m+n)\\
&\geqq 2\sqrt{2}\Big[x^3(x+m)+(x+m)^3(x+n)+(x+n)^3x\\
&\quad -x(x+m)^3-(x+m)(x+n)^3-(x+n)x^3\Big]\\
\iff &5(m^2-mn+n^2)x^2+\Big[4m^3-(6\sqrt{2}+1)m^2n+(6\sqrt{2}-1)mn^2+4n^3\Big]x\\
&\quad +m^4-2\sqrt{2}m^3n+2\sqrt{2}mn^3+n^4 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$5Ax^2+Bx+C \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}
B &= \Big[\underbrace{4m^2-(6\sqrt{2}+1)mn+(6\sqrt{2}-1)n^2}_{(6\sqrt{2}+1)^2-4\cdot4(6\sqrt{2}-1)=89-84\sqrt{2}<0}\Big]m+4n^3 \geqq 0,\\
C &= (m^2-\sqrt{2}mn-n^2)^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

したがって，すべての負でない実数 x に対して $5Ax^2+Bx+C \geqq 0$ は成り立つ．　■

問題 55　x, y, z が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^4+y^4+z^4+\frac{5}{4}(x^3y+y^3z+z^3x) \geqq \frac{9}{4}(xy^3+yz^3+zx^3).$$

解　$x=\min(x,y,z)$ と仮定して，$m=y-x \geqq 0$，$n=z-x \geqq 0$ とおく．$y=x+m$，$z=x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&4\left[x^4+(x+m)^4+(x+n)^4\right]+5\left[x^3(x+m)+(x+m)^3(x+n)+(x+n)^3x\right]\\
&\geqq 9\left[x(x+m)^3+(x+m)(x+n)^3+(x+n)x^3\right]\\
\iff &12(m^2-mn+n^2)x^2+3(4m^3+5m^2n-9mn^2+4n^3)x\\
&\quad +4m^4+5m^3n-9mn^3+4n^4 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$12Ax^2+3Bx+C \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$B=4m(m-n)^2+n(13m^2-13mn+4n^2) \geqq 0,$$
$$C=4(m-n)^4+mn(21m^2-24mn+7n^2) \geqq 0.$$

したがって，すべての負でない実数 x に対して $12Ax^2+3Bx+C \geqq 0$ は成り立つ．　■

問題 56　x, y, z が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^4+y^4+z^4-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2 \geqq 2(x^3y+y^3z+z^3x-xy^3-yz^3-zx^3).$$

解　$x=\min(x,y,z)$ と仮定して，$m=y-x \geqq 0$，$n=z-x \geqq 0$ とおく．$y=x+m$，$z=x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&x^4+(x+m)^4+(x+n)^4-x^2(x+m)^2-(x+m)^2(x+n)^2\\
&\geqq 2\Big[x^3(x+m)+(x+m)^3(x+n)+(x+n)^3x\\
&\quad -x(x+m)^3-(x+m)(x+n)^3-(x+n)x^3\Big]\\
\iff &4(m^2-mn+n^2)x^2+4(m^3-2m^2n+mn^2+n^3)x\\
&\quad +m^4-2m^3n-m^2n^2+2mn^3+n^4 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$4Ax^2+4Bx+C \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$B=m^3-2m^2n+mn^2+n^3=m(m-n)^2+n^3 \geqq 0,$$
$$C=(m^2-mn-n^2)^2 \geqq 0.$$

したがって，すべての負でない実数 x に対して $4Ax^2+4Bx+C \geqq 0$ は成り立つ．　■

問題 57 x, y, z が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$x^6+y^6+z^6+x^2y^2z^2 \geqq \frac{2}{3}\Big[x^5(y+z)+y^5(z+x)+z^5(x+y)\Big].$$

解 $x=\min(x,y,z)$ と仮定して，$m=y-x \geqq 0,\ n=z-x \geqq 0$ とおく．$y=x+m,\ z=x+n$ を証明すべき不等式に代入すると

$$\begin{aligned}
&3\Big[x^6+(x+m)^6+(x+n)^6+x^2(x+m)^2(x+n)^2\Big]\\
&\geqq 2\Big[x^5(2x+m+n)+(x+m)^5(2x+n)+(x+n)^5(2x+m)\Big]\\
\Longleftrightarrow\ &8(m^2-mn+n^2)x^4+2(10m^3-7m^2n-7mn^2+10n^3)x^3\\
&\quad+(25m^4-20m^3n+3m^2n^2-20mn^3+25n^4)x^2\\
&\quad\quad+2(7m^5-5m^4n-5mn^4+7n^5)x\\
&\quad\quad\quad+3m^6-2m^5n-2mn^5+3n^6 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$8Ax^4+2Bx^3+Cx^2+2Dx+E \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0$,

$$\begin{aligned}
B&=10m^3-7m^2n-7mn^2+10n^3\\
&=(m+n)(10m^2-17mn+10n^2) \geqq 0,\\
C&=25m^4-20m^3n+3m^2n^2-20mn^3+25n^4\\
&=25(m-n)^4+mn(80m^2-147mn+80n^2) \geqq 0,\\
D&=7m^5-5m^4n-5mn^4+7n^5\\
&=(m+n)(7m^4-12m^3n+12m^2n^2-12mn^3+7n^4)\\
&=(m+n)\Big[7(m-n)^4+2mn(8m^2-15mn+8n^2)\Big] \geqq 0,\\
E&=3m^6-2m^5n-2mn^5+3n^6\\
&=3(m-n)^6+mn(16m^4-45m^3n+60m^2n^2-45mn^3+16n^4)\\
&=3(m-n)^6+mn\Big[16(m-n)^4+mn(19m^2-36mn+19n^2)\Big] \geqq 0.
\end{aligned}$$

したがって，すべての負でない実数 x に対して $8Ax^4+2Bx^3+Cx^2+2Dx+E \geqq 0$ は成り立つ． ■

問題 58　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\,.$$

解　証明すべき不等式は，$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geqq 0$ をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\frac{t^{2a}}{2a}+\frac{t^{2b}}{2b}+\frac{t^{2c}}{2c}-\frac{t^{a+b}}{a+b}-\frac{t^{b+c}}{b+c}-\frac{t^{c+a}}{c+a} \geqq 0.$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$f(t)=\frac{t^{2a}}{2a}+\frac{t^{2b}}{2b}+\frac{t^{2c}}{2c}-\frac{t^{a+b}}{a+b}-\frac{t^{b+c}}{b+c}-\frac{t^{c+a}}{c+a} \quad (t \geqq 0)$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned} f'(t) &= t^{2a-1}+t^{2b-1}+t^{2c-1}-t^{a+b-1}-t^{b+c-1}-t^{c+a-1} \\ &= \left(t^{a-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(t^{b-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(t^{c-\frac{1}{2}}\right)^2-t^{a-\frac{1}{2}}t^{b-\frac{1}{2}}-t^{b-\frac{1}{2}}t^{c-\frac{1}{2}}-t^{c-\frac{1}{2}}t^{a-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{2}}$，$y=t^{b-\frac{1}{2}}$，$z=t^{c-\frac{1}{2}}$ とおくと，不等式 $f'(t) \geqq 0$ は

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geqq 0$$

となる．これは

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geqq 0$$

より成り立つ．

$f(t)$ は $t \geqq 0$ で単調増加であるから，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(0)=0$.
よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．　■

[注]　別解については，初等的な不等式 I の問題 160 参照．

問題 59 (Gabriel Dospinescu)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\\ \geqq\ &\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{2c+a}+\frac{1}{c+2a}.\end{aligned}$$

解 証明すべき不等式は，Schur の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}&\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+\frac{3t^{a+b+c}}{a+b+c}\\ &-\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{a+2b}}{a+2b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{b+2c}}{b+2c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}+\frac{t^{c+2a}}{c+2a}\right)\geqq 0.\end{aligned}$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+\frac{3t^{a+b+c}}{a+b+c}\\ &-\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{a+2b}}{a+2b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{b+2c}}{b+2c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}+\frac{t^{c+2a}}{c+2a}\right)\quad(t\geqq 0)\end{aligned}$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t)\geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}f'(t)=&\,t^{3a-1}+t^{3b-1}+t^{3c-1}+3t^{a+b+c-1}\\ &-\left(t^{2a+b-1}+t^{a+2b-1}+t^{2b+c-1}+t^{b+2c-1}+t^{2c+a-1}+t^{c+2a-1}\right).\end{aligned}$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{3}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{3}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{3}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t)\geqq 0$ は

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geqq x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2$$

となる．これは，Schur の不等式より成り立つ．

$f(t)$ は $t\geqq 0$ で単調増加であるから，$t\geqq 0$ のとき，$f(t)\geqq f(0)=0$．
よって，$f(1)\geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる． ■

問題 60　(Gabriel Dospinescu)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+2\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right)\\&\geqq 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right).\end{aligned}$$

解　証明すべき不等式は，問題 47 の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}&\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+2\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}\right)\\&-3\left(\frac{t^{a+2b}}{a+2b}+\frac{t^{b+2c}}{b+2c}+\frac{t^{c+2a}}{c+2a}\right)\geqq 0.\end{aligned}$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+2\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}\right)\\&-3\left(\frac{t^{a+2b}}{a+2b}+\frac{t^{b+2c}}{b+2c}+\frac{t^{c+2a}}{c+2a}\right)\quad (t\geqq 0)\end{aligned}$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}f'(t)=&t^{3a-1}+t^{3b-1}+t^{3c-1}+2\left(t^{2a+b-1}+t^{2b+c-1}+t^{2c+a-1}\right)\\&-3\left(t^{a+2b-1}+t^{b+2c-1}+t^{c+2a-1}\right).\end{aligned}$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{3}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{3}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{3}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t) \geqq 0$ は

$$x^3+y^3+z^3+2(x^2y+y^2z+z^2x) \geqq 3(xy^2+yz^2+zx^2)$$

となる．これは，問題 47 より成り立つ．

$f(t)$ は $t \geqq 0$ で単調増加であるから，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(0)=0$.
よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．　■

問題 61 (Pham Kim Hung)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{8}{a+b+c} \geqq \frac{17}{3}\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right).$$

解　証明すべき不等式は，問題 49 の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+\frac{8t^{a+b+c}}{3(a+b+c)}-\frac{17}{9}\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}\right) \geqq 0.$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$f(t)=\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+\frac{8t^{a+b+c}}{3(a+b+c)}-\frac{17}{9}\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}\right) \quad (t \geqq 0)$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ を示す．

$$f'(t)=t^{3a-1}+t^{3b-1}+t^{3c-1}+\frac{8}{3}(t^{a+b+c-1})-\frac{17}{9}\left(t^{2a+b-1}+t^{2b+c-1}+t^{2c+a-1}\right).$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{3}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{3}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{3}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t) \geqq 0$ は

$$x^3+y^3+z^3+\frac{8}{3}xyz \geqq \frac{17}{9}(x^2y+y^2z+z^2x)$$

となる．これは，問題 49 より成り立つ．

$f(t)$ は $t \geqq 0$ で単調増加であるから，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(0)=0$.

よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる． ■

問題 62　(Gabriel Dospinescu)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\\ &\geqq 3\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}\right).\end{aligned}$$

解　証明すべき不等式は，問題 50 の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}&\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{4b}}{4b}+\frac{t^{4c}}{4c}+\frac{t^{2(a+b)}}{a+b}+\frac{t^{2(b+c)}}{b+c}+\frac{t^{2(c+a)}}{c+a}\\ &-3\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)\geqq 0.\end{aligned}$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{4b}}{4b}+\frac{t^{4c}}{4c}+\frac{t^{2(a+b)}}{a+b}+\frac{t^{2(b+c)}}{b+c}+\frac{t^{2(c+a)}}{c+a}\\ &-3\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)\quad(t\geqq 0)\end{aligned}$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t)\geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}f'(t)=&\,t^{4a-1}+t^{4b-1}+t^{4c-1}+2\left(t^{2a+2b-1}+t^{2b+2c-1}+t^{2c+2a-1}\right)\\ &-3\left(t^{3a+b-1}+t^{3b+c-1}+t^{3c+a-1}\right).\end{aligned}$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{4}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{4}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{4}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t)\geqq 0$ は

$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\geqq 3(x^3y+y^3z+z^3x)$$

すなわち

$$(x^2+y^2+z^2)^2\geqq 3(x^3y+y^3z+z^3x)$$

となる．これは，問題 50 より成り立つ．

$f(t)$ は $t\geqq 0$ で単調増加であるから，$t\geqq 0$ のとき，$f(t)\geqq f(0)=0$.
よって，$f(1)\geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．■

問題 63　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}$$
$$\geqq 4\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}-\frac{1}{a+3b}-\frac{1}{b+3c}-\frac{1}{c+3a}\right).$$

解　証明すべき不等式は，問題 56 の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}&\frac{t^{4a}}{2a}+\frac{t^{4b}}{2b}+\frac{t^{4c}}{2c}-\frac{t^{2(a+b)}}{a+b}-\frac{t^{2(b+c)}}{b+c}-\frac{t^{2(c+a)}}{c+a}\\&-4\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}-\frac{t^{a+3b}}{a+3b}-\frac{t^{b+3c}}{b+3c}-\frac{t^{c+3a}}{c+3a}\right)\geqq 0.\end{aligned}$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{t^{4a}}{2a}+\frac{t^{4b}}{2b}+\frac{t^{4c}}{2c}-\frac{t^{2(a+b)}}{a+b}-\frac{t^{2(b+c)}}{b+c}-\frac{t^{2(c+a)}}{c+a}\\&-4\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}-\frac{t^{a+3b}}{a+3b}-\frac{t^{b+3c}}{b+3c}-\frac{t^{c+3a}}{c+3a}\right)\quad(t\geqq 0)\end{aligned}$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t)\geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}f'(t)=&\,2(t^{4a-1}+t^{4b-1}+t^{4c-1})-2\left(t^{2a+2b-1}+t^{2b+2c-1}+t^{2c+2a-1}\right)\\&-4\left(t^{3a+b-1}+t^{3b+c-1}+t^{3c+a-1}-t^{a+3b-1}-t^{b+3c-1}-t^{c+3a-1}\right).\end{aligned}$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{4}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{4}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{4}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t)\geqq 0$ は

$$x^4+y^4+z^4-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2\geqq 2(x^3y+y^3z+z^3x-xy^3-yz^3-zx^3)$$

となる．これは，問題 56 より成り立つ．

$f(t)$ は $t\geqq 0$ で単調増加であるから，$t\geqq 0$ のとき，$f(t)\geqq f(0)=0$.

よって，$f(1)\geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．■

問題 64　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}$$
$$\geqq 2\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}\right).$$

解　証明すべき不等式は，問題 51 の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{4b}}{4b}+\frac{t^{4c}}{4c}+\frac{t^{a+3b}}{a+3b}+\frac{t^{b+3c}}{b+3c}+\frac{t^{c+3a}}{c+3a}$$
$$-2\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)\geqq 0.$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$f(t)=\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{4b}}{4b}+\frac{t^{4c}}{4c}+\frac{t^{a+3b}}{a+3b}+\frac{t^{b+3c}}{b+3c}+\frac{t^{c+3a}}{c+3a}$$
$$-2\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)\quad (t\geqq 0)$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t)\geqq 0$ を示す．

$$f'(t)=t^{4a-1}+t^{4b-1}+t^{4c-1}+t^{a+3b-1}+t^{b+3c-1}+t^{c+3a-1}$$
$$-2\left(t^{3a+b-1}+t^{3b+c-1}+t^{3c+a-1}\right).$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{4}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{4}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{4}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t)\geqq 0$ は

$$x^4+y^4+z^4+xy^3+yz^3+zx^3\geqq 2(x^3y+y^3z+z^3x)$$

となる．これは，問題 51 より成り立つ．

$f(t)$ は $t\geqq 0$ で単調増加であるから，$t\geqq 0$ のとき，$f(t)\geqq f(0)=0$.
よって，$f(1)\geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．　■

問題 65　(Pham Kim Hung)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{5}{3a+b}+\frac{5}{3b+c}+\frac{5}{3c+a}$$
$$\geqq \frac{9}{a+3b}+\frac{9}{b+3c}+\frac{9}{c+3a}.$$

解　証明すべき不等式は，問題 55 の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{4b}}{4b}+\frac{t^{4c}}{4c}+\frac{5}{4}\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)$$
$$-\frac{9}{4}\left(\frac{t^{a+3b}}{a+3b}+\frac{t^{b+3c}}{b+3c}+\frac{t^{c+3a}}{c+3a}\right) \geqq 0.$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$f(t)=\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{4b}}{4b}+\frac{t^{4c}}{4c}+\frac{5}{4}\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)$$
$$-\frac{9}{4}\left(\frac{t^{a+3b}}{a+3b}+\frac{t^{b+3c}}{b+3c}+\frac{t^{c+3a}}{c+3a}\right) \quad (t \geqq 0)$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ を示す．

$$f'(t)=t^{4a-1}+t^{4b-1}+t^{4c-1}+\frac{5}{4}\left(t^{3a+b-1}+t^{3b+c-1}+t^{3c+a-1}\right)$$
$$-\frac{9}{4}\left(t^{a+3b-1}+t^{b+3c-1}+t^{c+3a-1}\right).$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{4}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{4}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{4}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t) \geqq 0$ は

$$x^4+y^4+z^4+\frac{5}{4}(x^3y+y^3z+z^3x) \geqq \frac{9}{4}(xy^3+yz^3+zx^3)$$

となる．これは，問題 55 より成り立つ．

$f(t)$ は $t \geqq 0$ で単調増加であるから，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(0)=0$.

よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．　■

問題 66　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}+\frac{36}{2a+b}+\frac{36}{2b+c}+\frac{36}{2c+a} \geqq \frac{45}{a+2b}+\frac{45}{b+2c}+\frac{45}{c+2a}+\frac{9}{a+b+c}.$$

解　証明すべき不等式は，問題 4 の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$4\left(\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}\right)+12\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}\right) - 15\left(\frac{t^{a+2b}}{a+2b}+\frac{t^{b+2c}}{b+2c}+\frac{t^{c+2a}}{c+2a}\right)-\frac{3t^{a+b+c}}{a+b+c} \geqq 0.$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$f(t)=4\left(\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}\right)+12\left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}\right) - 15\left(\frac{t^{a+2b}}{a+2b}+\frac{t^{b+2c}}{b+2c}+\frac{t^{c+2a}}{c+2a}\right)-\frac{3t^{a+b+c}}{a+b+c} \quad (t \geqq 0)$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ を示す．

$$f'(t)=4(t^{3a-1}+t^{3b-1}+t^{3c-1})+12\left(t^{2a+b-1}+t^{2b+c-1}+t^{2c+a-1}\right) - 15\left(t^{a+2b-1}+t^{b+2c-1}+t^{c+2a-1}\right)-3t^{a+b+c-1}.$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{3}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{3}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{3}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t) \geqq 0$ は

$$4(x^3+y^3+z^3)+12(x^2y+y^2z+z^2x) \geqq 15(xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz$$

すなわち

$$4(x+y+z)^3 \geqq 27(xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz$$

となる．これは，問題 4 より成り立つ．

$f(t)$ は $t \geqq 0$ で単調増加であるから，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(0)=0$.

よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．■

問題 67　a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{8}{a+b+c+d}$$
$$\geqq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d}+\frac{1}{d+a}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}\right).$$

解　証明すべき不等式は，Turkevici の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $s \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\frac{s^{4a}}{4a}+\frac{s^{4b}}{4b}+\frac{s^{4c}}{4c}+\frac{s^{4d}}{4d}+\frac{2s^{a+b+c+d}}{a+b+c+d}$$
$$-\left(\frac{s^{2a+2b}}{2a+2b}+\frac{s^{2b+2c}}{2b+2c}+\frac{s^{2c+2d}}{2c+2d}+\frac{s^{2d+2a}}{2d+2a}+\frac{s^{2a+2c}}{2a+2c}+\frac{s^{2b+2d}}{2b+2d}\right)\geqq 0.$$

$s=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$f(s)=\frac{s^{4a}}{4a}+\frac{s^{4b}}{4b}+\frac{s^{4c}}{4c}+\frac{s^{4d}}{4d}+\frac{2s^{a+b+c+d}}{a+b+c+d}$$
$$-\left(\frac{s^{2a+2b}}{2a+2b}+\frac{s^{2b+2c}}{2b+2c}+\frac{s^{2c+2d}}{2c+2d}+\frac{s^{2d+2a}}{2d+2a}+\frac{s^{2a+2c}}{2a+2c}+\frac{s^{2b+2d}}{2b+2d}\right)\quad (t \geqq 0)$$

とおき，まず，$s>0$ のとき，$f'(s) \geqq 0$ を示す．

$$f'(s)=s^{4a-1}+s^{4b-1}+s^{4c-1}+s^{4d-1}+2s^{a+b+c+d-1}$$
$$-\left(s^{2a+2b-1}+s^{2b+2c-1}+s^{2c+2d-1}+s^{2d+2a-1}+s^{2a+2c-1}+s^{2b+2d-1}\right).$$

$s>0$ のとき，$x=s^{a-\frac{1}{4}}>0,\ y=s^{b-\frac{1}{4}}>0,\ z=s^{c-\frac{1}{4}}>0,\ t=s^{d-\frac{1}{4}}>0$ とおくと，不等式 $f'(s) \geqq 0$ は

$$x^4+y^4+z^4+t^4+2xyzt \geqq x^2y^2+y^2z^2+z^2t^2+t^2x^2+x^2z^2+y^2t^2$$

となる．これは，Turkevici の不等式より成り立つ．

$f(s)$ は $s \geqq 0$ で単調増加であるから，$s \geqq 0$ のとき，$f(s) \geqq f(0)=0$.

よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる．　■

問題 68　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+b+c}$$
$$\geqq 4\left(\frac{1}{5a+b}+\frac{1}{5a+c}+\frac{1}{5b+a}+\frac{1}{5b+c}+\frac{1}{5c+a}+\frac{1}{5c+b}\right).$$

解　証明すべき不等式は，問題 57 の不等式をうまく使うことによって得られる．

実際，すべての実数 $t \geqq 0$ に対して，次のより一般的な不等式が成り立つことを示す．

$$\frac{t^{6a}}{6a}+\frac{t^{6b}}{6b}+\frac{t^{6c}}{6c}+\frac{t^{2a+2b+2c}}{2a+2b+2c}$$
$$-\frac{2}{3}\left(\frac{t^{5a+b}}{5a+b}+\frac{t^{5a+c}}{5a+c}+\frac{t^{5b+a}}{5b+a}+\frac{t^{5b+c}}{5b+c}+\frac{t^{5c+a}}{5c+a}+\frac{t^{5c+b}}{5c+b}\right) \geqq 0.$$

$t=1$ に対して，この不等式は，証明すべき不等式となる．

$$f(t)=\frac{t^{6a}}{6a}+\frac{t^{6b}}{6b}+\frac{t^{6c}}{6c}+\frac{t^{2a+2b+2c}}{2a+2b+2c}$$
$$-\frac{2}{3}\left(\frac{t^{5a+b}}{5a+b}+\frac{t^{5a+c}}{5a+c}+\frac{t^{5b+a}}{5b+a}+\frac{t^{5b+c}}{5b+c}+\frac{t^{5c+a}}{5c+a}+\frac{t^{5c+b}}{5c+b}\right) \quad (t \geqq 0)$$

とおき，まず，$t>0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ を示す．

$$f'(t)=t^{6a-1}+t^{6b-1}+t^{6c-1}+t^{2a+2b+2c-1}$$
$$-\frac{2}{3}\left(t^{5a+b-1}+t^{5a+c-1}+t^{5b+a-1}+t^{5b+c-1}+t^{5c+a-1}+t^{5c+b-1}\right).$$

$t>0$ のとき，$x=t^{a-\frac{1}{6}}>0,\ y=t^{b-\frac{1}{6}}>0,\ z=t^{c-\frac{1}{6}}>0$ とおくと，不等式 $f'(t) \geqq 0$ は

$$x^6+y^6+z^6+x^2y^2z^2 \geqq \frac{2}{3}\left[x^5(x+y)+y^5(z+x)+z^5(x+y)\right]$$

となる．これは，問題 57 より成り立つ．

$f(t)$ は $t \geqq 0$ で単調増加であるから，$t \geqq 0$ のとき，$f(t) \geqq f(0)=0$.

よって，$f(1) \geqq 0$ より証明すべき不等式が得られる． ■

問題 69　a, b, c は正の実数で $a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{9}{a+b+c}.$$

解　証明すべき不等式は同次化して

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{9}{a+b+c}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

すなわち

$$(a+b+c)^2(ab^2+bc^2+ca^2)^2 \geqq 27(a^2+b^2+c^2)(abc)^2 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&(3a+p+q)^2\Big[a(a+p)^2+(a+p)(a+q)^2+(a+q)a^2\Big]a^2(a+p)^2(a+q)^2 \\
&\geqq 27\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]^2 a^2(a+p)^2(a+q)^2 \\
\Longleftrightarrow\ &36(p^2-pq+q^2)a^6+54(p^3+pq^2+q^3)a^5 \\
&+3(11p^4+8p^3q+33p^2q^2+38pq^3+11q^4)a^4 \\
&+6(2p^5+p^4q+12p^3q^2+22p^2q^3+11pq^4+2q^5)a^3 \\
&+(p^6+6p^5q+6p^4q^2+74p^3q^3+51p^2q^4+24pq^5+q^6)a^2 \\
&+2(p^5q^2+4p^4q^3+9p^3q^4+7p^2q^5+pq^6)a \\
&+p^4q^4+2p^3q^5+p^2q^6 \\
&\geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 70　(Pham Huu Duc)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a+b+c+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$$

解 1　両辺に $abc(a+b+c)$ をかけた

$$(a+b+c)^2abc+(a+b+c)(ab^3+bc^3+ca^3) \geqq 6(a^2+b^2+c^2)abc \qquad \cdots\cdots(*)$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&(3a+p+q)^2a(a+p)(a+q)\\
&\quad+(3a+p+q)\Big[a(a+p)^3+(a+p)(a+q)^3+(a+q)a^3\Big]\\
&\geqq 6\Big[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\Big]a(a+p)(a+q)\\
\iff &2(p^2-pq+q^2)a^3+(p^3-3p^2q+6pq^2+q^3)a^2\\
&+(p^4-4p^3q+5p^2q^2+2pq^3+q^4)a\\
&+p^2q^3+pq^4\\
&\geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$2Aa^3+Ba^2+Ca+D \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0,\ D \geqq 0$ であるから，$B \geqq 0,\ C \geqq 0$ を示す．

$$B=p^3-3p^2q+6pq^2+q^3=p\underbrace{(p^2-3pq+6q^2)}_{\geqq 0}+q^3 \geqq 0,$$

$$C=p^4-4p^3q+5p^2q^2+2pq^3+q^4=p^2\underbrace{(p^2-4pq+5q^2)}_{\geqq 0}+2pq^3+q^4 \geqq 0. \qquad \blacksquare$$

解 2　両辺から $2(a+b+c)$ を引くと

$$\begin{aligned}
&a+b+c+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\\
\iff &\sum_{cyclic}\left(\frac{a^2}{b}-2a+b\right) \geqq 6\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}-\frac{a+b+c}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{cyclic} \frac{(a-b)^2}{b} \geqq \frac{2}{a+b+c}\left[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\right]$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{cyclic} \frac{(a-b)^2}{b} \geqq \frac{2}{a+b+c}\sum_{cyclic}(a-b)^2$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{cyclic}\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)(a-b)^2 \geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{cyclic}\left(\frac{c+a}{b}-1\right)(a-b)^2 \geqq 0.$$

$$A=\frac{a+b}{c}-1,\ B=\frac{b+c}{a}-1,\ C=\frac{c+a}{b}-1$$

とおくと

$$B+C=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-2 \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-2=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}>0.$$

$$AB+BC+CA=3+\frac{a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)}{abc}$$

と変形できて，Schur の不等式より

$$a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a) \geqq 0.$$

よって，$AB+BC+CA \geqq 3 > 0$.
これらのことを使うと

$$\begin{aligned}
&A(b-c)^2+B(c-a)^2+C(a-b)^2\\
&=A(b-c)^2+B\left\{(a-b)+(b-c)\right\}^2+C(a-b)^2\\
&=(B+C)(a-b)^2+2B(a-b)(b-c)+(A+B)(b-c)^2\\
&=(B+C)\left[(a-b)+\frac{B}{B+C}(b-c)\right]^2+\frac{AB+BC+CA}{B+C}(b-c)^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$ ■

問題 71 (Pham Huu Duc)

a, b, c は負でない実数で，それらのうち 2 つがともに 0 になることはないとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3} \geqq \frac{a+b+c}{2}.$$

解 両辺に $2(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)$ をかけた

$$\begin{aligned} &2a^4(b^3+c^3)(c^3+a^3)+2b^4(c^3+a^3)(a^3+b^3)+2c^4(a^3+b^3)(b^3+c^3) \\ &\geqq (a+b+c)(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) \qquad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

を証明すればよい．

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} &2a^4\Big[(a+p)^3+(a+q)^3\Big]\Big[(a+q)^3+a^3\Big] \\ &\quad +2(a+p)^4\Big[(a+q)^3+a^3\Big]\Big[a^3+(a+p)^3+\Big] \\ &\qquad +2(a+q)^4\Big[a^3+(a+p)^3\Big]\Big[(a+p)^3+(a+q)^3\Big] \\ &\geqq (3a+p+q)\Big[a^3+(a+p)^3\Big]\Big[(a+p)^3+(a+q)^3\Big]\Big[(a+q)^3+a^3\Big] \\ \Longleftrightarrow\ &12(p^2-pq+q^2)a^8+(30p^3+\underbrace{27p^2q-21pq^2+30q^3}_{q(27p^2-21pq+30q^2)\geqq 0})a^7 \\ &+(40p^4+81p^3q+\underbrace{36p^2q^2-31pq^3+40q^4}_{q^2(36p^2-31pq+40q^2)\geqq 0})a^6 \\ &+(30p^5+99p^4q+111p^3q^2-9p^2q^3-9pq^4+30q^5)a^5 \\ &+(12p^6+63p^5q+135p^4q^2+\underbrace{30p^3q^3-15p^2q^4+15pq^5}_{15pq^3(2p^2-pq+q^2)\geqq 0}+12q^6)a^4 \\ &+(2p^7+21p^6q+81p^5q^2+\underbrace{60p^4q^3-20p^3q^4+9p^2q^5}_{p^2q^3(60p^2-20pq+9q^2)\geqq 0}+13pq^6+2q^7)a^3 \\ &+3pq(p^6+8p^5q+13p^4q^2-3p^2q^4+4pq^5+q^6)a^2 \\ &+(3p^7q^2+10p^6q^3+\underbrace{6p^5q^4-6p^4q^5+2p^3q^6}_{2p^3q^4(3p^2-3pq+q^2)\geqq 0}+3p^2q^7)a \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + p^3q^3(p^4 + p^3q - pq^3 + q^4) \\
&\geqq 0. \qquad \cdots\cdots(**)
\end{aligned}
$$

a^5 の係数を D とおくと

$$D = 30p^5 + 99p^4q + 111p^3q^2 - 9p^2q^3 - 9pq^4 + 30q^5.$$

$p \geqq q$ のとき

$$D = 30p^5 + 99p^4q + 92p^3q^2 + \underbrace{(18p^3q^2 - 9p^2q^3 - 9pq^4)}_{9p^2q^2(p-q)+9pq^2(p^2-q^2)\geqq 0} + 30q^5.$$

$p \leqq q$ のとき

$$D = 30p^5 + 99p^4q + 111p^3q^2 + \underbrace{(18q^5 - 9p^2q^3 - 9pq^4)}_{9q^3(q^2-p^2)+9q^4(q-p)\geqq 0} + 12q^5.$$

a^2 の係数を F とおくと

$$
\begin{aligned}
F &= 3pq(p^6 + 8p^5q + 13p^4q^2 - 3p^2q^4 + 4pq^5 + q^6) \\
&= 3pq(p+q)(p^5 + 7p^4q + 6p^3q^2 - 6p^2q^3 + 3pq^4 + q^5) \\
&= 3pq(p+q)\Big[p^5 + 7p^4q + 3pq^2(\underbrace{2p^2 - 2pq + q^2}_{\geqq 0}) + q^5\Big] \geqq 0.
\end{aligned}
$$

定数項は

$$p^3q^3(p^4 + p^3q - pq^3 + q^4) = p^3q^3\Big[(p-q)^4 + pq(5p^2 - 6pq + 3q^2)\Big] \geqq 0.$$

したがって，不等式 $(**)$ は成り立つ． ■

4　練習問題 C

問題 72　(Vietnam TST 2006)

a, b, c が三角形の 3 辺の長さのとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

解　両辺から 9 を引く．

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \\
\iff &(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 9 \geqq 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 9 &= \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}-6 \\
&= \sum_{cyclic}\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-2\right) \\
&= \sum_{cyclic}\frac{(b-c)^2}{bc}, \\
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2} &= \sum_{cyclic}\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right) \\
&= \sum_{cyclic}\frac{a-b+a-c}{2(b+c)} \\
&= \sum_{cyclic}\frac{a-b}{2(b+c)} - \sum_{cyclic}\frac{c-a}{2(b+c)} \\
&= \sum_{cyclic}\frac{a-b}{2(b+c)} - \sum_{cyclic}\frac{a-b}{2(c+a)} \\
&= \sum_{cyclic}\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)} \\
&= \sum_{cyclic}\frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)}
\end{aligned}$$

であるから，証明すべき不等式は

$$\sum_{cyclic}(b-c)^2\left(\frac{1}{bc}-\frac{3}{(c+a)(a+b)}\right)\geqq 0$$

となる．

$$A=\frac{1}{bc}-\frac{3}{(c+a)(a+b)},\ B=\frac{1}{ca}-\frac{3}{(a+b)(b+c)},\ C=\frac{1}{ab}-\frac{3}{(b+c)(c+a)}$$

とおき

$$A(b-c)^2+B(c-a)^2+C(a-b)^2\geqq 0$$

を示せばよい．

　一般性を失うことなく $a\geqq b\geqq c$ と仮定できる．このとき

$$A=\frac{a^2+b(a-c)+c(a-b)}{bc(c+a)(a+b)}>0,$$

$$\begin{aligned}B&=\frac{b^2+c(b-a)+a(b-c)}{ca(a+b)(b+c)}=\frac{b^2-c^2+c(b+c-a)+a(b-c)}{ca(a+b)(b+c)}\\&=\frac{(b-c)(a+b+c)+c(b+c-a)}{ca(a+b)(b+c)}>0\end{aligned}$$

が成り立ち

$$\begin{aligned}A(b-c)^2+B(c-a)^2+C(a-b)^2&\geqq B(a-c)^2+C(a-b)^2\\&\geqq B(a-b)^2+C(a-b)^2\\&=(B+C)(a-b)^2\end{aligned}$$

と変形できるから

$$B+C\geqq 0$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}&B+C\geqq 0\\\iff&\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\geqq\frac{3}{(a+b)(b+c)}+\frac{3}{(b+c)(c+a)}\\\iff&\frac{b+c}{abc}\geqq\frac{3(2a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\\iff&(c+a)(a+b)(b+c)^2\geqq 3(2a+b+c)abc.\qquad\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

$b+c-a=p>0,\ c+a-b=q,\ a+b-c=r>0$ とおくと

$$a=\frac{q+r}{2},\ b=\frac{r+p}{2},\ c=\frac{p+q}{2}.$$

これらの式を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&(p+2q+r)(p+q+2r)(2p+q+r)^2 \geqq 3(2p+3q+3r)(p+q)(q+r)(r+p)\\
\Longleftrightarrow\ &4p^4+10(q+r)p^3+2(3q^2+8qr+3r^2)p^2+2(q^3+2q^2r+2qr^2+r^3)p\\
&\quad +2(q^2-r^2)^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ. ■

問題 73　(China 2005)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) \geqq 1\,.$$

解 1　証明すべき不等式を同次化 (Homonization) する．

$$10(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)^2 \geqq 9(a^5+b^5+c^5)+(a+b+c)^5. \qquad \cdots\cdots(*)$$

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&10\Big[a^3+(a+p)^3+(a+q)^3\Big](3a+p+q)^2 \\
&\geqq 9\Big[a^5+(a+p)^5+(a+q)^5\Big]+(3a+p+q)^5 \\
\iff &120(p^2-pq+q^2)a^3+120(p^3+q^3)a^2+30(p^4+2p^3q-p^2q^2+2pq^3+q^4)a \\
&\quad +15(p^4q+pq^4) \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$120Aa^3+120Ba^2+30Ca+D \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0, B \geqq 0, D \geqq 0,$

$$C=p^4+2p^3q-p^2q^2+2pq^3+q^4=(p^2-pq+q^2)(p^2+3pq+q^2) \geqq 0.$$

したがって，不等式 $120Aa^3+120Ba^2+30Ca+D \geqq 0$ は成り立つ．■

解 2　$f(a,b,c)=10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)$,

$$F(a,b,c,\lambda)=10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)-\lambda(a+b+c-1)$$

とおく．$F_a=F_b=F_c=F_\lambda=0$ より

$$2a^2-3a^4=\frac{\lambda}{15} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$2b^2-3b^4=\frac{\lambda}{15} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$2c^2-3c^4=\frac{\lambda}{15} \qquad \cdots\cdots ③$$

$$a+b+c=1 \qquad \cdots\cdots ④$$

① − ② から $(a^2-b^2)\Big[2-3(a^2+b^2)\Big]=0.$　　ゆえに　$a=b$　または　$a^2+b^2=\dfrac{2}{3}.$

同様にして $\left(b=c \ \text{ または } \ b^2+c^2=\dfrac{2}{3}\right)$ かつ $\left(c=a \ \text{ または } \ c^2+a^2=\dfrac{2}{3}\right).$

例えば，$a^2+b^2=\dfrac{2}{3}$ かつ $b^2+c^2=\dfrac{2}{3}$ のとき $a=c$ が成り立つから，対称性を考慮して次の 2 つの場合を考えればよい．

(i) $\quad a=b=c \qquad$ (ii) $\quad a^2+b^2=\dfrac{2}{3}$ かつ $b^2+c^2=\dfrac{2}{3}$ かつ $a=c$

(i) の場合，$a=b=c=\dfrac{1}{3}$ より

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=1.$$

(ii) の場合，$b=1-2a$ を $a^2+b^2=\dfrac{2}{3}$ に代入すると $15a^2-12a+1=0$

$0<a<\dfrac{1}{2}$ であるから $a=\dfrac{6-\sqrt{21}}{15}$.

$$\begin{aligned}f(a,1-2a,a)&=10\left\{2a^2+(1-2a)^3\right\}-9\left\{2a^5+(1-2a)^5\right\}\\&=270a^5-720a^4+660a^3-240a^2+30a-1\end{aligned}$$

を $15a^2-12a+1$ で割ったときの商は $18a^3-\dfrac{168}{5}a^2+\dfrac{398}{25}a-\dfrac{128}{125}$, 余りは $\dfrac{224}{125}a+\dfrac{253}{125}$ より

$$f\left(\frac{6-\sqrt{21}}{15},\frac{3+2\sqrt{21}}{15},\frac{6-\sqrt{21}}{15}\right)=\frac{5139-224\sqrt{21}}{1875}(\fallingdotseq 2.1933)$$

$a>0, b>0, c>0, a+b+c=1$ のかわりに $S: a\geqq 0, b\geqq 0, c\geqq 0, a+b+c=1$ を考えると，S は有界閉集合で f は S で連続であるから，ワイヤストラスの定理より（最大値と）最小値が存在する．

S の境界の 1 つの $c=0, a+b=1$ で

$$\begin{aligned}f(a,1-a,0)&=10\left\{a^3+(1-a)^3\right\}-9\left\{a^5+(1-a)^5\right\}\\&=1+15a-60a^2+90a^3-45a^4\\&=1+15a(1-a)(3a^2-3a+1)\geqq 1.\end{aligned}$$

したがって，$a>0, b>0, c>0, a+b+c=1$ における f の最小値は 1 となるから

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geqq 1. \qquad \blacksquare$$

[注]　この問題は，初等的な不等式 I の問題 180 で扱った．

[注]　最大値は

$$f\left(\frac{6-\sqrt{21}}{15}, \frac{3+2\sqrt{21}}{15}, \frac{6-\sqrt{21}}{15}\right) = \frac{5139-224\sqrt{21}}{1875} (\fallingdotseq 2.1933)$$

とならない．

$$\begin{aligned} f(a, 1-a, 0) &= 10\left\{a^3+(1-a)^3\right\} - 9\left\{a^5+(1-a)^5\right\} \\ &= 1+15a-60a^2+90a^3-45a^4 = g(a) \end{aligned}$$

とおくと $g'(a) = -180a^3+270a^2-120a+15 = -15(2a-1)(6a^2-6a+1)$.

$\alpha = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$，$\beta = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ とおき，増減を調べると

a	0		α		$\frac{1}{2}$		β		1
$g'(a)$		+	0	−	0	+	0	−	
$g(a)$	1	↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	1

$g(a) = -45\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^4 + \dfrac{15}{2}\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{31}{16}$ を用いて

$a = \alpha$，β で最大値 $g(\alpha) = g(\beta) = \dfrac{9}{4} > \dfrac{5139-224\sqrt{21}}{1875} (\fallingdotseq 2.1933)$ をとるからである．

以上のことから，次のことが得られた．

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式が成り立つ．

$$10(a^3+b^3+c^3) - 9(a^5+b^5+c^5) < \frac{9}{4}.$$

最大値については，次のようにまとめておこう．

問題 74　(yanagita)

a, b, c は負でない実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$10(a^3+b^3+c^3) - 9(a^5+b^5+c^5) \leqq \frac{9}{4}.$$

解　一般性を失うことなく $a \geqq b \geqq c$ と仮定すると $3c \leqq a+b+c=1$ から $c \leqq \dfrac{1}{3}$.
$a+b=M$ とおき M を固定すると $c=1-M \leqq \dfrac{1}{3}$ から $\dfrac{2}{3} \leqq M \leqq 1$.

$$\begin{aligned}
a^3+b^3 &= (a+b)^3-3ab(a+b)=M^3-3Mab \\
a^5+b^5 &= (a+b)^5-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2) \\
&= M^5-5M^3ab+5M(ab)^2
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
&10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)=10(a^3+b^3)-9(a^5+b^5)+10c^3-9c^5 \\
&=10(M^3-3Mab)-9(M^5-5M^3ab+5Ma^2b^2)+10c^3-9c^5 \\
&=-45(ab)^2+(45M^3-30M)ab-9M^4+10M^2+10(1-M)^3-9(1-M)^5.
\end{aligned}$$

この式を $f(ab)$ とおくと，$ab \leqq \dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{M^2}{4}$ で

$$\frac{45M^3-30M}{90M}=\frac{3M^2-2}{6}<\frac{M^2}{4}$$

より $f(ab)$ は $ab=\dfrac{3M^2-2}{6}$ で最大値

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{3M^2-2}{6}\right) &= 5M-5M^3+\frac{9}{4}M^5+10(1-M)^3-9(1-M)^5 \\
&= \frac{45}{4}M^5-35M^4+45M^3-30M^2+10M+1.
\end{aligned}$$

この式を $g(M)$ $\left(\dfrac{2}{3} \leqq M \leqq 1\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{9}{4}-g(M)=\frac{5}{4}(1-M)(9M^4-19M^3+17M^2-7M+1) \\
&=\frac{5}{4}(1-M)\left[9\left(M-\frac{2}{3}\right)^4+5\left(M-\frac{2}{3}\right)^3+3\left(M-\frac{2}{3}\right)^2+\left(M-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{27}\right] \\
&\geqq 0.
\end{aligned}$$

よって，$g(M) \leqq \dfrac{9}{4}$　(等号は $M=1$ のとき．) したがって

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) \leqq \frac{9}{4}.$$

等号は，$M=1$ かつ $ab=\dfrac{3M^2-2}{6}$ より $a+b=1,\ ab=\dfrac{1}{6},\ c=0$ を解いて

$$(a,b,c)=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\ \frac{3-\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$$

のとき成り立つ．　■

問題 75 (Vasile Cîrtoaje , Romania TST 2006)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq a^2+b^2+c^2\,.$$

解　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ を利用すると

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geqq a^2+b^2+c^2$$

を示せばよい．この不等式を同次化すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \geqq a^2+b^2+c^2\\
\Longleftrightarrow\ & a+b+c \geqq abc(a^2+b^2+c^2)\\
\Longleftrightarrow\ & (a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqq abc(a^2+b^2+c^2)\\
\Longleftrightarrow\ & (a+b+c)^5 \geqq 81abc(a^2+b^2+c^2).
\end{aligned}$$

一般性を失うことなく $a=\min(a,b,c)$ と仮定できるから，$p=b-a \geqq 0,\ q=c-a \geqq 0$ とおき，$b=a+p,\ c=a+q$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&(3a+p+q)^5 \geqq 81a(a+p)(a+q)\left[a^2+(a+p)^2+(a+q)^2\right]\\
\Longleftrightarrow\ & 27(p^2-pq+q^2)a^3+9(p+q)^3a^2+3(5p^4-7p^3q+30p^2q^2-7pq^3+5q^4)a\\
&+p^5+5p^4q+10p^3q^2+10p^2q^3+5pq^4+q^5 \geqq 0.
\end{aligned}$$

この不等式を，$27Aa^3+9Ba^2+3Ca+D \geqq 0$ とおくと，$A \geqq 0, B \geqq 0, D \geqq 0,$

$$C=5p^4-7p^3q+30p^2q^2-7pq^3+5q^4=5(p-q)^4+13pq(p^2+q^2) \geqq 0.$$

したがって，不等式 $27Aa^3+9Ba^2+3Ca+D \geqq 0$ は成り立つ． ■

[注]　この問題は，初等的な不等式 I の問題 184 で扱った．

5　練習問題 D

問題 76　a, b, c, x, y, z は実数で，$a+x \geqq b+y \geqq c+z \geqq 0,\ a+b+c=x+y+z$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$ay+bx \geqq ac+xz.$$

解　$a+x=A, b+y=B, c+z=C, a-x=X, b-y=Y, c-z=Z$ とおくと

$$a=\frac{A+X}{2}, x=\frac{A-X}{2}, b=\frac{B+Y}{2}, y=\frac{B-Y}{2}, c=\frac{C+Z}{2}, z=\frac{C-Z}{2},$$

$$A \geqq B \geqq C \geqq 0,\ X+Y+Z=0.$$

したがって

$$\begin{aligned}
&ay+bx \geqq ac+xz \\
\iff &\frac{A+X}{2}\cdot\frac{B-Y}{2}+\frac{B+Y}{2}\cdot\frac{A-X}{2} \geqq \frac{A+X}{2}\cdot\frac{C+Z}{2}+\frac{A-X}{2}\cdot\frac{C-Z}{2} \\
\iff &AB-XY \geqq AC+XZ \\
\iff &A(B-C)-X(Y+Z) \geqq 0 \\
\iff &A(B-C)+X^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 77 (数学セミナー　エレガントな解答をもとむ)

x, y, z が正の実数のとき，次の不等式が常に成り立つような k の最大値を求めよ．

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqq k|(x-y)(y-z)(z-x)|.$$

解 一般性を失うことなく $x \geqq y \geqq z$ と仮定できる．$x-y=a \geqq 0,\ y-z=b \geqq 0$ とおくと

$$y=z+b,\ x=z+b+a.$$

よって

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz &= \frac{1}{2}(x+y+z)\Big[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\Big]\\ &= \frac{1}{2}(3z+2b+a)\Big[a^2+b^2+(a+b)^2\Big]\\ &= (3z+2b+a)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

を使うと，$z>0, a \geqq 0, b \geqq 0$ のとき

$$(3z+2b+a)(a^2+ab+b^2) \geqq kab(a+b) \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つような k の値の範囲を調べる．$(*)$ で $z \to +0$ とすると

$$(a+2b)(a^2+ab+b^2) \geqq kab(a+b) \qquad \cdots\cdots(**)$$

を得る．

逆に，$(**)$ が成り立つとき，$z>0, a \geqq 0, b \geqq 0$ ならば

$$(3z+2b+a)(a^2+ab+b^2) \geqq (2b+a)(a^2+ab+b^2) \geqq kab(a+b)$$

すなわち，$(*)$ は成り立つ．

したがって，$a \geqq 0, b \geqq 0$ のとき $(**)$ が成り立つような k の最大値を求めればよい．

$a=0$ または $b=0$ のとき $(**)$ は成り立つから，$a \fallingdotseq 0,\ b \fallingdotseq 0$ と仮定して $\dfrac{a}{b}=t$ とおく．

$$(a+2b)(a^2+ab+b^2) \geqq kab(a+b) \iff (t+2)(t^2+t+1) \geqq kt(t+1)$$

より，$t>0$ の範囲で

$$f(t)=\frac{(t+2)(t^2+t+1)}{t(t+1)}=\frac{t^3+3t^2+3t+2}{t^2+t}$$

の最小値を求めればよい．

$$f'(t)=\frac{t^4+2t^3-4t-2}{(t^2+t)^2}$$

$$= \frac{(t^2+t+1)^2-3(t+1)^2}{(t^2+t)^2}$$
$$= \frac{[(t^2+t+1)+\sqrt{3}(t+1)][(t^2+t+1)-\sqrt{3}(t+1)]}{(t^2+t)^2}.$$

$f'(t)=0$ とおくと $t^2+t+1=\sqrt{3}(t+1)$. $t>0$ であるから $t=\dfrac{\sqrt{3}-1+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$.

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}-1+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$ とおくと，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	0		α	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$t=\alpha$ で最小値

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)}$$
$$= \left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\frac{\sqrt{3}(\alpha+1)}{\alpha+1} \qquad \left(\quad \alpha^2+\alpha+1=\sqrt{3}(\alpha+1) \quad \text{を用いた}\right)$$
$$= \sqrt{3}\left(1+\frac{4}{\sqrt{3}-1+\sqrt{2\sqrt{3}}}\right) = \sqrt{3}\left(1+\frac{4\left(\sqrt{3}-1-\sqrt{2\sqrt{3}}\right)}{4-4\sqrt{3}}\right)$$
$$= \sqrt{3}\cdot\frac{-\sqrt{2\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$$
$$= (\sqrt{3}+1)\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

よって，k の最大値は $(\sqrt{3}+1)\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ である． ■

問題 78 (大学への数学　2013　5 月号)

x, y, z は実数で $x^2+y^2+z^2=1$ を満たすとき，次の式の最大値を求めよ．

(1) $(x-y)(y-z)(z-x)$

(2) $(2x-y)(2y-z)(2z-x)$

ラグランジュの未定乗数法を使うのに手頃な問題である．

解 (1)　$f(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)$,

$F(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ とおく．

$S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1, x,y,z\in\mathbb{R}\}$ で f は連続関数になる．S は有界閉集合であるから，ワイヤストラスの定理より最大値が存在する．

$F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$ より

$$(y-z)(z-x)-(x-y)(y-z)-2\lambda x=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$-(y-z)(z-x)+(x-y)(z-x)-2\lambda y=0 \qquad \cdots\cdots②$$

$$-(x-y)(z-x)+(x-y)(y-z)-2\lambda z=0 \qquad \cdots\cdots③$$

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad \cdots\cdots④$$

を得る．① $\times y-$ ② $\times x$, ② $\times z-$ ③ $\times y$, ③ $\times x-$ ① $\times z$ で λ を消去して

$$x^3+y^3-2x^2y-2xy^2-xz^2-yz^2+4xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$y^3+z^3-2y^2z-2yz^2-yx^2-zx^2+4xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

$$z^3+x^3-2z^2x-2zx^2-zy^2-xy^2+4xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑦$$

を得る．

⑤ + ⑥ + ⑦ から

$$2(x^3+y^3+z^3)-3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)=0,$$

$$(x+y-2z)(2x-y-z)(x-2y+z)=0.$$

ゆえに，$x+y-2z=0$ または $2x-y-z=0$ または $x-2y+z=0$.　$(*)$

また，⑤ − ⑥, ⑥ − ⑦, ⑦ − ⑤ から

$$(x-z)(x-2y+z)(x+y+z)=0 \qquad \cdots\cdots⑧$$

$$(y-x)(y-2z+x)(x+y+z)=0 \qquad \cdots\cdots⑨$$

$$(z-y)(z-2x+y)(x+y+z)=0 \qquad \cdots\cdots⑩$$

を得る．

(*) と⑧ (または ⑨) を基本的な場合分けに採用する．

(I) (a) $x+y-2z=0,\ x-z=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，④，① を用いると

$$(x,y,z,\lambda)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$$

となる．このとき，f の値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0,\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0.$$

(b) $x+y-2z=0,\ x-2y+z=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (a) と同じである．

(c) $x+y-2z=0,\ x+y+z=0$ の場合

$z=0,\ x+y=0$ となるから，④，① を用いると

$$(x,y,z,\lambda)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{3}{2\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

となる．このとき，f の値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(II) (d) $y+z-2x=0,\ x-z=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (a) と同じである．

(e) $y+z-2x=0,\ x-2y+z=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (a) と同じである．

(f) $y+z-2x=0,\ x+y+z=0$ の場合

$x=0,\ y+z=0$ となるから，④，① を用いると

$$(x,y,z,\lambda)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right),\ \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

となる．このとき，f の値は

$$f\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ f\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(III) (g) $z+x-2y=0,\ y-x=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (a) と同じである．

(h)　$z+x-2y=0,\ y-2z+x=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (a) と同じである．

(i)　$z+x-2y=0,\ x+y+z=0$ の場合 $y=0,\ z+x=0$ となるから，④，① を用いると $(x,y,z,\lambda)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ となる．このとき，f の値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

以上のことから

$(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき f は最大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ を取る．

(2)　$f(x,y,z)=(2x-y)(2y-z)(2z-x)$,

$F(x,y,z)=(2x-y)(2y-z)(2z-x)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ とおく．

$S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ で f は連続関数になる．S は有界閉集合であるから，ワイヤストラスの定理より最大値が存在する．

$F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$ より

$$2(2y-z)(2z-x)-(2x-y)(2y-z)-2\lambda x=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$-(2y-z)(2z-x)+2(2x-y)(2z-x)-2\lambda y=0 \qquad \cdots\cdots②$$

$$-(2x-y)(2z-x)+2(2x-y)(2y-z)-2\lambda z=0 \qquad \cdots\cdots③$$

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad \cdots\cdots④$$

を得る．$①\times y-②\times x,\ ②\times z-③\times y,\ ③\times x-①\times z$ で λ を消去して

$$4x^3+2y^3-4x^2y-8xy^2-7x^2z+7y^2z-2xz^2-4yz^2+12xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$4y^3+2z^3-4y^2z-8yz^2-7y^2x+7z^2x-2yx^2-4zx^2+12xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

$$4z^3+2x^3-4z^2x-8zx^2-7z^2y+7x^2y-2zy^2-4xy^2+12xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑦$$

を得る．

⑤ + ⑥ + ⑦ から

$$6(x^3+y^3+z^3)+x^2y+y^2z+z^2x-19(xy^2+yz^2+zx^2)+36xyz=0,$$

$$(x+2y-3z)(3x-y-2z)(2x-3y+z)=0.$$

ゆえに，$x+2y-3z=0$ または $3x-y-2z=0$ または $2x-3y+z=0$. $\quad(*)$

また，$2\times$⑤$-$⑥, $2\times$⑥$-$⑦, $2\times$⑦$-$⑤ から

$$(x-2z)(2x-3y+z)(4x+3y+z)=0 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$$(y-2x)(2y-3z+x)(4y+3z+x)=0 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$$(z-2y)(2z-3x+y)(4z+3x+y)=0 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

を得る．

$(*)$ と⑧ (または ⑨) を基本的な場合分けに採用する．

(I) (a) $\quad x+2y-3z=0,\ x-2z=0$ の場合

$x=4y,\ z=2y$ となるから，④，① を用いると

$(x,y,z,\lambda)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{21}},\dfrac{1}{\sqrt{21}},\dfrac{2}{\sqrt{21}},0\right),\ \left(-\dfrac{4}{\sqrt{21}},-\dfrac{1}{\sqrt{21}},-\dfrac{2}{\sqrt{21}},0\right)$ となる．f の値は 0 である．

(b) $\quad x+2y-3z=0,\ 2x-3y+z=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，④，① を用いると

$(x,y,z,\lambda)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ となる．このとき，f の値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}},\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

(c) $\quad x+2y-3z=0,\ 4x+3y+z=0$ の場合

$x=-\dfrac{11}{13}y,\ z=\dfrac{5}{13}y$ となるから，④，① を用いると

$$(x,y,z,\lambda)$$
$$=\left(\frac{11\sqrt{35}}{105},-\frac{13\sqrt{35}}{105},-\frac{\sqrt{35}}{21},\frac{7\sqrt{35}}{10}\right),\ \left(-\frac{11\sqrt{35}}{105},\frac{13\sqrt{35}}{105},\frac{\sqrt{35}}{21},-\frac{7\sqrt{35}}{10}\right)$$

となる．このとき，f の値は

$$f\left(\frac{11\sqrt{35}}{105},-\frac{13\sqrt{35}}{105},-\frac{\sqrt{35}}{21}\right)=\frac{7\sqrt{35}}{15},\ f\left(-\frac{11\sqrt{35}}{105},\frac{13\sqrt{35}}{105},\frac{\sqrt{35}}{21}\right)=-\frac{7\sqrt{35}}{15}.$$

(II) (d) $\quad 3x-y-2z=0,\ x-2z=0$ の場合

$x=2z,\ y=4z$ となるから，④，① を用いると

$(x,y,z,\lambda)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{21}},\dfrac{4}{\sqrt{21}},\dfrac{1}{\sqrt{21}},0\right),\ \left(-\dfrac{2}{\sqrt{21}},-\dfrac{4}{\sqrt{21}},-\dfrac{1}{\sqrt{21}},0\right)$ となる．f の値は 0 である．

(e)　$3x-y-2z=0,\ 2x-3y+z=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (b) と同じである．

(f)　$3x-y-2z=0,\ 4x+3y+z=0$ の場合

$x=\dfrac{5}{13}z,\ y=-\dfrac{11}{13}z$ となるから，④，① を用いると

$$
\begin{aligned}
&(x,y,z,\lambda)\\
&=\left(\frac{\sqrt{35}}{21},-\frac{11\sqrt{35}}{105},\frac{13\sqrt{35}}{105},-\frac{7\sqrt{35}}{10}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{35}}{21},\frac{11\sqrt{35}}{105},-\frac{13\sqrt{35}}{105},\frac{7\sqrt{35}}{10}\right)
\end{aligned}
$$

となる．このとき，f の値は

$$
f\left(\frac{\sqrt{35}}{21},-\frac{11\sqrt{35}}{105},\frac{13\sqrt{35}}{105}\right)=-\frac{7\sqrt{35}}{15},\ f\left(-\frac{\sqrt{35}}{21},\frac{11\sqrt{35}}{105},-\frac{13\sqrt{35}}{105}\right)=\frac{7\sqrt{35}}{15}.
$$

(III) (g)　$2x-3y+z=0,\ y-2x=0$ の場合

$y=2x,\ z=4x$ となるから，④，① を用いると

$(x,y,z,\lambda)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{21}},\dfrac{2}{\sqrt{21}},\dfrac{4}{\sqrt{21}},0\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{21}},-\dfrac{2}{\sqrt{21}},-\dfrac{4}{\sqrt{21}},0\right)$ となる．f の値は 0 である．

(h)　$2x-3y+z=0,\ 2y-3z+x=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (b) と同じである．

(i)　$2x-3y+z=0,\ 4y+3z+x=0$ の場合

$y=\dfrac{5}{13}x,\ z=-\dfrac{11}{13}x$ となるから，④，① を用いると

$$
\begin{aligned}
&(x,y,z,\lambda)\\
&=\left(-\frac{13\sqrt{35}}{105},-\frac{\sqrt{35}}{21},\frac{11\sqrt{35}}{105},\frac{7\sqrt{35}}{10}\right),\ \left(\frac{13\sqrt{35}}{105},\frac{\sqrt{35}}{21},-\frac{11\sqrt{35}}{105},-\frac{7\sqrt{35}}{10}\right)
\end{aligned}
$$

となる．このとき，f の値は

$$
f\left(-\frac{13\sqrt{35}}{105},-\frac{\sqrt{35}}{21},\frac{11\sqrt{35}}{105}\right)=\frac{7\sqrt{35}}{15},\ f\left(\frac{13\sqrt{35}}{105},\frac{\sqrt{35}}{21},-\frac{11\sqrt{35}}{105}\right)=-\frac{7\sqrt{35}}{15}.
$$

以上のことから

$(x,y,z)=\left(\dfrac{11\sqrt{35}}{105},-\dfrac{13\sqrt{35}}{105},-\dfrac{\sqrt{35}}{21}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{35}}{21},\dfrac{11\sqrt{35}}{105},-\dfrac{13\sqrt{35}}{105}\right),$
$\left(-\dfrac{13\sqrt{35}}{105},-\dfrac{\sqrt{35}}{21},\dfrac{11\sqrt{35}}{105}\right)$ のとき f は最大値 $\dfrac{7\sqrt{35}}{15}$ を取る．■

[注]　(1) は ①＋②＋③ から $-2\lambda(x+y+z)=0$．

したがって，$\lambda=0$ または $x+y+z=0$ が成り立つ．このことから解く方が簡単であるが，(2) の解法と同じ方法をここでは選んだ．

n を 2 以上の 整数とする．x, y, z は実数で $x^2+y^2+z^2=1$ を満たすとき $(nx-y)(ny-z)(nz-x)$ の最大値を求めることができる．

> n を 2 以上の整数とする．x, y, z は実数で $x^2+y^2+z^2=1$ を満たすとき，$(nx-y)(ny-z)(nz-x)$ の最大値を求めよ．

解　$f(x,y,z)=(nx-y)(ny-z)(nz-x)$,

$F(x,y,z)=(nx-y)(ny-z)(nz-x)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ とおく．

$S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1, x,y,z\in\mathbb{R}\}$ で f は連続関数になる．S は有界閉集合であるから，ワイヤストラスの定理より最大値が存在する．

$F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$ より

$$n(ny-z)(nz-x)-(nx-y)(ny-z)-2\lambda x=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$-(ny-z)(nz-x)+n(nx-y)(nz-x)-2\lambda y=0 \qquad \cdots\cdots②$$

$$-(nx-y)(nz-x)+n(nx-y)(ny-z)-2\lambda z=0 \qquad \cdots\cdots③$$

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad \cdots\cdots④$$

を得る．① $\times y-$ ② $\times x$, ② $\times z-$ ③ $\times y$, ③ $\times x-$ ① $\times z$ で λ を消去して

$$n^2x^3+ny^3-2nx^2y-2n^2xy^2-(n^3-1)x^2z-(n^3-1)y^2z-nxz^2-n^2yz^2 \\ +2n(n+1)xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$n^2y^3+nz^3-2ny^2z-2n^2yz^2-(n^3-1)y^2x-(n^3-1)z^2x-nyx^2-n^2zx^2 \\ +2n(n+1)xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

$$n^2z^3+nx^3-2nz^2x-2n^2zx^2-(n^3-1)z^2y-(n^3-1)x^2y-nzy^2-n^2xy^2 \\ +2n(n+1)xyz=0 \qquad \cdots\cdots⑦$$

を得る．

⑤ + ⑥ + ⑦ から

$$(n^2+n)(x^3+y^3+z^3)+(n^3-3n-1)(x^2y+y^2z+z^2x) \\ -(n^3+3n^2-1)(xy^2+yz^2+zx^2)+6(n^2+n)xyz=0,$$

$$\big[x+ny-(n+1)z\big]\big[(n+1)x-y-nz\big]\big[nx-(n+1)y+z\big]=0.$$

ゆえに

$x+ny-(n+1)z=0$ または $(n+1)x-y-nz=0$ または $nx-(n+1)y+z=0$. $(*)$

また，$n\times$⑤$-$⑥, $n\times$⑥$-$⑦, $n\times$⑦$-$⑤ から

$$(x-nz)\bigl[nx-(n+1)y+z\bigr]\bigl[n^2x+(n^2-n+1)y+z\bigr]=0 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$$(y-nx)\bigl[ny-(n+1)z+x\bigr]\bigl[n^2y+(n^2-n+1)z+x\bigr]=0 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

$$(z-ny)\bigl[nz-(n+1)x+y\bigr]\bigl[n^2z+(n^2-n+1)x+y\bigr]=0 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

を得る．

$(*)$ と⑧ (または ⑨) を基本的な場合分けに採用する．

(I) (a)　$x+ny-(n+1)z=0,\ x-nz=0$ の場合

$x=n^2y,\ z=ny$ となるから，④，① を用いると

$(x,y,z,\lambda)=\left(\dfrac{n^2}{\sqrt{1+n^2+n^4}},\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2+n^4}},\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2+n^4}},0\right),$

$\left(-\dfrac{n^2}{\sqrt{1+n^2+n^4}},-\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2+n^4}},-\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2+n^4}},0\right)$ となる．このとき，f の値は 0 である．

(b)　$x+ny-(n+1)z=0,\ nx-(n+1)y+z=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，④，① を用いると

$(x,y,z,\lambda)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{(n-1)^3}{2\sqrt{3}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{(n-1)^3}{2\sqrt{3}}\right)$ となる．このとき，f の値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{(n-1)^3}{3\sqrt{3}},\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{(n-1)^3}{3\sqrt{3}}.$$

(c)　$x+ny-(n+1)z=0,\ n^2x+(n^2-n+1)y+z=0$ の場合

$x=-\dfrac{n^3+n+1}{n^3+n^2+1}y,\ z=\dfrac{n^3-n^2+n-1}{n^3+n^2+1}y$ となるから，④，① を用いると

$$\begin{aligned}(x,y,z,\lambda)=\Biggl(&\frac{n^3+n+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{-(n^3+n^2+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\\&\frac{-(n^3-n^2+n-1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{2\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\Biggr),\\\Biggl(&\frac{-(n^3+n+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{n^3+n^2+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\\&\frac{n^3-n^2+n-1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},-\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{2\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\Biggr).\end{aligned}$$

このとき，f の値は，前者の場合は

$$\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},$$

後者の場合は

$$-\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}$$

となる．

(II) (d)　$(n+1)x-y-nz=0,\ x-nz=0$ の場合

$y=n^2z,\ x=nz$ となるから，④，① を用いると

$(x,y,z,\lambda)=\left(\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2+n^4}},\dfrac{n^2}{\sqrt{1+n^2+n^4}},\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2+n^4}},0\right),$
$\left(-\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2+n^4}},-\dfrac{n^2}{\sqrt{1+n^2+n^4}},-\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2+n^4}},0\right)$ となる．このとき，f の値は 0 である．

(e)　$(n+1)x-y-nz=0,\ nx-(n+1)y+z=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (b) と同じである．

(f)　$(n+1)x-y-nz=0,\ n^2x+(n^2-n+1)y+z=0$ の場合

$x=\dfrac{n^3-n^2+n-1}{n^3+n^2+1}z,\ y=-\dfrac{n^3+n+1}{n^3+n^2+1}z$ となるから，④，① を用いると

$$\begin{aligned}(x,y,z,\lambda)=&\left(\frac{-(n^3-n^2+n-1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{n^3+n+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\right.\\&\left.\frac{-(n^3+n^2+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{2\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\right),\\&\left(\frac{n^3-n^2+n-1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{-(n^3+n+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\right.\\&\left.\frac{n^3+n^2+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},-\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\right).\end{aligned}$$

このとき，f の値は，前者の場合は

$$\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},$$

後者の場合は

$$-\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}$$

となる．

(III) (g)　$nx-(n+1)y+z=0,\ y-nx=0$ の場合

$z=n^2x,\ y=nx$ となるから，④，① を用いると

$$(x,y,z,\lambda)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2+n^4}},\frac{n}{\sqrt{1+n^2+n^4}},\frac{n^2}{\sqrt{1+n^2+n^4}},0\right),$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{1+n^2+n^4}},-\frac{n}{\sqrt{1+n^2+n^4}},-\frac{n^2}{\sqrt{1+n^2+n^4}},0\right)$$ となる．このとき，f の値は 0 である．

(h)　$nx-(n+1)y+z=0,\ ny-(n+1)z+x=0$ の場合

$x=y=z$ となるから，(I) (b) と同じである．

(i)　$nx-(n+1)y+z=0,\ n^2y+(n^2-n+1)z+x=0$ の場合

$y=\dfrac{n^3-n^2+n-1}{n^3+n^2+1}x,\ z=-\dfrac{n^3+n+1}{n^3+n^2+1}x$ となるから，④，① を用いると

$$\begin{aligned}(x,y,z,\lambda)=\Bigg(&\frac{-(n^3+n^2+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{-(n^3-n^2+n-1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\\&\frac{n^3+n+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{2\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\Bigg),\\ \Bigg(&\frac{n^3+n^2+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{n^3-n^2+n-1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\\&\frac{-(n^3+n+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},-\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{2\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\Bigg).\end{aligned}$$

このとき，f の値は，前者の場合は

$$\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},$$

後者の場合は

$$-\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}$$

となる．

ここで，$\dfrac{(n-1)^3}{3\sqrt{3}}$ と $\dfrac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}$ の大小比較をする．

$$\begin{aligned}&\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}>\frac{(n-1)^3}{3\sqrt{3}}\\ \Longleftrightarrow\ &(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2>(n-1)^3\sqrt{(n^2+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)}\\ \Longleftrightarrow\ &(n^2-n+1)(n^2+n+1)^3>(n-1)^6(n^2+1)\end{aligned}$$

$$\iff n(8n^6-12n^5+30n^4-25n^3+30n^2-12n+8)>0$$
$$\iff 8n^6-12n^5+30n^4-25n^3+30n^2-12n+8>0$$
$$\iff 8\left(n^3+\frac{1}{n^3}\right)-12\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)+30\left(n+\frac{1}{n}\right)-25>0$$
$\left(n+\dfrac{1}{n}=t \text{ とおく }\right)$
$$\iff 8(t^3-3t)-12(t^2-2)+30t-25>0$$
$$\iff 8t^3-12t^2+6t-1>0 \iff (2t-1)^3>0$$
$$\iff \left\{2\left((n+\frac{1}{n}\right)-1\right\}^3>0$$
$$\iff (2n^2-n+2)^3>0.$$

n は 2 以上の整数なので $2n^2-n+2>0$ は成り立つから，最後の不等式は成り立つ．よって

$$\frac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}>\frac{(n-1)^3}{3\sqrt{3}}.$$

以上のことから

$$\begin{aligned}
&(x,y,z)\\
&=\left(\frac{n^3+n+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{-(n^3+n^2+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{-(n^3-n^2+n-1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\right),\\
&\quad\left(\frac{-(n^3-n^2+n-1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{n^3+n+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{-(n^3+n^2+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\right),\\
&\quad\left(\frac{-(n^3+n^2+1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{-(n^3-n^2+n-1)}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}},\frac{n^3+n+1}{\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}\right)
\end{aligned}$$

のとき f は最大値 $\dfrac{(n^2-n+1)(n^2+n+1)^2}{3\sqrt{3(n^6+2n^4+2n^2+1)}}$ を取る． ■

参考文献

[1] V.Cîrtoaje： ALGEBRAIC INEQUALITIES Old and New Methods , GIL Publishing House

[2] P. K . Hung : Secrets in and Inequalities volume 1 - basic inequalities , GIL Publishing House

[3] P. K . Hung : Secrets in and Inequalities volume 2 - advanced inequalities -free chapter , GIL Publishing House

2012 年　8 月 22 日 Ver .1.1

2013 年　5 月 11 日 Ver .1.2　問題 78 追加