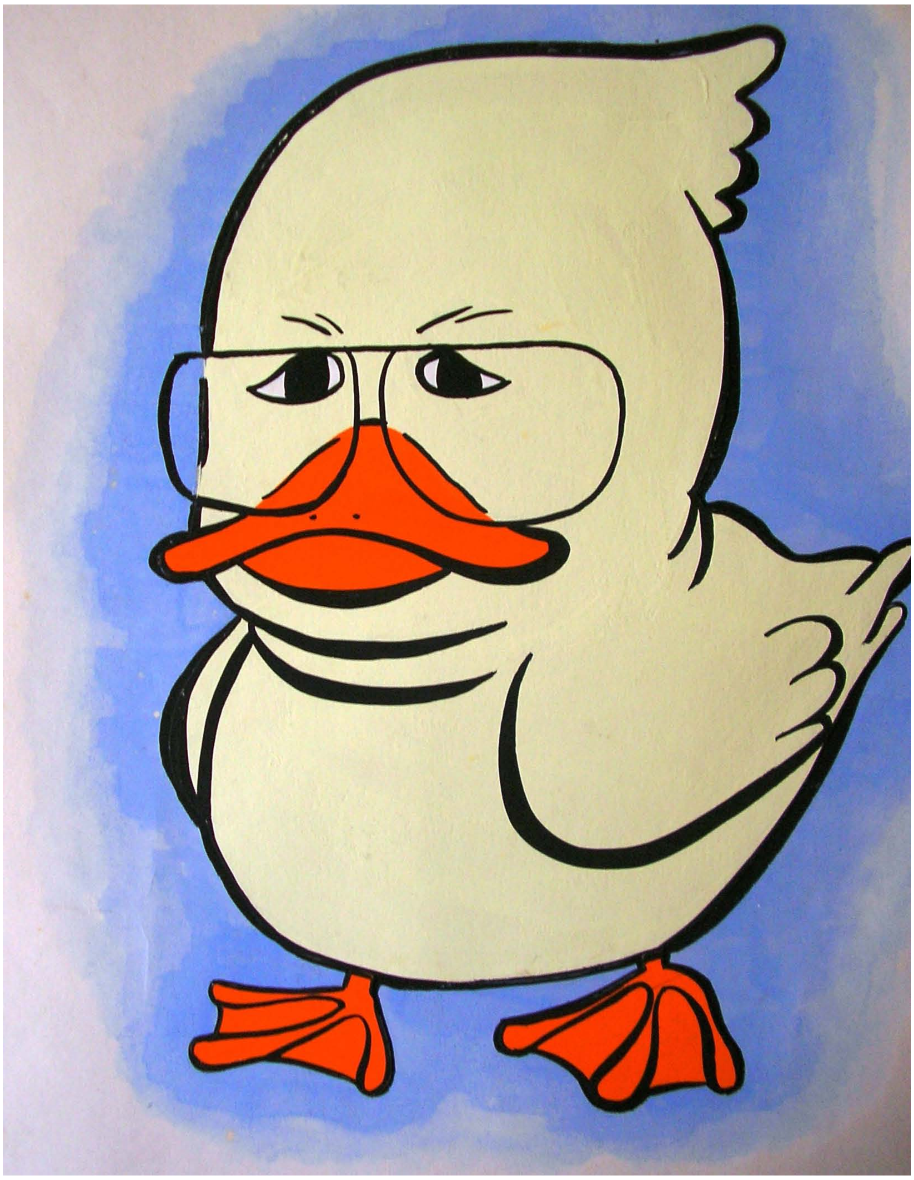
初等的な不等式 III

柳田 五夫



目次

ここでは，対称式の不等式を扱っている．三次の対称的な多項式の不等式の一部については，**初等的な不等式 II** で扱ったが，ここでは，次数に関係なく多項式の不等式を主に扱い，多項式以外の不等式も扱う．証明が難しい不等式の証明に対して有効な，SMV-Theorem，EV-Theorem，RCF-Theorem 等を証明し，使用する．

1 SMV-Theorem

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を任意の実数列とする．この実数列に対して，次の変換 Δ を行う．

1. $a_i = min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_j = max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を満たす $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を選ぶ．
2. a_i と a_j を $\dfrac{a_i + a_j}{2}$ で置き換える．

最初の数列を $(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1)\,(= (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ と表し，変換 Δ を行った後の数列を $(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2)$ と表すことにする．同様にして，数列 $(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k)$ に変換 Δ を行った後の数列を $(a_1^{k+1}, a_2^{k+1}, \ldots, a_n^{k+1})$ と表すことにする．

[補助定理 1.1] (General mixing variable lemma)

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を任意の実数列とする．この実数列に対して，変換 Δ を k 回行った数列を $(a_1^{k+1}, a_2^{k+1}, \ldots, a_n^{k+1})$ とすると，各 $i\,(1 \leqq i \leqq n)$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} a_i^k = a, \quad a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

が成立する．

[証明] $m_p = min(a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p)$, $M_p = max(a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p)$ とおくと

(i) $M_{p+1} \leqq M_p, \quad m_p \leqq m_{p+1}\,(p = 1, 2, \ldots)$
一般性を失うことなく $a_1^p \leqq a_2^p \leqq \cdots \leqq a_n^p$ と仮定できる．
このとき，$m_p = a_1^p$, $M_p = a_n^p$ で，a_1^p と a_n^p は $\dfrac{a_1^p + a_n^p}{2} = \dfrac{m_p + M_p}{2}$ に置き換わるが，$m_p \leqq \dfrac{a_1^p + a_n^p}{2} = \dfrac{m_p + M_p}{2} \leqq M_p$ が成り立つ．
また，$m_p \leqq a_i^p \leqq M_p\,(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ だから $M_{p+1} \leqq M_p$, $m_p \leqq m_{p+1}$ が成り立つ．

(ii) $m_p \leqq a \leqq M_p\,(p = 1, 2, \ldots)$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na$ だから

$$nm_1 \leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqq nM_1 \text{ から } m_1 \leqq a \leqq M_1$$

一般性を失うことなく $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ と仮定できる．

$(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1)\,(= (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ と表し，変換 Δ を行った後の数列 $(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2)$ は $\left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}, a_2, \ldots, a_{n-1}, \dfrac{a_1 + a_n}{2}\right)$ となるから

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= \frac{a_1 + a_n}{2} + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1 + a_n}{2} \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= na \end{aligned}$$

同様にして $m_2 \leqq a \leqq M_2$ が成り立つ．

以下，帰納的に $m_3 \leqq a \leqq M_3, \ldots$ が得られる．

(iii) $\displaystyle\lim_{p\to\infty} m_p = \lim_{p\to\infty} M_p = a$ を示せば，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_i^k = a$ が示される．

$\{m_p\}, \{M_p\}$ は

$$m_1 \leqq m_2 \leqq \cdots \leqq m_p \leqq a, \quad M_1 \geqq M_2 \geqq \cdots \geqq M_p \geqq \cdots \geqq a$$

を満たすから収束する．

$\displaystyle\lim_{p\to\infty} m_p = m, \lim_{p\to\infty} M_p = M$ とおくと，(ii) より $m \leqq a \leqq M$

次に，$m = M$ となることを示す．

このために $m < M$ と仮定して矛盾が生ずることをいう．

任意の $\epsilon > 0$ $\left(\epsilon < \dfrac{M - m}{2}\right)$ に対して，ある正の整数 p_0 が存在し

$p \geqq p_0 \Longrightarrow |m_p - m| < \epsilon, |M_p - M| < \epsilon$ が成り立つ．

$d_m = \left\{x \middle| |x - m| < \epsilon\right\}, d_M = \left\{x \middle| \left|x - M\right| < \epsilon\right\}, d_{\frac{M+m}{2}} = \left\{x \middle| \left|x - \frac{M+m}{2}\right| < \epsilon\right\}$

とおくと

$$d_m \cap d_{\frac{M+m}{2}} = \phi, d_M \cap d_{\frac{M+m}{2}} = \phi$$

数列 $(a_1^{p_0}, a_2^{p_0}, \ldots, a_n^{p_0})$ を考える．

一般性を失うことなく $a_1^{p_0} \leqq a_2^{p_0} \leqq \cdots \leqq a_n^{p_0}$ と仮定することができる．

このとき，$m_{p_0} = a_1^{p_0}, M_{p_0} = a_n^{p_0}$ で $a_1^{p_0} \in d_m, a_n^{p_0} \in d_M$ から

$m - \epsilon < a_1^{p_0} < m + \epsilon, M - \epsilon < a_n^{p_0} < M + \epsilon$ が成り立つことから

$$\frac{M + m}{2} - \epsilon < \frac{a_1^{p_0} + a_n^{p_0}}{2} < \frac{M + m}{2} + \epsilon$$

よって

$$\frac{m_{p_0} + M_{p_0}}{2} = \frac{a_1^{p_0} + a_n^{p_0}}{2} \in d_{\frac{M+m}{2}}$$

で
$$\frac{m_{p_0}+M_{p_0}}{2}=\frac{a_1^{p_0}+a_n^{p_0}}{2}\notin d_m,\ \frac{m_{p_0}+M_{p_0}}{2}=\frac{a_1^{p_0}+a_n^{p_0}}{2}\notin d_M$$
数列 $(a_1^{p_0}, a_2^{p_0}, \dots, a_n^{p_0})$ に変換 Δ を行った数列
$$(a_1^{p_0+1}, a_2^{p_0+1}, \dots, a_n^{p_0+1})=\left(\frac{m_{p_0}+M_{p_0}}{2}, a_2^{p_0+1}, \dots, a_{n-1}^{p_0+1}, \frac{m_{p_0}+M_{p_0}}{2}\right)$$
では
$$m_{p_0+1}=a_2^{p_0},\ M_{p_0+1}=a_{n-1}^{p_0}$$
となり
$$\frac{m_{p_0+1}+M_{p_0+1}}{2}=\frac{a_2^{p_0}+a_{n-1}^{p_0}}{2}\in d_{\frac{M+m}{2}}$$
かつ
$$\frac{m_{p_0+1}+M_{p_0+1}}{2}=\frac{a_2^{p_0}+a_{n-1}^{p_0}}{2}\notin d_m,\ \frac{m_{p_0+1}+M_{p_0+1}}{2}=\frac{a_2^{p_0}+a_{n-1}^{p_0}}{2}\notin d_M$$
である．
この操作を有限回繰り返すと d_m, d_M に属する要素がなくなり
$\lim_{p\to\infty} m_p = m,\ \lim_{p\to\infty} M_p = M$ に反する． ■

[注]　変換 Δ は $\frac{a+b}{2}$ の代わりに $\sqrt{ab}$ や $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ と変更することもできる．

定理 1.2 Stronger mixing variable　(SMV Theorem)
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ を任意の実数列とする．この実数列に対して，変換 Δ を k 回行った数列を $(a_1^{k+1}, a_2^{k+1}, \dots, a_n^{k+1})$ とする．
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続関数で，$a_1, a_2, \dots, a_n$ に関する対称式であるとする．
このとき
$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geqq f(a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2)$$
が成り立ち，$\{f(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)\}$ が $k\to\infty$ のとき収束するならば
$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geqq f(a, a, \dots, a),\quad a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$
が成立する．

2　EV-Theorem

EV-Theorem　の証明については，[1]，[2] にあるものを筆者が個人的にまとめたなので，ぜひ原論文にあたっていただきたい．

実際に筆者が不等式の証明に使用するのは，系 2.8 が多い．

2.1　補助定理 2.1 の証明

[補助定理 **2.1**]　a, b, c は非負の実数で，すべてが等しいということがなく，高々 1 個だけが 0 となるものとする。
そして，$x, y, z\,(x \leqq y \leqq z)$ は非負の実数で
　$p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ のとき

$$x + y + z = a + b + c, \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p$$

　$p = 0$ のとき

$$x + y + z = a + b + c, \quad xyz = abc > 0$$

を満たすものとする。
このとき，$x \in [x_1, x_2]$ を満たすような，2 つの非負の実数 $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$ が存在して，次のことが成り立つ．

(1) $x = x_1, p \leqq 0 \Longrightarrow 0 < x < y = z$
(2) $x = x_1, p > 1 \Longrightarrow 0 = x < y \leqq z$ または $0 < x < y = z$
　詳しくは，$x = x_1 = 0, p > 1 \Longrightarrow 0 = x < y \leqq z$
　$x = x_1 > 0, p > 1 \Longrightarrow 0 < x < y = z$
(3) $x \in (x_1, x_2) \Longrightarrow x < y < z$
(4) $x = x_2 \Longrightarrow 0 < x = y < z$

[証明]　$p = 0$，$p < 0$，$p > 1$ の場合にわけて証明する．

(A) $p = 0$ の場合　$(xyz = abc > 0)$
　$S = \dfrac{a + b + c}{3}, P = \sqrt[3]{abc}$ とおくと

$$a + b + c = 3S, \quad abc = P^3, \quad x + y + z = 3S, \quad xyz = P^3$$

相加平均・相乗平均の不等式から

$$S = \frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc} = P$$

したがって，$S > P > 0$

そして，$0 < x \leqq y \leqq z, x < z$ から，$0 < x < P$

$\because$ $x = z$ と仮定すると $x \leqq y \leqq z$ から $x = y = z$

$x + y + z = 3S, xyz = P^3$ を用いると $3x = 3S, x^3 = P^3$ となり $S = P$ を得る． これは $S > P$ に矛盾する．よって，$x < z$

$0 < x \leqq y \leqq z, x < z$ から，$x^3 < xyz = P^3$ よって，$0 < x < P$

さて

$$f = y + z - 2\sqrt{yz}$$

とおくと $f = (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \geqq 0$ で等号は $y = z$ のときに限り成り立つ．

f を x で表すことを考える．

$y + z = 3S - x$, $\sqrt{yz} = \dfrac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{P^3}}{\sqrt{x}} = P\sqrt{\dfrac{P}{x}}$ より

$$f = 3S - x - 2P\sqrt{\frac{P}{x}}$$

x の関数として $f(x) = 3S - x - 2P\sqrt{\dfrac{P}{x}} \quad (0 < x < P)$ とおくと

$$f'(x) = -1 + \frac{P}{x}\sqrt{\frac{P}{x}} > 0$$

したがって，$f(x)$ は $0 < x < P$ で増加関数である．

$$\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \to P-0} f(x) = 3(S - P) > 0$$

より 方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの正の解 $x_1\,(0 < x_1 < P)$ をもつ．

常に $f(x) \geqq 0$ であったから，条件式を満たす x は $x \geqq x_1$ である．

y と z は $y + z = 3S - x, yz = \dfrac{P^3}{x}$ から x の関数と考えられる．

(i) $x = x_1 (> 0)$ の場合

$f(x_1) = 0$ から $y(x_1) = z(x_1)$ が得られ $0 < x < y = z$

(ii) $x > x_1$ の場合

$f(x) > f(x_1) = 0$ から $y \fallingdotseq z$ すなわち $y < z$

$x+y+z=3S$ の両辺を x で微分すると

$$1+y'+z'=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\log x+\log y+\log z=3\log P$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{x}+\frac{y'}{y}+\frac{z'}{z}=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

①,② から

$$y'=\frac{y(x-z)}{x(z-y)}, \quad z'=\frac{z(y-x)}{x(z-y)}$$

$0<x \leqq y<z$ より $y'<0$
したがって，$y(x)$ は減少関数である．
$y(x_1) \leqq x_1$ と仮定すると，$x_1<x \leqq y$ より $y(x_1)>y(x)=y$ となり
$x_1 \geqq y(x_1)>y(x)=y$ すなわち，$x_1>y$
これは，$x_1 \leqq x \leqq y$ に矛盾する．
よって，$y(x_1)>x_1$ が成り立つ．
$F(x)=y(x)-x$ とおくと，$F'(x)=y'(x)-1<0$ より，$F(x)$ は減少関数で

$$F(x_1)=y(x_1)-x_1>0, \quad \lim_{x \to P-0} F(x)<0$$

$\because$ $0<x \leqq y<z, xyz=P^3$ より

$$\lim_{x \to P-0} yz=\lim_{x \to P-0} \frac{P^3}{x}=P^2, \quad \lim_{x \to P-0} y \leqq \lim_{x \to P-0} \sqrt{yz}=P$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x \to P-0} F(x) \leqq 0$
$\displaystyle\lim_{x \to P-0} F(x)=0$ と仮定すると，$\displaystyle\lim_{x \to P-0} y(x)=P$

$$\lim_{x \to P-0} z(x)=\lim_{x \to P-0} \frac{P^3}{xy(x)}=P$$

$x+y+z=3S$ において $x \to P-0$ とすると，$3P=3S$ すなわち $S=P$ となり，$S>P$ に矛盾する．
よって，$\displaystyle\lim_{x \to P-0} F(x)<0$

このことから，$F(x_2)=0$ となる $x_2\,(x_1<x_2)$ が存在し，次のことが成り立つ．

$x_1 < x_2,\quad y(x_2) = x_2$

$x_1 < x < x_2$ のとき $y(x) > x$

$x_2 < x$ のとき $y(x) < x$

$y \geqq x$ であることを考慮すると，条件式を満たす x は $x_1 < x \leqq x_2$ となる．

一方，$z' > 0 \quad (x_1 < x < x_2)$ が成り立つから，$z(x)$ は $x_1 \leqq x \leqq x_2$ において増加関数で

$x_1 < x < x_2$ のとき

$$z(x) > z(x_1) = y(x_1) > y(x) \quad \text{すなわち} \quad z > y$$

よって，$x_1 < x < x_2$ のとき $x < y < z$

また，$z(x_2) > z(x_1) = y(x_1) > y(x_2) = x_2$ より

$x = x_2$ のときは

$$x_2 = y(x_2) < z(x_2)$$

よって，$x = y < z$

(B) $p<0$ の場合

$S=\dfrac{a+b+c}{3}, R=\left(\dfrac{a^p+b^p+c^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$ とおくと，

$$a+b+c=3S,\ a^p+b^p+c^p=3R^p,\quad x+y+z=3S,\ x^p+y^p+z^p=3R^p$$

$f_1(x)=x^p\,(x>0)$ とおくと，$f_1''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$ より，$f_1(x)$ は凸関数だから

$$\frac{a^p+b^p+c^p}{3}>\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^p \quad すなわち \quad \left(\frac{a^p+b^p+c^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{a+b+c}{3}$$

したがって，$R<S$

そして，$0<x\leqq y\leqq z, x<z$ から $3^{\frac{1}{p}}R<x<R$

$\because$ $x=z$ と仮定すると $x\leqq y\leqq z$ から $x=y=z$

$x+y+z=3S, x^p+y^p+z^p=3R^p$ を用いると $3x=3S, 3x^p=3R^p$ となり

$S=R$ を得る．これは $R<S$ に矛盾する．よって，$x<z$

このとき

$3x^p>x^p+y^p+z^p=3R^p$ より $x<R$

$x^p<x^p+y^p+z^p=3R^p$ より $x>3^{\frac{1}{p}}R$

よって，$3^{\frac{1}{p}}R<x<R$

さて

$$h=(y+z)\left(\frac{y^p+z^p}{2}\right)^{-\frac{1}{p}}-2$$

とおくと，相加平均・相乗平均の不等式から

$$h\geqq 2\sqrt{yz}\left(\sqrt{y^pz^p}\right)^{-\frac{1}{p}}-2=2\sqrt{yz}\cdot\frac{1}{\sqrt{yz}}-2=0$$

等号は $y=z$ のときに限り成り立つ．

h を x で表すことを考える．

$y+z=3S-x,\ \dfrac{y^p+z^p}{2}=\dfrac{3R^p-x^p}{2}$ より

$$h=(3S-x)\left(\frac{3R^p-x^p}{2}\right)^{-\frac{1}{p}}-2$$

x の関数として $h(x)=(3S-x)\left(\dfrac{3R^p-x^p}{2}\right)^{-\frac{1}{p}}-2$ とおくと

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{3}{2}\left(\frac{3R^p-x^p}{2}\right)^{-\frac{p+1}{p}}(Sx^{p-1}-R^p)\\&=\frac{3}{2}R^p\left(\frac{3R^p-x^p}{2}\right)^{-\frac{p+1}{p}}\left\{\frac{S}{x}\left(\frac{R}{x}\right)^{-p}-1\right\}>0\end{aligned}$$

したがって，$h(x)$ は増加関数である．

$$h(x) \geqq 0, \quad \lim_{x \to 3^{\frac{1}{p}}R-0} h(x) = -2 < 0$$

より 方程式 $h(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 $x_1 \left(x_1 > 3^{\frac{1}{p}}R\right)$ をもつ．

常に $h(x) \geqq 0$ であったから，条件式を満たす x は $x \geqq x_1$ であることがわかる．

(i) $x = x_1 (> 0)$ の場合

$h(x_1) = 0$ から $y(x_1) = z(x_1)$ が得られるから $0 < x < y = z$

(ii) $x > x_1$ の場合

$h(x) > 0$ から $y < z$ が得られる，

y と z は x の関数と考えられる．

$x + y + z = 3S$ の両辺を x で微分すると

$$1 + y' + z' = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

$x^p + y^p + z^p = 3R^p$ の両辺を x で微分すると

$$x^{p-1} + y^{p-1}y' + z^{p-1}z' = 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

③,④ から

$$y' = \frac{x^{p-1} - z^{p-1}}{z^{p-1} - y^{p-1}}, \quad z' = \frac{y^{p-1} - x^{p-1}}{z^{p-1} - y^{p-1}}$$

$0 < x \leqq y < z$ より $y' < 0$

したがって，$y(x)$ は減少関数である．

$y(x_1) \leqq x_1$ と仮定すると，$x_1 < x \leqq y$ より $y(x_1) > y(x) = y$ となり

$x_1 \geqq y(x_1) > y(x) = y$ すなわち，$x_1 > y$

これは，$x_1 \leqq x \leqq y$ に矛盾する．

よって，$y(x_1) > x_1$ が成り立つ．

$F(x) = y(x) - x$ とおくと，$F'(x) = y'(x) - 1 < 0$ より，$F(x)$ は減少関数で

$$F(x_1) = y(x_1) - x_1 > 0, \quad \lim_{x \to R-0} F(x) < 0$$

$\because$ $0 < x \leqq y < z, x^p + y^p + z^p = 3R^p$ より

$$2y^p \geqq y^p + z^p = 3R^p - x^p \quad y \leqq \left(\frac{3R^p - x^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\displaystyle\lim_{x \to R-0} y \leqq R$ となるので，$\displaystyle\lim_{x \to R-0} F(x) \leqq 0$

$\lim_{x \to R-0} F(x) = 0$ と仮定すると，$\lim_{x \to R-0} y(x) = R$

$\lim_{x \to R-0} z(x) = \lim_{x \to R-0} (3R^p - x^p - y^p)^{\frac{1}{p}} = R$

$x + y + z = 3S$ において $x \to R - 0$ とすると，$3R = 3S$ すなわち $S = R$ となり，$S > R$ に矛盾する．

よって，$\lim_{x \to R-0} F(x) < 0$

このことから，$F(x_2) = 0$ となる $x_2\,(x_1 < x_2)$ が存在し，次のことが成り立つ．

$x_1 < x_2, \quad y(x_2) = x_2$

$x_1 < x < x_2$ のとき $y(x) > x$

$x_2 < x$ のとき $y(x) < x$

$y \geqq x$ であることを考慮すると，条件式を満たす x は $x_1 < x \leqq x_2$ となる．

一方，$z' > 0 \quad (x_1 < x < x_2)$ が成り立つから，$z(x)$ は $x_1 \leqq x \leqq x_2$ において増加関数で

$x_1 < x < x_2$ のとき

$$z(x) > z(x_1) = y(x_1) > y(x) \quad \text{すなわち} \quad z > y$$

よって，$x < y < z$

また，$z(x_2) > z(x_1) = y(x_1) > y(x_2) = x_2$ より

$x = x_2$ のときは

$$x_2 = y(x_2) < z(x_2)$$

よって，$x = y < z$

(C) $p>1$ の場合

$S=\dfrac{a+b+c}{3}, R=\left(\dfrac{a^p+b^p+c^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}$ とおくと

$$a+b+c=3S,\ a^p+b^p+c^p=3R^p,\quad x+y+z=3S,\ x^p+y^p+z^p=3R^p$$

$f_1(x)=x^p\,(x>0)$ とおくと，$f_1''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$ より，$f_1(x)$ は凸関数だから

$$\frac{a^p+b^p+c^p}{3}>\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^p \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{a^p+b^p+c^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}}>\frac{a+b+c}{3}$$

したがって，$R>S$

そして，$0\leqq x\leqq y\leqq z$ から $0\leqq x<S$

$\because$ $0\leqq x\leqq y\leqq z$ から $3x\leqq x+y+z=3S$

よって．$x\leqq S$

$x=S$ と仮定すると $S=x\leqq y\leqq z, y+z=2S$ から $x=y=z=S$

$x^p+y^p+z^p=3R^p$ を用いると $3S^p=3R^p$ となり $S=R$ を得る．これは $R>S$ に矛盾する．よって，$x<S$

さて

$$h=\frac{2}{y+z}\left(\frac{y^p+z^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}-1$$

とおくと，$f_1(x)=x^p\,(x>0)$ は凸関数だから

$$\frac{y^p+z^p}{2}\geqq\left(\frac{y+z}{2}\right)^p \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{y^p+z^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\geqq\frac{y+z}{2}$$

(等号は $y=z$ のときに限り成り立つ．)

この不等式を使うと

$$h\geqq\frac{2}{y+z}\cdot\frac{y+z}{2}-1=0$$

等号は $y=z$ のときに限り成り立つ．

h を x で表すことを考える．

$y+z=3S-x,\ \dfrac{y^p+z^p}{2}=\dfrac{3R^p-x^p}{2}$ より

$$h=\frac{2}{3S-x}\left(\frac{3R^p-x^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}-1$$

x の関数として $h(x)=\dfrac{2}{3S-x}\left(\dfrac{3R^p-x^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}-1\quad(0\leqq x<S<R)$ とおくと，

$$h'(x) = \frac{3}{(3S-x)^2}\left(\frac{3R^p - x^p}{2}\right)^{\frac{1-p}{p}}(R^p - Sx^{p-1}) > 0$$

したがって，$h(x)$ は増加関数である．

$$\lim_{x \to S-0} h(x) = \frac{2}{3S-S}\left(\frac{3R^p - S^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 > \frac{1}{S}\left(\frac{3S^p - S^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 = 0$$

より $\displaystyle\lim_{x \to S-0} h(x) > 0$ であるが

$$h(0) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1-p}{p}} \frac{R}{S} - 1$$

の符号は不明である．したがって，x_1 は次のように選ぶ．

$h(0) \geqq 0$ のときは $x_1 = 0$ とする．

$h(0) < 0$ のときは，$h(x) = 0$ となる正の実数解が存在するからをこれを x_1 とする．

すなわち，$h(x_1) = 0,\ x_1 > 0$

常に $h(x) \geqq 0$ であったから，条件式を満たす x は $x \geqq x_1$ であることがわかる．

(i) $x = x_1(\geqq 0)$ の場合

$h(0) \geqq 0$ のとき $x_1 = 0$ より

$$0 = x_1 < y(x_1) \leqq z(x_1)$$

∵ まず，次の不等式を証明しておく．

$b, c > 0$ のとき $(b+c)^p > b^p + c^p$

$a, b, c > 0$ のとき $(a+b+c)^p > a^p + b^p + c^p$

$b, c > 0$ として，$f_2(x) = (x+c)^p - x^p - c^p\ (x \geqq 0)$ とおくと

$f_2'(x) = p\left\{(x+c)^{p-1} - x^{p-1}\right\} > 0$ より $f_2(x)$ は $x \geqq 0$ で増加関数である．

よって，$x > 0$ のとき $f_2(x) > f_2(0) = 0$ から $f_2(b) > 0$ がいえる．

次に，$a, b, c > 0$ として，$f_3(x) = (x+b+c)^p - x^p - b^p - c^p\ (x \geqq 0)$ とおくと

$f_3'(x) = p\left\{(x+b+c)^{p-1} - x^{p-1}\right\} > 0$ より $f_3(x)$ は $x \geqq 0$ で増加関数である．

よって，$x > 0$ のとき $f_3(x) > f_3(0) = (b+c)^p - b^p - c^p = f_2(b) > 0$ から $f_3(a) > 0$ がいえる．

$0 = x_1 = y(x_1)$ と仮定すると，$z(x_1) = a + b + c, z(x_1)^p = a^p + b^p + c^p$ から $(a + b + c)^p = a^p + b^p + c^p$ となる．

$a, b, c \geqq 0$ で 0 となるのは高々 1 個であるから，上で示した不等式から，この等式は成り立たない．

よって，$0 = x_1 < y(x_1) \leqq z(x_1)$

$h(0) < 0$ のときは $h(x_1) = 0, x_1 > 0$ であったから $y(x_1) = z(x_1)$

したがって，$0 < x_1 < y(x_1) = z(x_1)$ となる．

$\because$ $x_1 = y(x_1) = z(x_1)$ だと，$x_1 = y(x_1) = z(x_1) = S, x_1^p = y(x_1)^p = z(x_1)^p = R^p$ から $R = S$ となり

$R > S$ に矛盾する．

よって，$0 < x_1 < y(x_1) = z(x_1)$

(ii) $x > x_1$ の場合

$h(x) > 0$ から $y < z$ が得られる，

y と z は x の関数と考えられる．

$x + y + z = 3S$ の両辺を x で微分すると

$$1 + y' + z' = 0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$x^p + y^p + z^p = 3R^p$ の両辺を x で微分すると

$$x^{p-1} + y^{p-1}y' + z^{p-1}z' = 0 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤,⑥ から

$$y' = \frac{x^{p-1} - z^{p-1}}{z^{p-1} - y^{p-1}}, \quad z' = \frac{y^{p-1} - x^{p-1}}{z^{p-1} - y^{p-1}}$$

$0 < x \leqq y < z$ より $y' < 0$

したがって，$y(x)$ は減少関数である．

$y(x_1) \leqq x_1$ と仮定すると，$x_1 < x \leqq y$ より $y(x_1) > y(x) = y$ となり

$x_1 \geqq y(x_1) > y(x) = y$ すなわち，$x_1 > y$

これは，$x_1 < x \leqq y$ に矛盾する．

よって，$y(x_1) > x_1$ が成り立つ．

$F(x) = y(x) - x$ とおくと，$F'(x) = y'(x) - 1 < 0$ より，$F(x)$ は減少関数で

$$F(x_1) = y(x_1) - x_1 > 0, \quad \lim_{x \to S-0} F(x) < 0$$

$\because$ $0 < x \leqq y < z, x+y+z = 3S$ から

$$2y < y+z = 3S - x \quad すなわち \quad y < \frac{3S-x}{2}$$

$\lim_{x \to S} y \leqq S$ となるので，$\lim_{x \to S-0} F(x) \leqq 0$

$\lim_{x \to S-0} F(x) = 0$ と仮定すると，$\lim_{x \to S-0} y(x) = S$

$\lim_{x \to S-0} z(x) = \lim_{x \to S-0} (3S - x - y) = S$

$x^p + y^p + z^p = 3R^p$ において $x \to S-0$ とすると，$3S^p = 3R^p$ すなわち $S = R$ となり，$S < R$ に矛盾する．

よって，$\lim_{x \to S-0} F(x) < 0$

このことから，$F(x_2) = 0$ となる $x_2\,(x_1 < x_2)$ が存在し，次のことが成り立つ．

$x_1 < x_2, \quad y(x_2) = x_2$

$x_1 < x < x_2$ のとき $y(x) > x$

$x_2 < x$ のとき $y(x) < x$

$y \geqq x$ であることを考慮すると，条件式を満たす x は $x_1 < x \leqq x_2$ でなければならない．

一方，$z' > 0 \quad (x_1 < x < x_2)$ が成り立つから，$z(x)$ は $x_1 \leqq x \leqq x_2$ において増加関数で

$x_1 < x < x_2$ のとき

$$z(x) > z(x_1) = y(x_1) > y(x) \quad すなわち \quad z > y$$

よって，$x < y < z$

また，$z(x_2) > z(x_1) = y(x_1) > y(x_2) = x_2$ より

$x = x_2$ のときは

$$x_2 = y(x_2) < z(x_2)$$

よって，$x = y < z$ ■

2.2　補助定理 2.2 の証明

[補助定理 2.2]　a, b, c は非負の実数で，すべてが等しいということがなく，高々 1 個だけが 0 となるものとする。
そして，$x, y, z\,(x \leqq y \leqq z)$ は非負の実数で
　$p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ のとき

$$x + y + z = a + b + c, \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p$$

　$p = 0$ のとき

$$x + y + z = a + b + c, \quad xyz = abc > 0$$

を満たすものとする。
　$f(u)$ は $(0, \infty)$ で微分可能な関数で，$g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ は $(0, \infty)$ で狭義の凸関数であるとし

$$F_3(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$$

とおく．
　このとき，次のことが成り立つ．

(1) $p \leqq 0$ ならば，F_3 は $0 < x = y < z$ に対してのみ最大となり，$0 < x < y = z$ に対してのみ最小となる．

(2) $p > 1$ で $f(u)$ が $u = 0$ で連続か $\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$ を満たすならば
F_3 は $0 < x = y < z$ に対してのみ最大となり，$x = 0$ か $0 < x < y = z$ に対してのみ最小となる．

　補助定理 2.1 から，2 つの非負の実数 x_1, x_2 が存在して，与えられた関係式を満たすとき，$x \in [x_1, x_2]$ であるが，$p > 1, x_1 = 0$ のときは，$f(u)$ が $u = 0$ で定義されない可能性があるので，$f(u)$ が $u = 0$ で連続であるか $\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$ の条件が追加されていることに注意したい．
　(2) が論文 [1] では次のようになっている

2. If $p > 0$ and either $f(u)$ is continuous at $u = 0$ or $\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$, then F_3 is maximal only for $0 < x = y < z$, and is minimal only for either $x = 0$ or $0 < x < y = z$.

[証明]　$F(x)=f(x)+f(y(x))+f(z(x))$ が開区間 (x_1, x_2) で $F'(x)>0$ を満たすことを示す.

$p \fallingdotseq 0$ のとき，$x+y+z=a+b+c, x^p+y^p+z^p=a^p+b^p+c^p$ の両辺を x で微分すると

$$1+y'+z'=0, \quad x^{p-1}+y^{p-1}y'+z^{p-1}z'=0$$

これから

$$y'=\frac{x^{p-1}-z^{p-1}}{z^{p-1}-y^{p-1}}, \quad z'=\frac{y^{p-1}-x^{p-1}}{z^{p-1}-y^{p-1}}$$

$p=0$ のとき，$x+y+z=a+b+c, \log x+\log y+\log z=\log(abc)$ の両辺を x で微分すると

$$1+y'+z'=0, \quad \frac{1}{x}+\frac{y'}{y}+\frac{z'}{z}=0$$

これから

$$y'=\frac{y(z-x)}{x(y-z)}=\frac{x^{-1}-z^{-1}}{z^{-1}-y^{-1}}, \quad z'=\frac{z(y-x)}{x(z-y)}=\frac{y^{-1}-x^{-1}}{z^{-1}-y^{-1}}$$

となり，$p=0$ の場合も含めて

$$y'=\frac{x^{p-1}-z^{p-1}}{z^{p-1}-y^{p-1}}, \quad z'=\frac{y^{p-1}-x^{p-1}}{z^{p-1}-y^{p-1}}$$

が成り立つ.

$g(x)=f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ より

$$g(x^{p-1})=f'(x)$$

だから

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)+y'f'(y)+z'f'(z)\\&=f'(x)+\frac{x^{p-1}-z^{p-1}}{z^{p-1}-y^{p-1}}f'(y)+\frac{y^{p-1}-x^{p-1}}{z^{p-1}-y^{p-1}}f'(z)\end{aligned}$$

となる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{F'(x)}{(x^{p-1}-y^{p-1})(x^{p-1}-z^{p-1})} \\
&= \frac{f'(x)}{(x^{p-1}-y^{p-1})(x^{p-1}-z^{p-1})} + \frac{f'(y)}{(y^{p-1}-z^{p-1})(y^{p-1}-x^{p-1})} \\
&\qquad + \frac{f'(z)}{(z^{p-1}-x^{p-1})(z^{p-1}-y^{p-1})} \\
&= \frac{g(x^{p-1})}{(x^{p-1}-y^{p-1})(x^{p-1}-z^{p-1})} + \frac{g(y^{p-1})}{(y^{p-1}-z^{p-1})(y^{p-1}-x^{p-1})} \\
&\qquad + \frac{g(z^{p-1})}{(z^{p-1}-x^{p-1})(z^{p-1}-y^{p-1})} \\
&\quad (\,X = x^{p-1},\, Y = y^{p-1},\, Z = z^{p-1} \quad \text{とおくと}\,) \\
&= \frac{g(X)}{(X-Y)(X-Z)} + \frac{g(Y)}{(Y-X)(Y-Z)} + \frac{g(Z)}{(Z-X)(Z-Y)}
\end{aligned}
$$

$x < y < z$ より $X < Y < Z$ または $X > Y > Z$ が成り立つ．

$X < Y < Z$ のときを考える．($X > Y > Z$ のときも同様に示せる．)

$g(x)$ は狭義の凸関数であるから

$Y = \dfrac{(Z-Y)X + (Y-X)Z}{(Y-X)+(Z-Y)} = \dfrac{Z-Y}{Z-X}X + \dfrac{Y-X}{Z-X}Z$ より

$$g(Y) < \frac{Z-Y}{Z-X}g(X) + \frac{Y-X}{Z-X}g(Z)$$

$$\frac{Z-Y}{Z-X}g(X) - g(Y) + \frac{Y-X}{Z-X}g(Z) > 0$$

両辺を $(Z-Y)(Y-X)\,(>0)$ で割ると

$$\frac{g(X)}{(X-Y)(X-Z)} + \frac{g(Y)}{(Y-X)(Y-Z)} + \frac{g(Z)}{(Z-X)(Z-Y)} > 0$$

すなわち

$$\frac{F'(x)}{(X-Y)(X-Z)} > 0$$

$(X-Y)(X-Z) > 0$ だから， $F'(x) > 0$

$p > 1, x_1 = 0$ かつ $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = -\infty$ 以外ならば，$f(u)$ は $u = 0$ で連続であるから，$F(x) = f(x) + f(y(x)) + f(z(x))$ を $[x_1, x_2]$ で考えることができる．

すると，$F(x)$ が $x = x_1$ で最小，$x = x_2$ で最大であるから補助定理 2.1 より次のことがいえる．

(1) $p \leqq 0$ ならば，F_3 は $0 < x = y < z$ に対してのみ最大となり，$0 < x < y = z$ に対してのみ最小となる．

(2) $p > 1$ で $x_1 > 0$ ならば，

F_3 は $0 < x = y < z$ に対してのみ最大となり，$0 < x < y = z$ に対してのみ最小となる．

$p > 1, x_1 = 0$ で，$\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$ の場合

$F(x)$ が $x = x_2$ で最大であるから補助定理 2.1 より次のことがいえる．

F_3 は $0 < x = y < z$ に対してのみ最大となる．

最小値に関しては，補助定理 2.1 からわかることのみである．条件をみたす x, y, z に関して，$0 = x < y \leqq z$ が成り立つ．最小値が存在すれば，$0 = x < y \leqq z$ に対してのみである．

以上をまとめると，次のようになる．

$p > 1$ で $f(u)$ が $u = 0$ で連続か $\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$ を満たすならば，

F_3 は $0 < x = y < z$ に対してのみ最大となり，$0 < x < y = z$ か $x = 0$ に対してのみ最小となる． ■

2.3　定理 2.3 の証明

定理 2.3 Equal Variable theorem (EV-Theorem)

$a_1, a_2, \ldots, a_n\ (n \geqq 3)$ は非負の実数とする。

そして，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ は非負の実数で

$p \in (-\infty, \infty)$，$p \fallingdotseq 0, p \fallingdotseq 1$ のとき

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$$

$p = 0$ のとき

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ x_1 x_2 \cdots x_n = a_1 a_2 \cdots a_n > 0$$

を満たすものとする。

$f(u)$ は $(0, \infty)$ で微分可能な関数で，$g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ は $(0, \infty)$ で狭義の凸関数であるとし

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

とおく.

このとき，次のことが成り立つ.

(1) $p \leqq 0$ ならば，F_n は $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となり，$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる.

(2) $p > 0$ で $f(u)$ が $u = 0$ で連続か $\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$ を満たすならば F_n は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となり，

$x_1 = 0$ か $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる.

[証明]　$p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ の場合

$p > 1, x_1 = 0, \lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$ の場合を除けば，$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は最大値と最小値をもつ.

(i) $p < 0$ の場合

条件

$$x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$$

を考えるので，$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ である．
F_n が $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ で最大となることを示すために，F_n が $0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1} \leqq b_n$, $b_1 < b_{n-1}$ を満たす $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最大値をとると仮定して矛盾を導く．
y_1, y_{n-1}, y_n は正の実数で

$$y_1 + y_{n-1} + y_n = b_1 + b_{n-1} + b_n,\ y_1^p + y_{n-1}^p + y_n^p = b_1^p + b_{n-1}^p + b_n^p$$

を満たすようにとる．$0 < b_1 < b_{n-1} \leqq b_n$ より，b_1, b_{n-1}, b_n はすべて等しくなることはなく，0 となるのはない．
補助定理 2.2 より，$G_3(y_1, y_{n-1}, y_n) = f(y_1) + f(y_{n-1}) + f(y_n)$ は
$0 < y_1 = y_{n-1} \leqq y_n$ に対してのみ最大となるから

$$G_3(y_1, y_{n-1}, y_n) = f(y_1) + f(y_{n-1}) + f(y_n) \leqq 2f(y_1) + f(y_n) = M$$

等号は，$0 < y_1 = y_{n-1} \leqq y_n$ に対してのみ成り立つ．
(y_1, y_{n-1}, y_n) は (b_1, b_{n-1}, b_n) もとれるので

$$f(b_1) + f(b_{n-1}) + f(b_n) < M$$

したがって

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \\ &\leqq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n) \\ &< M + f(b_2) + f(b_3) + \cdots + f(b_{n-2}) \end{aligned}$$

これは，F_n が $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最大値をとることに矛盾する．
よって，F_n が $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ で最大となる．
F_n が $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ で最小となることを示すために，F_n が $0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1} \leqq b_n$, $b_2 < b_n$ を満たす $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最小値をとると仮定して矛盾を導く．
y_1, y_2, y_n は正の実数で

$$y_1 + y_2 + y_n = b_1 + b_2 + b_n,\ y_1^p + y_2^p + y_n^p = b_1^p + b_2^p + b_n^p$$

を満たすようにとる．$0 < b_1 \leqq b_2 < b_n$ より，b_1, b_{n-1}, b_n はすべて等しくなることはなく，0 となるのはない．

補助定理 2.2 より，$G_3(y_1, y_2, y_n) = f(y_1) + f(y_2) + f(y_n)$ は $0 < y_1 \leqq y_2 = y_n$ に対してのみ最小となるから

$$G_3(y_1, y_2, y_n) = f(y_1) + f(y_2) + f(y_n) \geqq f(y_1) + 2f(y_2) = m$$

等号は，$0 < y_1 \leqq y_2 = y_n$ に対してのみ成り立つ．
(y_1, y_2, y_n) は (b_1, b_2, b_n) もとれるので

$$f(b_1) + f(b_2) + f(b_n) > m$$

したがって

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \\ &\geqq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n) \\ &> m + f(b_3) + f(b_4) + \cdots + f(b_{n-1}) \end{aligned}$$

これは，F_n が $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最小値をとることに矛盾する．
よって，F_n が $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ で最小となる．

(ii) $p = 0$ の場合
F_n が $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ で最大となることを示すために，F_n が $0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1} \leqq b_n$, $b_1 < b_{n-1}$ を満たす $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最大値をとると仮定して矛盾を導く．
y_1, y_{n-1}, y_n は正の実数で

$$y_1 + y_{n-1} + y_n = b_1 + b_{n-1} + b_n,\ y_1 y_{n-1} y_n = b_1 b_{n-1} b_n$$

を満たすようにとる．$0 < b_1 < b_{n-1} \leqq b_n$ より，b_1, b_{n-1}, b_n はすべて等しくなることはなく，0 となるのはない．
補助定理 2.2 より，$G_3(y_1, y_{n-1}, y_n) = f(y_1) + f(y_{n-1}) + f(y_n)$ は $0 < y_1 = y_{n-1} \leqq y_n$ に対してのみ最大となるから

$$G_3(y_1, y_{n-1}, y_n) = f(y_1) + f(y_{n-1}) + f(y_n) \leqq 2f(y_1) + f(y_n) = M$$

等号は，$0 < y_1 = y_{n-1} \leqq y_n$ に対してのみ成り立つ．
(y_1, y_{n-1}, y_n) は (b_1, b_{n-1}, b_n) もとれるので

$$f(b_1) + f(b_{n-1}) + f(b_n) < M$$

したがって

$$\begin{aligned}F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\\ &\leqq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n)\\ &< M + f(b_2) + f(b_3) + \cdots + f(b_{n-2})\end{aligned}$$

これは，F_n が $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最大値をとることに矛盾する．

よって，F_n が $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ で最大となる．

F_n が $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ で最小となることを示すために，F_n が $0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1} \leqq b_n$, $b_2 < b_n$ を満たす $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最小値をとると仮定して矛盾を導く．

y_1, y_2, y_n は正の実数で

$$y_1 + y_2 + y_n = b_1 + b_2 + b_n,\ y_1 y_2 y_n = b_1 b_2 b_n$$

を満たすようにとる．$0 < b_1 \leqq b_2 < b_n$ より，b_1, b_{n-1}, b_n はすべて等しくなることはなく，0 となるのはない．

補助定理 2.2 より，$G_3(y_1, y_2, y_n) = f(y_1) + f(y_2) + f(y_n)$ は $0 < y_1 \leqq y_2 = y_n$ に対してのみ最小となるから

$$G_3(y_1, y_2, y_n) = f(y_1) + f(y_2) + f(y_n) \geqq f(y_1) + 2f(y_2) = m$$

等号は，$0 < y_1 \leqq y_2 = y_n$ に対してのみ成り立つ．

(y_1, y_2, y_n) は (b_1, b_2, b_n) もとれるので

$$f(b_1) + f(b_2) + f(b_n) > m$$

したがって

$$\begin{aligned}F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\\ &\geqq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n)\\ &> m + f(b_3) + f(b_4) + \cdots + f(b_{n-1})\end{aligned}$$

これは，F_n が $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最小値をとることに矛盾する．

よって，F_n が $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ で最小となる．

(iii) $p > 1$ の場合

F_n が $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ で最大となることを示すために，F_n が $0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1} \leqq b_n$, $b_1 < b_{n-1}$ を満たす $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最大値をとると仮定して矛盾を導く．

y_1, y_{n-1}, y_n は非負の実数で

$$y_1 + y_{n-1} + y_n = b_1 + b_{n-1} + b_n,\ y_1^p + y_{n-1}^p + y_n^p = b_1^p + b_{n-1}^p + b_n^p$$

を満たすようにとる．$0 \leqq b_1 < b_{n-1} \leqq b_n$ より，b_1, b_{n-1}, b_n はすべて等しくなることはなく，0 となるのは高々 1 個である．
補助定理 2.2 より，$G_3(y_1, y_{n-1}, y_n) = f(y_1) + f(y_{n-1}) + f(y_n)$ は $0 < y_1 = y_{n-1} \leqq y_n$ に対してのみ最大となるから

$$G_3(y_1, y_{n-1}, y_n) = f(y_1) + f(y_{n-1}) + f(y_n) \leqq 2f(y_1) + f(y_n)M$$

等号は，$0 < y_1 = y_{n-1} \leqq y_n$ に対してのみ成り立つ．
(y_1, y_{n-1}, y_n) は (b_1, b_{n-1}, b_n) もとれるので

$$f(b_1) + f(b_{n-1}) + f(b_n) < M$$

したがって

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \\ &\leqq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n) \\ &< M + f(b_2) + f(b_3) + \cdots + f(b_{n-2}) \end{aligned}$$

これは，F_n が $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最大値をとることに矛盾する．
よって，F_n が $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ で最大となる．
F_n が $0 \leqq x_1 \leqq x_2 = x_3 \cdots = x_n$ で最小となることを示すために，F_n が $0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_{n-1} \leqq b_n,\ b_2 < b_n$ を満たす $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最小値をとると仮定して矛盾を導く．
y_1, y_2, y_n は非負の実数で

$$y_1 + y_2 + y_n = b_1 + b_2 + b_n,\ y_1^p + y_2^p + y_n^p = b_1^p + b_2^p + b_n^p$$

を満たすようにとる．$0 \leqq b_1 \leqq b_2 < b_n$ より，b_1, b_{n-1}, b_n はすべて等しくなることはなく，0 となるのは高々 1 個である．
補助定理 2.2 より，$G_3(y_1, y_2, y_n) = f(y_1) + f(y_2) + f(y_n)$ は $0 < y_1 \leqq y_2 = y_n$ に対してのみ最小となるから

$$G_3(y_1, y_2, y_n) = f(y_1) + f(y_2) + f(y_n) \geqq f(y_1) + 2f(y_2) = m$$

等号は，$0 < y_1 \leqq y_2 = y_n$ に対してのみ成り立つ．

(y_1, y_2, y_n) は (b_1, b_2, b_n) もとれるので

$$f(b_1) + f(b_2) + f(b_n) > m$$

したがって

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \\ &\geqq f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n) \\ &> m + f(b_3) + f(b_4) + \cdots + f(b_{n-1}) \end{aligned}$$

これは，F_n が $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ で最小値をとることに矛盾する．

よって，F_n が $0 \leqq x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ で最小となる．

(iv) $p \in (0, 1)$ の場合

この場合は，$p > 1$ の場合に帰着させることができる．

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$

において $q = \dfrac{1}{p}(> 1)$, $y_i = x_i^{\frac{1}{q}} = x_i^p$, $b_i = a_i^{\frac{1}{q}} = a_i^p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

とおくと

$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，$y_1^q + y_2^q + \cdots + y_n^q = b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q$

となる．

また

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \\ &= f(y_1^q) + f(y_2^q) + \cdots + f(y_n^q) \\ &= f_1(y_1) + f_1(y_2) + \cdots + f_1(y_n) \end{aligned}$$

となる．ただし，$f_1(x) = f(x^q)$ とおいた．

次に $f_1'\left(x^{\frac{1}{q-1}}\right)$ を考える．

$f_1'(x) = qf'(x^q)x^{q-1}$ であるから

$$f_1'\left(x^{\frac{1}{q-1}}\right) = qf'\left(x^{\frac{q}{q-1}}\right)x = \frac{1}{p}xf'\left(x^{\frac{1}{1-p}}\right)$$

したがって，$h(x) = xf'\left(x^{\frac{1}{1-p}}\right)$ が $(0, \infty)$ で狭義の凸関数であることを示せばよい．

$h(x) = xf'\left(x^{\frac{1}{1-p}}\right)$, $g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ から

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = f'\left(x^{\frac{1}{1-p}}\right) = \frac{h(x)}{x}$$

$g(x)$ が $(0,\infty)$ で狭義の凸関数なので

$$ug\left(\frac{1}{x}\right)+vg\left(\frac{1}{y}\right)>(u+v)g\left(\frac{\frac{u}{x}+\frac{v}{y}}{u+v}\right)$$

$$\frac{u}{x}h(x)+\frac{v}{y}h(y)>(u+v)\frac{\frac{u}{x}+\frac{v}{y}}{u+v}h\left(\frac{u+v}{\frac{u}{x}+\frac{v}{y}}\right)$$

$u=tx, v=(1-t)y, t\in(0,1)$ を代入すると

$$th(x)+(1-t)h(y)>h\left(tx+(1-t)y\right)$$

これは，$h(x)$ が $(0,\infty)$ で狭義の凸関数であることを示している． ■

定理 2.3 で $p=2$ とおくことにより次の系 2.4 を得る．

系 2.4　$a_1, a_2, \ldots, a_n \ (n \geqq 3)$ は非負の実数とする。
そして，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ は非負の実数で

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

を満たすものとする。

$f(u)$ は $(0, \infty)$ で微分可能な関数で，$g(x) = f'(x)$ は $(0, \infty)$ で狭義の凸関数であるとし

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

とおく．

このとき，次のことが成り立つ．
$f(u)$ が $u=0$ で連続か $\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$ を満たすならば
F_n は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，
$x_1 = 0$ か $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

定理 2.3 で $p=-1$ とおくことにより次の系 2.5 を得る．

系 2.5　$a_1, a_2, \ldots, a_n \ (n \geqq 3)$ は正の実数とする。
そして，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ は正の実数で

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

を満たすものとする。

$f(u)$ は $(0, \infty)$ で微分可能な関数で，$g(x) = f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ は $(0, \infty)$ で狭義の凸関数であるとし

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

とおく．

このとき，次のことが成り立つ．
F_n は $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

定理 2.3 で $p=0$ とおくことにより次の系 2.6 を得る．

系 2.6　$a_1, a_2, \ldots, a_n\ (n \geqq 3)$ は正の実数とする。
そして，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ は正の実数で

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad x_1 x_2 \cdots x_n = a_1 a_2 \cdots a_n$$

を満たすものとする。
　$f(u)$ は $(0, \infty)$ で微分可能な関数で，$g(x) = f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は $(0, \infty)$ で狭義の凸関数であるとし

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

とおく．
　このとき，次のことが成り立つ．
F_n は $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

系 2.7　$a_1, a_2, \ldots, a_n\ (n \geqq 3)$ は非負の実数とする。
そして，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ は非負の実数で

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$$

を満たすものとする。ここで，p は実数で，$p \neq 0, p \neq 1$ とする．
　このとき，次のことが成り立つ．

(a) $p < 0$ の場合
　$P = x_1 x_2 \cdots x_n$ は $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最小で，
　$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最大となる．
(b) $p > 0$ のとき
　$P = x_1 x_2 \cdots x_n$ は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，
　$x_1 = 0$ か $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

系 2.8 $a_1, a_2, \ldots, a_n\ (n \geqq 3)$ は非負の実数とする。
そして，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ は非負の実数で
$p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ のとき

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$$

$p = 0$ のとき

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ x_1 x_2 \cdots x_n = a_1 a_2 \cdots a_n > 0$$

を満たすものとする。$E = x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q$ とおく．

このとき，次のことが成り立つ．

(1) $p \leqq 0$ の場合

(a) $q \in (p, 0) \cup (1, \infty)$ のとき
E は $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，
$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

(b) $q \in (-\infty, p) \cup (0, 1)$ のとき
E は $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最小で，
$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最大となる．

(2) $0 < p < 1$ の場合

(a) $q \in (0, p) \cup (1, \infty)$ のとき
E は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，
$x_1 = 0$ か $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

(b) $q \in (-\infty, 0) \cup (p, 1)$ のとき
E は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最小で，
$x_1 = 0$ か $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最大となる．

(3) $p > 1$ の場合

(a) $q \in (0, 1) \cup (p, \infty)$ のとき
E は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，
$x_1 = 0$ か $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

(b) $q \in (-\infty, 0) \cup (1, p)$ のとき
E は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最小で，
$x_1 = 0$ か $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最大となる．

系 2.9　$a_1, a_2, \dots, a_n\ (n \geqq 3)$ は非負の実数とする。
そして，$p \in \{2, 3\}$，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ は非負の実数で

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$$

を満たすものとする．$E = \displaystyle\sum_{1 \leqq i < j < k \leqq n} x_i x_j x_k$ とおく．

このとき，次のことが成り立つ．

E は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，

$x_1 = 0$ または $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

系 2.10　$a_1, a_2, \dots, a_n\ (n \geqq 3)$ は非負の実数とする。
そして，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ は非負の実数で

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2,\ x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$$

を満たすものとする．$E = \displaystyle\sum_{1 \leqq i < j < k \leqq n} x_i x_j x_k$ とおく．

このとき，次のことが成り立つ．

E は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，

$x_1 = 0$ または $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

[系 **2.7** の証明] $f(u) = p \log u$ に対して定理 2.3 を適用する．

$$f'(u) = \frac{p}{u},\ g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right) = p x^{\frac{1}{1-p}},\ g''(x) = \frac{p^2}{(1-p)^2} x^{\frac{2p-1}{p-1}}$$

$x > 0$ のとき，$g''(x) > 0$ だから，$g(x)$ は $(0, \infty)$ で狭義の凸関数である．

$$\begin{aligned}\log P &= \log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{p} \\ &= \frac{F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p}\end{aligned}$$

(b) $p > 0$ のとき

$\displaystyle\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$

$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，
$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

よって，$P = x_1x_2\cdots x_n$ は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

(a) $p < 0$ のとき

$$\begin{aligned}\log P &= \log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n \\ &= \frac{F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{p}\end{aligned}$$

であったから

$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大で，$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

よって，$P = x_1x_2\cdots x_n$ は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最小で，$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最大となる． ■

[系 **2.8** の証明]

$f(u) = q(q-1)(q-p)u^q$ に対して定理 2.3 を適用する．

$p > 0, q > 0$ のとき，$f(u)$ は $u = 0$ で連続で，

$p > 0, q < 0$ のとき，$\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$

$$\begin{aligned}f'(u) &= q^2(q-1)(q-p)u^{q-1}, \\ g(x) &= f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right) \\ &= q^2(q-1)(q-p)x^{\frac{q-1}{p-1}}, \\ g''(x) &= \frac{q^2(q-1)^2(q-p)^2}{(p-1)^2}x^{\frac{q-2p+1}{p-1}}\end{aligned}$$

$x > 0$ のとき，$g''(x) > 0$ だから，$g(x)$ は $(0, \infty)$ で狭義の凸関数である．結論は定理 2.3 より得られる． ■

[系 **2.9** の証明]

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^3 &= \sum_{i=1}^n x_i^3 + 3\sum_{i=1}^n \left\{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x_i^2 - x_i^3\right\} + 6\sum_{1 \leqq i < j < k \leqq n} x_ix_jx_k \\ &= 3\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - 2\sum_{i=1}^n x_i^3 + 6\sum_{1 \leqq i < j < k \leqq n} x_ix_jx_k\end{aligned}$$

から

$$6\sum_{1\leqq i\leqq j\leqq k\leqq n} x_i x_j x_k = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3 - 3\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \qquad \cdots\cdots(*)$$

$p=2$ の場合

等式 $(*)$ から E が最大となるのは $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^3$ が最大となるときで，E が最小となるのは $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^3$ が最小となるときである．

系 2.8 から $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^3$ が最大となり，$x_1 = 0$ または $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^3$ が最小となる．

$p=3$ の場合

等式 $(*)$ から E が最大となるのは $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ が最小となるときで，E が最小となるのは $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^3$ が最大となるときである．

系 2.8 から $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ が最小となり，$x_1 = 0$ または $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ が最大となる． ■

[系 **2.10** の証明]

$$6\sum_{1\leqq i< j< k\leqq n} x_i x_j x_k = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3 - 3\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \qquad \cdots\cdots(*)$$

また，$t = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$， $k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ とおき，関数 $f(t) = t^3 - 3kt\ (t \geqq \sqrt{k})$ を考えると，$f(t)$ は増加関数だから

E が最大となるのは $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ が最大となるときで，E が最小となるのは $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ が最小となるときである．

$y_i = x_i^2,\ b_i = a_i^2\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ とおき，系 2.8 $\left(p = \dfrac{3}{2},\ q = \dfrac{1}{2}\right)$ を適用すればよい．

$0 \leqq b_1, b_2, \ldots, b_n,\ 0 \leqq y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_n$ で

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,\ y_1^{\frac{3}{2}} + y_2^{\frac{3}{2}} + \cdots + y_n^{\frac{3}{2}} = b_1^{\frac{3}{2}} + b_2^{\frac{3}{2}} + \cdots + b_n^{\frac{3}{2}}$$

ならば，$y_1^{\frac{1}{2}} + y_2^{\frac{1}{2}} + \cdots + y_n^{\frac{1}{2}}$ が最大となるのは $0 \leqq y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} \leqq y_n$ すなわち E が最大となるのは $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のときで，$y_1^{\frac{1}{2}} + y_2^{\frac{1}{2}} + \cdots + y_n^{\frac{1}{2}}$ が最小となるのは $y_1 = 0$ または $0 < y_1 \leqq y_2 = y_3 \cdots = y_n$ すなわち E が最小となるのは $x_1 = 0$ または $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 \cdots = x_n$ となるときである． ■

3 Right Convex Function Theorem

以下の定理の証明については，[2] にあるものを筆者が個人的にまとめたなので，ぜひ原論文にあたっていただきたい．

定理 3.1 Right Convex Function Theorem （RCF - Theorem)

$f(u)$ は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され，$u \geqq s$ $(s \in I)$ で凸関数である．

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

が

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s, \quad x_2 = x_3 = \cdots = x_n \geqq s$$

を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して成り立つならば

$\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq s$ を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

(1) は成り立つ．

[定理 **3.1** の証明]　一般性を失うことなく $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ と仮定できる．

$s \geqq x_1$ ならば $s_1 \geqq x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ で，$f(u)$ は $u \geqq s$ で凸関数であるから，(1) は Jensen の不等式より成り立つ．

さて $x_1 < s$ と仮定する．$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq ns$ であるから

$$x_1 \leqq \cdots \leqq x_k < s \leqq x_{k+1} \leqq \cdots \leqq x_n$$

を満たす $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ が存在する．

> $\because$ $(x_1 - s) + (x_2 - s) + \cdots + (x_n - s) \geqq 0$ だから，ある $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在して，$x_i - s \geqq 0$
>
> $A = \{j | x_j - s \geqq 0\}$ とおき A の要素の最小のものを l とおくと，$l > 1$ となるので，$k = l - 1$ とおけばよい．
>
> すると，$k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, x_k - s < 0,\ x_{k+1} - s \geqq 0$ である．

$$S = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\ z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k},\ t = \frac{x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n}{n-k}$$

とおくと，$z \in I,\ t \in I,\ kz + (n-k)t = nS$

そして

$$z < s \leqq S < t$$

が成り立つ．

$\because$ $(n-k)t = nS - kz > nS - kS = (n-k)S$ から $t > S$

Jensen の不等式より

$$f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) + \cdots + f(x_n) \geqq (n-k)f(t) \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つから

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) + (n-k)f(t) \geqq nf(S) \qquad \cdots\cdots ②$$

を示せばよい．なぜならば，① + ② より (1) が得られるからである．

さて，$y_i = \dfrac{ns - x_i}{n-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ とおき，$s < y_i \leqq t$ を示す．

$\because$ 左側の不等式は $x_i < s$ に帰する．これは $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して成り立つ．

$$s < y_i \Longleftrightarrow s < \frac{ns - x_i}{n-1} \Longleftrightarrow (n-1)s < ns - x_i \Longleftrightarrow x_i < s$$

右側の不等式は次のように示すことができる．

$$y_i \leqq y_1 = \frac{ns - x_1}{n-1} \leqq \frac{nS - x_1}{n-1} = \frac{x_2 + \cdots + x_n}{n-1}$$

が成り立ち

$k = 1$ のとき，$\dfrac{x_2 + \cdots + x_n}{n-1} = t$

$k \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{x_2 + \cdots + x_n}{n-1} &= \frac{(x_2 + \cdots + x_k) + (x_{k+1} + \cdots + x_n)}{n-1} \\
&= \frac{(x_2 + \cdots + x_k) + (n-k)t}{n-1} \\
&< \frac{(k-1)s + (n-k)t}{n-1} \\
&< \frac{(k-1)t + (n-k)t}{n-1} \\
&= t
\end{aligned}$$

したがって，$y_i \leqq t$

$y_i = \dfrac{ns - x_i}{n-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ と $s < y_i$ から

$$\frac{x_i + (n-1)y_i}{n} = \frac{ns - x_i}{n} = s,\ y_i > s$$

となるので，仮定より

$$f(x_i)+f(y_i)+f(y_i)+\cdots+f(y_i)\geqq nf\left(\frac{x_i+(n-1)y_i}{n}\right)$$

すなわち

$$f(x_i)+(n-1)f(y_i)\geqq nf\,(s)$$

が成り立つ．

$i=1,2,\ldots,k$ とおいた不等式の辺々を加えると

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)\geqq knf(s)-(n-1)\left\{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_k)\right\}$$

したがって，② を示すために

$$knf(s)+(n-k)f(t)\geqq nf(S)+(n-1)\left\{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_k)\right\}\qquad\cdots\cdots③$$

を示せばよい．

$s_1=\dfrac{(n+k-1)s-kz}{n-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}
s<s_1&=\frac{(n+k-1)s-kz}{n-1}=\frac{ns+(k-1)s-kz}{n-1}\\
&\leqq\frac{nS+(k-1)s-kz}{n-1}=\frac{(k-1)s+nS-kz}{n-1}\\
&=\frac{(k-1)s+x_1+x_2+\cdots+x_n-(x_1+x_2+\cdots+x_k)}{n-1}\\
&=\frac{(k-1)s+x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n)}{n-1}=\frac{(k-1)s+(n-k)t}{n-1}\\
&\leqq\frac{(k-1)t+(n-k)t}{n-1}=t
\end{aligned}$$

∵ $s<s_1$ を示しておく．

$$s<s_1\Longleftrightarrow s<\frac{(n+k-1)s-kz}{n-1}\Longleftrightarrow(n-1)s<(n+k-1)s-kz\Longleftrightarrow z<s$$

さて，Karamat の不等式を適用しよう．

$$(s_1,\underbrace{s,s,\ldots,s}_{k-1})\succ(y_1,y_2,\ldots,y_k)$$

$\because$ $s < y_i\,(k=1,2,\ldots,k)$ と $s_1+(k-1)s = y_1+y_2\cdots+y_k$ を使うと

$$
\begin{aligned}
s_1 - y_1 &= y_1+y_2\cdots+y_k-(k-1)s-y_1\\
&= y_2\cdots+y_k-(k-1)s\\
&> (k-1)s-(k-1)s = 0\\
s_1+s-(y_1+y_2) &= y_1+y_2\cdots+y_k-(k-1)s+s-(y_1+y_2)\\
&= y_3\cdots+y_k-(k-2)s\\
&> (k-2)s-(k-2)s = 0\\
&\cdots\cdots\\
s_1+\underbrace{s+\cdots+s}_{k-1} &= y_1+y_2\cdots+y_k
\end{aligned}
$$

$f(u)$ は $u \geqq s$ で凸関数だから，Karamat の不等式より

$$f(s_1)+(k-1)f(s) \geqq f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_k)$$

が成り立つから，③ が成り立つためには

$$knf(s)+(n-k)f(t) \geqq nf(S)+(n-1)\left\{f(s_1)+(k-1)f(s)\right\}$$

すなわち

$$(n+k-1)f(s)+(n-k)f(t) \geqq nf(S)+(n-1)f(s_1) \qquad \cdots\cdots④$$

を示せばよい．

この不等式は Jensen の不等式からいえる．次の不等式に n と $n-1$ をそれぞれかけて加えればよい．

$$\frac{t-S}{t-s}f(s)+\frac{S-s}{t-s}f(t) \geqq f(S)$$

$$\frac{t-s_1}{t-s}f(s)+\frac{s_1-s}{t-s}f(t) \geqq f(s_1)$$

■

定理 3.1-2 Right Convex Function Theorem (RCF - Theorem)

$f(u)$ は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され，$u \geqq s\ (s \in I)$ で凸関数である．

$$f(x) + (n-1)f(y) \geqq nf(s)$$

が

$$x \leqq s \leqq y, \quad x + (n-1)y = ns$$

を満たすすべての $x, y \in I$ に対して成り立つならば

$\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq s$ を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成り立つ．

$g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ に対して，$x < s < y,\ x + (n-1)y = ns$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) &= f(x) - f(s) + (n-1)\{f(y) - f(s)\} \\ &= (x-s)g(x) + (n-1)(y-s)g(y) \\ &= (s-x)\{g(y) - g(x)\} \end{aligned}$$

だから，定理 3.1-2 の仮定の条件は次の定理 3.1-3 の条件と同値である．

（ $f(x) + (n-1)f(y) \geqq nf(s)$ は $x = s$ と $y = s$ のときは明らかに成り立つので，$x \leqq s \leqq y$ ではなく $x < s < y$ でよい．）

定理 3.1-3 Right Convex Function Theorem (RCF - Theorem)

$f(u)$ は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され，$u \geqq s\ (s \in I)$ で凸関数である．

$g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ に対して

$$g(x) \leqq g(y)$$

が $x < s < y,\ x + (n-1)y = ns$ を満たすすべての $x, y \in I$ に対して成り立つならば

$\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq s$ を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成り立つ．

定理 3.1-4 Right Convex Function Theorem (RCF - Theorem)

$f(u)$ は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され，I で微分可能で，$u \geqq s$ $(s \in I)$ で凸関数である．

$$f'(x) \leqq f'(y)$$

が $x \leqq s \leqq y$, $x + (n-1)y = ns$ を満たすすべての $x, y \in I$ に対して成り立つならば $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq s$ を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成り立つ．

[定理 **3.1-4** の証明]　$F(x) = f(x) + (n-1)f\left(\dfrac{ns - x}{n-1}\right) - nf(s)$ とおくと

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - f'\left(\frac{ns - x}{n-1}\right) \\ &= f'(x) - f'(y) \leqq 0 \end{aligned}$$

$F(x)$ は $x \leqq s$ で減少関数だから，$F(x) \geqq F(s) = 0$
よって，$f(x) + (n-1)f(y) \geqq nf\,(s)$ は成り立つから，定理 3.1-2 の仮定は定理 3.1-4 の条件で置き換えることができる．■

系 3.2 Right Convex Function Corollary

$f(u)$ は区間 $(0, \infty)$ で定義された連続関数とする．
$r > 0$ は定数で，$f_1(u) = f(e^u)$ が $[\log r, \infty)$ で凸関数で

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geqq nf(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}) \qquad \cdots\cdots(2)$$

が

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = r, \quad a_2 = a_3 = \cdots = a_n \geqq r$$

を満たすすべての $a_1, a_2, \ldots, a_n \,(> 0)$ に対して成り立つならば
$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqq r$ を満たすすべての $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して (2) が成り立つ．

[系 **3.2** の証明]　RCF-Theorem を $f_1(u) = f(e^u)$ に対して適用する．ただし，s を $\log r$ ，x_i を $\log a_i$ に置き換えるものとする．

詳しくみてみると，RCF-Theorem

$f(e^u)$ は区間 $\mathbb{R}$ で定義され，$[s,\infty)$ で凸関数である．

$$f(e^{x_1})+f(e^{x_2})+\cdots+f(e^{x_n}) \geqq nf\left(e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

が

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=s,\quad x_2=x_3=\cdots=x_n \geqq s$$

を満たすすべての $x_1,x_2,\ldots,x_n$ に対して成り立つならば

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq s$ を満たすすべての $x_1,x_2,\ldots,x_n$ に対して

(1) は成り立つ．

を次の同値変形を用いて書き直したものである．

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) \geqq nf(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\Longleftrightarrow f(e^{x_1})+f(e^{x_2})+\cdots+f(e^{x_n}) \geqq nf\left(e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=r,\quad a_2=a_3=\cdots=a_n \geqq r$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt[n]{e^{x_1}e^{x_2}\cdots e^{x_n}}=r,\quad e^{x_2}=e^{x_3}=\cdots=e^{x_n} \geqq r$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\log r(=s),\quad x_2=x_3=\cdots=x_n \geqq \log r(=s)$$

■

系 3.2-2 Right Convex Function Corollary

$f(u)$ は区間 $(0,\infty)$ で定義された連続関数とする．

$r>0$ は定数で，$f_1(u)=f(e^u)$ が $[\log r,\infty)$ で凸関数で

$$f(x)+(n-1)f(y) \geqq nf(r)$$

が

$$x \leqq r \leqq y,\quad xy^{n-1}=r^n$$

を満たすすべての $x,y\,(>0)$ に対して成り立つならば

$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geqq r$ を満たすすべての $a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) \geqq nf(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) \qquad \cdots\cdots(2)$$

が成り立つ．

系 3.2-3 Right Convex Function Corollary

$f(u)$ は区間 $(0,\infty)$ で定義された微分可能な関数とする．

$r>0$ は定数で，$f_1(u)=f(e^u)$ が $[\log r,\infty)$ で凸関数で

$$xf'(x)\leqq yf'(y)$$

が

$$x\leqq r\leqq y,\quad xy^{n-1}=r^n$$

を満たすすべての $x,y\,(>0)$ に対して成り立つならば

$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqq r$ を満たすすべての $a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\geqq nf(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) \qquad \cdots\cdots(2)$$

が成り立つ．

[系 **3.2-3** の証明]　$F(x)=f(x)+(n-1)f(y)-nf(r)$ とおくと

$xy^{n-1}=r^n$ から $y'=-\dfrac{y}{(n-1)x}$ だから

$$F'(x)=f'(x)+(n-1)f'(y)y'=f'(x)-\frac{yf'(y)}{x}=\frac{xf'(x)-yf'(y)}{x}\leqq 0$$

$F(x)$ は減少関数で，$x\leqq r$ のとき $F(x)\geqq F(r)=0$

ゆえに，$f(x)+(n-1)f(y)\geqq nf(r)$ ■

定理 3.3 Left Concave Function Theorem （LCF - Theorem)

$f(u)$ は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され，$u \leqq s$ $(s \in I)$ で凹関数である．

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(3)$$

が

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=s, \quad x_1=x_2=\cdots=x_{n-1} \leqq s$$

を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して成り立つならば

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqq s$ を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

(3) は成り立つ．

定理 3.3-2 Left Concave Function Theorem （LCF - Theorem)

$f(u)$ は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され，$u \leqq s$ $(s \in I)$ で凹関数である．

$$(n-1)f(x)+f(y) \leqq nf\,(s)$$

が

$$x \leqq s \leqq y, \quad (n-1)x+y=ns$$

を満たすすべての $x, y \in I$ に対して成り立つならば

$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqq s$ を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(3)$$

が成り立つ．

定理 3.3-3 Left Concave Function Theorem (LCF - Theorem)

$f(u)$ は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され，$u \leqq s$ $(s \in I)$ で凹関数である．

$g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ に対して

$$g(x) \geqq g(y)$$

が $x < s < y$, $(n-1)x + y = ns$ を満たすすべての $x, y \in I$ に対して成り立つならば

$\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq s$ を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(3)$$

が成り立つ．

定理 3.3-4 Left Concave Function Theorem (LCF - Theorem)

$f(u)$ は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義され，I で微分可能で，$u \leqq s$ $(s \in I)$ で凹関数である．

$$f'(x) \geqq f'(y)$$

が $x \leqq s \leqq y$, $(n-1)x + y = ns$ を満たすすべての $x, y \in I$ に対して成り立つならば

$\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqq s$ を満たすすべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \qquad \cdots\cdots(3)$$

が成り立つ．

系 3.4 Left Concave Function Corollary

$f(u)$ は区間 $(0,\infty)$ で定義された連続関数とする．
$r>0$ は定数で，$f_1(u)=f(e^u)$ が $(-\infty,\log r]$ で凹関数で

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) \leqq nf(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) \qquad \cdots\cdots(4)$$

が

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=r, \quad a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}\leqq r$$

を満たすすべての $a_1,a_2,\ldots,a_n\,(>0)$ に対して成り立つならば
$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqq r$ を満たすすべての $a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して (4) が成り立つ．

系 3.4-2 Left Concave Function Corollary

$f(u)$ は区間 $(0,\infty)$ で定義された連続関数とする．
$r>0$ は定数で，$f_1(u)=f(e^u)$ が $(-\infty,\log r]$ で凹関数で

$$(n-1)f(x)+f(y)\leqq nf(r)$$

が

$$x\leqq r\leqq y, \quad x^{n-1}y=r^n$$

を満たすすべての $x,y\,(>0)$ に対して成り立つならば
$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqq r$ を満たすすべての $a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) \leqq nf(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) \qquad \cdots\cdots(4)$$

が成り立つ．

系 3.4-3 Left Concave Function Corollary

$f(u)$ は区間 $(0,\infty)$ で定義された微分可能な関数とする．
$r>0$ は定数で，$f_1(u)=f(e^u)$ が $(-\infty,\log r]$ で凹関数で

$$xf'(x) \geqq yf'(y)$$

が

$$x \leqq r \leqq y, \quad x^{n-1}y=r^n$$

を満たすすべての $x,y\,(>0)$ に対して成り立つならば
$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geqq r$ を満たすすべての $a_1,a_2,\ldots,a_n$ に対して

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) \leqq nf(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) \qquad \cdots\cdots(4)$$

が成り立つ．

定理 3.5 Left Concave - Right Convex Function Theorem (LCRCF - Theorem)

$a < c$ は実数の定数，$f(u)$ は区間 $I = [a, \infty)$ で連続な関数で，$[a, c]$ で狭義の凹関数，$[c, \infty)$ で狭義の凸関数とする．

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in I, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S = constant$ ならば

$$E = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

は $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となる．

[定理 **3.5** の証明]　一般性を失うことなく $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定することができる．

$x_n \leqq c$ ならば Jensen の不等式から

$$E = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) = nf(S)$$

ゆえに，E は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のとき最大となる．

$x_n > c$ ならば

$$a \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_k \leqq x_k \leqq c < x_{k+1} \leqq \cdots \leqq x_n$$

となる $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ が存在する．

$$(x_{k+1} + \cdots + x_n - (n-k-1)c, \underbrace{c, \ldots, c}_{n-k-1}) \succ (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1})$$

だから 凸関数に対する Karamat の不等式より

$$f(x_{k+1}) + \cdots f(n) \leqq (n-k-1)f(c) + f(x_{k+1} + \cdots + x_n - (n-k-1)c) \qquad ①$$

凹関数に対する Jensen の不等式より

$$(n-k-1)f(c) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) \leqq (n-1)f\left(\frac{(n-k-1)c + x_1 + \cdots + x_k}{n-1}\right) \qquad ②$$

①，②の辺々を加えると

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqq (n-1)f(x) + f(y) \qquad ③$$

ただし

$$x = \frac{(n-k-1)c + x_1 + \cdots + x_k}{n-1},\ y = x_{k+1} + \cdots + x_n - (n-k-1)c$$

とおいた．
このとき，
$$(n-1)x+y=x_1+x_2+\cdots+x_n,\ x<y$$
が成り立つ．

$\because$

$$\begin{aligned}
&n-1)x+y\\
&=(n-k-1)c+x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+\cdots+x_n-(n-k-1)c\\
&=x_1+x_2+\cdots+x_n
\end{aligned}$$

$$x=\frac{(n-k-1)c+x_1+\cdots+x_k}{n-1}\leqq\frac{(n-k-1)c+kc}{n-1}=c<y$$

③ から，E は $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=x\leqq x_n=y$ のとき最大となる． ■

$I=(a,\infty)$ において連続な関数で $\lim_{u\to a+0}f(u)=-\infty$ を満たす場合も同様なことが成り立つ．

定理 3.5-2 Left Concave - Right Convex Function Theorem (LCRCF - Theorem)

$a<c$ は実数の定数，$f(u)$ は区間 $I=(a,\infty)$ において連続な関数で $\lim_{u\to a+0}f(u)=-\infty$ を満たし，$(a,c]$ で狭義の凹関数，$[c,\infty)$ で狭義の凸関数とする．
$x_1,x_2,\ldots,x_n\in I,\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=S=constant$ ならば
$$E=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$
は $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\leqq x_n$ のとき最大となる．

4　練習問題

問題 1　$x_i \geqq 1\,(i=1,2,\ldots,n)$ のとき

$$n+(x_1+x_2+\cdots+x_n) \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left(n+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

(不等式への招待　P.90)

(解答)　一般性を失うことなく $1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=n+(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left(n+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\sqrt{x_1x_n},x_2,\ldots,x_{n-1},\sqrt{x_1x_n})\\
&=x_1+x_n-2\sqrt{x_1x_n}-\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_n}}\right)\\
&=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_n})^2-\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left[\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_n})^2}{x_1x_n}\right]\\
&=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_n})^2\left(1-\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}{x_1x_n}\right)
\end{aligned}$$

$1 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ から $x_n \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ が成り立つので

$$x_1x_n \geqq x_n \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

したがって

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\sqrt{x_1x_n},x_2,\ldots,\sqrt{x_1x_n}) \geqq 0$$

SMV - Theorem より，$G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ とおくと

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geqq f(G,G,\ldots,G)$$

が成り立つ．

$$f(G,G,\ldots,G)=n+nG-G\left(n+\frac{n}{G}\right)=0 \text{ だから } f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geqq 0 \qquad \blacksquare$$

[注]　[9] 例題 5 で扱った問題である．

問題 2　(Pham Kim Hung)

$k>0$ を実数の定数，$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(abc)^k+(bcd)^k+(cda)^k+(dab)^k \leqq \max\left\{4,\left(\frac{4}{3}\right)^{3k}\right\}$$

(解答)　系 2.8 $(p=0,q=-k)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c\leqq d$ と仮定できる．

$$(abc)^k+(bcd)^k+(cda)^k+(dab)^k \leqq M$$

不等式を同次化すると

$$(abc)^k+(bcd)^k+(cda)^k+(dab)^k \leqq M\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^{3k}$$

となるので，条件 $a+b+c+d=4$ をはずして考えることができる．

$$(abc)^k+(bcd)^k+(cda)^k+(dab)^k \leqq M\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^{3k}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{a^k}+\frac{1}{b^k}+\frac{1}{c^k}+\frac{1}{d^k} \leqq \frac{M}{(abcd)^k}\cdot\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^{3k}$$

$$a+b+c+d=constant,\ abcd=constant$$

ならば，$\dfrac{1}{a^k}+\dfrac{1}{b^k}+\dfrac{1}{c^k}+\dfrac{1}{d^k}$ は $0<a\leqq b=c=d$ のとき最大となる．

$$\frac{1}{a^k}+\frac{3}{b^k} \leqq \frac{M}{(ab^3)^k}\cdot\left(\frac{a+3b}{4}\right)^{3k}$$

を考える．この不等式の両辺に a^k をかけ，$t=\dfrac{a}{b}$ とおくと, $0<t\leqq 1$ で

$$1+3t^k \leqq M\left(\frac{t+3}{4}\right)^{3k}$$

$$1+3t^k \leqq M\left(\frac{t+3}{4}\right)^{3k} \Longleftrightarrow \frac{4^{3k}}{M} \leqq \frac{(t+3)^{3k}}{1+3t^k}$$

より

$$f(t)=\frac{(t+3)^{3k}}{1+3t^k}\ (0<t\leqq 1)$$

とおくと

$$f'(t)=\frac{3k(t+3)^{3k-1}(2t^k-3t^{k-1}+1)}{(1+3t^k)^2}$$

$g(t)=2t^k-3t^{k-1}+1$ とおくと，$g'(t)=t^{k-2}\{2kt-3(k-1)\}$

(i) $k \geqq 3$ の場合

$\dfrac{3(k-1)}{2k} \geqq 1$ だから，$0<t<1$ のとき $g'(t)<0$

$0<t \leqq 1$ で $g(t)$ は減少関数となり，$g(t) \geqq g(1)=0$

よって，$f'(t) \geqq 0$ だから，$0<t \leqq 1$ で $f(t)$ は増加関数となり，$\displaystyle\lim_{t\to+0} f(t)=3^{3k}$

ゆえに，$3^{3k} \geqq \dfrac{4^{3k}}{M}$ から $M \geqq \left(\dfrac{4}{3}\right)^{3k}$

(ii) $0<k \leqq 1$ の場合

$g'(t)>0$ だから $0<t \leqq 1$ で $g(t)$ は増加関数となり，$g(t) \leqq g(1)=0$

よって，$f'(t) \leqq 0$ だから，$0<t \leqq 1$ で $f(t)$ は減少関数となり，$f(t) \geqq f(1)=\dfrac{4^{3k}}{4}$

ゆえに，$\dfrac{4^{3k}}{4} \geqq \dfrac{4^{3k}}{M}$ から $M \geqq 4$

(iii) $1<k<3$ の場合

$0<\dfrac{3(k-1)}{2k}<1$ だから $g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\dfrac{3(k-1)}{2k}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	(1)	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0

増減表から，$g(t)=0$ となる $t=\alpha\,(0<\alpha<1)$ がある．

$f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$\lim_{t\to+0} f(t)=3^{3k},\quad f(1)=\frac{4^{3k}}{4}$$

より

$$f(t) \geqq \min\left\{3^{3k}, \frac{4^{3k}}{4}\right\} \geqq \frac{4^{3k}}{M}$$

よって

$$M \geqq \max\left\{4, \left(\frac{4}{3}\right)^{3k}\right\}$$

以上のことから，$M = \max\left\{4, \left(\frac{4}{3}\right)^{3k}\right\}$ とすることができる． ■

問題 3　(Pham Kim Hung)

$a,\ b,\ c,\ d$ は非負の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geqq (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる.

$$f(a,b,c,d) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d) - f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)\\
&= (1+b^2)(1+d^2)\left[(1+a^2)(1+c^2) - \left\{1+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\right\}^2\right]\\
&\quad - (1+b)(1+d)\left[(1+a)(1+c) - \left(1+\frac{a+c}{2}\right)^2\right]\\
&= (1+b^2)(1+d^2)\left[\frac{(c-a)^2(8-a^2-6ac-c^2)}{16}\right]\\
&\quad - (1+b)(1+d)\left[-\frac{(c-a)^2}{4}\right]\\
&= (1+b^2)(1+d^2)\left[\frac{(c-a)^2(8-a^2-6ac-c^2)}{16}\right]\\
&\quad + (1+b)(1+d)\left[\frac{(c-a)^2}{4}\right]
\end{aligned}$$

$8-a^2-6ac-c^2 \geqq 0$ を示す.

$a+c \leqq b+d,\ (a+c)+(b+d)=4$ より $a+c \leqq 2$

このとき，相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$2 \geqq a+c \geqq 2\sqrt{ac}$$

から，$ac \leqq 1$

よって

$$a^2+6ac+c^2 = (a+c)^2+4ac \leqq 2^2+4\cdot 1 = 8$$

が成り立つから

$$f(a,b,c,d) \geqq f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)$$

$f(a,b,c,d)$ は a,b,c に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \geqq f(t,t,t,d),\ t=\frac{a+b+c}{3}$$

　$0 \leqq t \leqq 1 \leqq d,\ 3t+d=4$ のとき $f(t,t,t,d) \geqq 0$ すなわち

$$(1+t^2)^3(1+d^2) \geqq (1+t)^3(1+d)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&(1+t^2)^3(1+d^2)-(1+t)^3(1+d)\\
&=(1+t^2)^3\left\{1+(4-3t)^2\right\}-(1+t)^3(5-3t)\\
&=9t^8-24t^7+44t^6-72t^5+81t^4-68t^3+54t^2-36t+12\\
&=(t-1)^2(9t^6-6t^5+23t^4-20t^3+18t^2-12t+12)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&9t^6-6t^5+23t^4-20t^3+18t^2-12t+12\\
&=(9t^6-6t^5+t^4)+(22t^4-20t^3+18t^2)-12t+12\\
&=t^4(3t-1)^2+2t^2\underbrace{(11t^2-10t+9)}_{\geqq 0}+12(1-t)>0
\end{aligned}$$

だから，$(1+t^2)^3(1+d^2) \geqq (1+t)^3(1+d)$ は成り立つ． ■

　(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

　$f(x)=\log(1+x)-\log(1+x^2)\ (x \geqq 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \leqq 4f(\frac{a+b+c+d}{4})$$

となる．

$$f''(x)=\frac{x^4+4x^3-2x^2-4x-3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

$g(x)=x^4+4x^3-2x^2-4x-3$ とおくと

$$g'(x)=4(x^3+3x^2-x-1),\ g''(x)=4(3x^2+6x-1)$$

　$g''(x)=0$ は正の解をただ 1 つもつ．

これを $\alpha\,(0<\alpha<1)$ とおくと

　$0 \leqq x < \alpha$ のとき $g''(x)<0$，$\alpha < x$ のとき $g''(x)>0$ で

$g'(0)=-4,\ g'(1)=8$ だから $g'(x)=0$ は正の解をただ 1 つもつ．
これを $\beta\,(0<\beta<1)$ とおくと
$0 \leqq x<\beta$ のとき $g'(x)<0$，$\beta<x$ のとき $g'(x)>0$ で
$g(0)=-3,\ g(1)=-4,\ g(2)=29$ だから $g(x)=0$ は正の解をただ 1 つもつ．
これを $\gamma\,(1<\gamma<2)$ とおくと，$f(x)$ は $[0,\gamma]$ で凹関数である．
$s=\dfrac{a+b+c+d}{4}=1<\gamma$ とおくと，$f(x)$ は $[0,s]$ で凹関数であるから，LCF-Theorem より

$$a=b=c \leqq 1 \leqq d$$

のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$$0 \leqq x \leqq 1 \leqq y, 3x+y=4$$

のとき，$(1+x^2)^3(1+y^2) \geqq (1+x)^3(1+y)$ を示せばよい．
$F(x)=(1+x^2)^3(1+y^2)-(1+x)^3(1+y)$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=-3$ だから

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 6x(1+x^2)^2(1+y^2)+(1+x^2)^3\cdot 2yy'-3(1+x)^2(1+y)-(1+x)^3y' \\
&= 6x(1+x^2)^2(1+y^2)-6y(1+x^2)^3-3(1+x)^2(1+y)+3(1+x)^3 \\
&= 6(1+x^2)^2(x-y)(1-xy)+3(1+x)^2(x-y) \\
&= 3(x-y)\left\{2(1+x^2)^2(1-xy)+(1+x)^2\right\} \\
&= 3(x-y)\left\{2(1+x^2)^2(3x^2-4x+1)+(1+x)^2\right\} \\
&= 3(x-y)(6x^6-8x^5+14x^4-16x^3+11x^2-6x+3) \\
&= 3(x-y)(6x^6-8x^5+6x^4+8x^4-16x^3+8x^2+3x^2-6x+3) \\
&= 3(x-y)\left\{2\underbrace{(3x^2-4x+3)}_{\geqq 0}x^4+8(x-1)^2x^2+3(x-1)^2\right\} \leqq 0
\end{aligned}$$

$F(x)$ は減少関数で， $0 \leqq x \leqq 1$ で $F(x) \geqq F(1)=0$ ■

問題 4 (Pham Kim Hung)

a, b, c, d は正の実数で，$abcd = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geqq (a+b+c+d)^2$$

(解答) 一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$f(a,b,c,d) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) - (a+b+c+d)^2$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d) - f\left(\sqrt{ac}, b, \sqrt{ac}, d\right) \\
&= (1+b^2)(1+d^2)\left\{(1+a^2)(1+c^2) - (1+ac)^2\right\} \\
&\quad - (a+b+c+d)^2 + (b+d+2\sqrt{ac})^2 \\
&= (1+b^2)(1+d^2)(c-a)^2 - \left\{2(b+d) + (\sqrt{c}+\sqrt{a})^2\right\}(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 \\
&= (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\left[(1+b^2)(1+d^2)(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2 - \{2b+2d+(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2\}\right] \\
&= (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\left\{(b^2+d^2+b^2d^2)(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2 - 2(b+d)\right\}
\end{aligned}$$

$(b^2+d^2+b^2d^2)(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2 - 2(b+d) > 0$ を示す．

$$(b^2+d^2+b^2d^2)(\sqrt{c}+\sqrt{a})^2 \geqq (b^2+d^2+b^2d^2)\cdot 4\sqrt{ca} = \frac{4(b^2+d^2+b^2d^2)}{\sqrt{bd}}$$

だから

$$\frac{4(b^2+d^2+b^2d^2)}{\sqrt{bd}} > 2(b+d)$$

を示せばよい．

$$\frac{4(b^2+d^2+b^2d^2)}{\sqrt{bd}} > 2(b+d) \Longleftrightarrow 4(b^2+d^2+b^2d^2)^2 > (b+d)^2bd$$

で

$$\begin{aligned}
(b+d)^2bd &\leqq (b+d)^2\cdot\frac{(b+d)^2}{4} \\
&\leqq (b^2+d^2)^2 < (b^2+d^2+b^2d^2)^2 \\
&< 4(b^2+d^2+b^2d^2)^2
\end{aligned}$$

よって

$$f(a,b,c,d) \geqq f\left(\sqrt{ac}, b, \sqrt{ac}, d\right)$$

が成り立つ．

$f(a,b,c,d)$ は a,b,c に関する対称式だから

$$f(a,b,c,d) \geqq f\left(t,t,t,d\right),\, t=\sqrt[3]{abc}$$

$0<t \leqq 1 \leqq d$, $t^3d=1$ のとき，$f\left(t,t,t,d\right) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned} f\left(t,t,t,d\right) \geqq 0 &\Longleftrightarrow (1+t^2)^3(1+d^2) \geqq (3t+d)^2 \\ &\Longleftrightarrow (1+t^2)^3\left(1+\frac{1}{t^6}\right) \geqq \left(3t+\frac{1}{t^3}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow t^{12}+3t^{10}-6t^8+2t^6-3t^4+3t^2 \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow t^2(t-1)^2(t+1)^2(t^6+5t^4+3t^2+3) \geqq 0 \end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 5 (Pham Kim Hung)

$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+3a)(1+3b)(1+3c)(1+3d) \leqq 125+131abcd$$

(初等的な不等式 I 問題 99)

(解答) 一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．
$f(a,b,c,d)=(1+3a)(1+3b)(1+3c)(1+3d)-(125+131abcd)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d)-f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\\
&=(1+3a)(1+3c)\left[(1+3b)(1+3d)-\left\{1+\frac{3(b+d)}{2}\right\}^2\right]-131ac\left\{bd-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}\\
&=-\frac{9(b-d)^2(1+3a)(1+3c)}{4}+\frac{131ac(b-d)^2}{4}\\
&=-\frac{(b-d)^2}{4}\{9(1+3a)(1+3c)-131ac\}\\
&=-\frac{(b-d)^2}{4}\{9+27(a+c)-50ac\}
\end{aligned}$$

$9+27(a+c)-50ac>0$ を示す．
$a+c \leqq b+d,\ (a+c)+(b+d)=4$ より $a+c \leqq 2$ であるから

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{4}{a+c} \geqq 2 \quad ゆえに \quad a+c \geqq 2ac$$

これを使うと

$$9+27(a+c)>25(a+c) \geqq 50ac$$

よって

$$f(a,b,c,d) \leqq f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)$$

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d の対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \leqq f(a,t,t,t), \quad t=\frac{b+c+d}{3}$$

$0<a \leqq 1 \leqq t<\dfrac{4}{3},\ a+3t=4$ のとき

$$\begin{aligned}
f(a,t,t,t)&=(1+3a)(1+3t)^3-(125+131at^3)\\
&=(13-9t)(1+3t)^3-\left\{125+131(4-3t)t^3\right\}\\
&=150t^4-416t^3+270t^2+108t-112\\
&=2(t-1)^2(3t-4)(25t+14) \leqq 0
\end{aligned}$$

■

問題 6　(Vasile Cîrtoaje)

$a,\ b,\ c,\ d$ は非負の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+3a^2)(1+3b^2)(1+3c^2)(1+3d^2) \leqq 255+a^2b^2c^2d^2$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$f(a,b,c,d)=(1+3a^2)(1+3b^2)(1+3c^2)(1+3d^2)-(255+a^2b^2c^2d^2)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d)-f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\\
&=(1+3a^2)(1+3c^2)\left[(1+3b^2)(1+3d^2)-\left\{1+3\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}^2\right]\\
&\qquad -a^2c^2\left\{b^2d^2-\left(\frac{b+d}{2}\right)^4\right\}\\
&=(1+3a^2)(1+3c^2)\left[-\frac{3(b-d)^2(3b^2+18bd+3d^2-8)}{16}\right]\\
&\qquad -a^2c^2\left\{-\frac{(b-d)^2(b^2+6bd+d^2)}{16}\right\}\\
&=\frac{(b-d)^2}{16}\left\{a^2c^2(b^2+6bd+d^2)-3(1+3a^2)(1+3c^2)(3b^2+18bd+3d^2-8)\right\}
\end{aligned}$$

$a^2c^2(b^2+6bd+d^2)-3(1+3a^2)(1+3c^2)(3b^2+18bd+3d^2-8)<0$ を示す．

$A=b^2+6bd+d^2$ とおくと，$b+d \geqq 2$ だから，$A=(b+d)^2+4bd \geqq 4$ がなりたつから，$0<A \leqq 3A-8$

また，$a^2c^2<3(1+3a^2)(1+3c^2)$ だから，$a^2c^2A<3(1+3a^2)(1+3c^2)(3A-8)$ すなわち

$$a^2c^2(b^2+6bd+d^2)<3(1+3a^2)(1+3c^2)(3b^2+18bd+3d^2-8)$$

よって，$f(a,b,c,d) \leqq f\left(a,\dfrac{b+d}{2},c,\dfrac{b+d}{2}\right)$

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d に関する対称式だから，

$$f(a,b,c,d) \leqq f(a,t,t,t),\ t=\frac{b+c+d}{3}$$

したがって，$0 \leqq a \leqq 1 \leqq t,\ a+3t=4$ のとき

$$(1+3a^2)(1+3t^2)^3 \leqq 255+a^2t^6$$

を示せばよい．

$F(t)=(1+3a^2)(1+3t^2)^3-a^2t^6 \quad (0 \leqq a \leqq 1 \leqq t,\ a+3t=4)$ とおくと，$a'=-3$ で

$$
\begin{aligned}
F'(t)&=6aa'(1+3t^2)^3+18t(1+3a^2)(1+3t^2)^2-2aa't^6-6a^2t^5\\
&=-18a(1+3t^2)^3+18t(1+3a^2)(1+3t^2)^2+6at^6-6a^2t^5\\
&=18(1+3t^2)^2\left\{t(1+3a^2)-a(1+3t^2)\right\}+6at^5(t-a)\\
&=18(1+3t^2)^2(t-a)(1-3at)+6at^5(t-a)\\
&=6(t-a)\left[3(1+3t^2)^2(1-3at)+at^5\right]\\
&=6(t-a)\left[3(1+3t^2)^2\{1-3(4-3t)t\}+(4-3t)t^5\right]\\
&=6(t-a)(240t^6-320t^5+189t^4-216t^3+45t^2-36t+3)
\end{aligned}
$$

$g(t)=240t^6-320t^5+189t^4-216t^3+45t^2-36t+3 \quad \left(1 \leqq t \leqq \dfrac{4}{3}\right)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g'(t)&=2(720t^5-800t^4+378t^3-324t^2+45t-18)\\
&=2\left[(t-1)(720t^4-80t^3+298t^2-26t+19)+1\right]\\
&=2\left[(t-1)\left\{\underbrace{(720t^4-80t^3+200t^2)}_{>0}+\underbrace{(98t^2-26t+19)}_{>0}\right\}+1\right]>0
\end{aligned}
$$

$g(t)$ は増加関数で，$g(1)=-95<0,\ g\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{361}{3}>0$ だから，$g(t)=0$ は $1<t<\dfrac{4}{3}$ の範囲でただ 1 つの解をもつ．

これを α とおくと

$1 \leqq t < \alpha$ で $g(t)<0$，$\alpha < t \leqq \dfrac{4}{3}$ で $g(t)>0$ である．

したがって，$F(t)$ の増減は次のようになる．

t	1	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}$
$F'(t)$		$-$	0	$+$	
$F(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$F(1)=255,\ F\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{6859}{27}<255$ であるから，$F(t) \leqq 255$ ■

問題 7　(Pham Kim Hung)

$a,\ b,\ c,\ d$ は非負の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$(1+2a)(1+2b)(1+2c)(1+2d) \leqq 10(a^2+b^2+c^2+d^2)+41abcd$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる.

$f(a,b,c,d)=10(a^2+b^2+c^2+d^2)+41abcd-(1+2a)(1+2b)(1+2c)(1+2d)$ とおく.

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d)-f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\\
&=10\left\{b^2+d^2-2\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}+41ac\left\{bd-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}\\
&\quad-(1+2a)(1+2c)\left\{(1+2b)(1+2d)-(1+b+d)^2\right\}\\
&=5(b-d)^2-\frac{41}{4}ac(b-d)^2+(1+2a)(1+2c)(b-d)^2\\
&=(b-d)^2\left\{5-\frac{41}{4}ac+(1+2a)(1+2c)\right\}\\
&=(b-d)^2\left(6+2a+2c-\frac{25}{4}ac\right)
\end{aligned}$$

$6+2a+2c-\dfrac{25}{4}ac>0$ を示す.

$(a+c)+(b+d)=4, a+c \leqq b+d$ より $a+c \leqq 2$ だから $2 \geqq a+c \geqq 2\sqrt{ac}$

よって，$ac \leqq 1$

また

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{4}{a+c} \geqq 2$$

より，$a+c \geqq 2ac$ が成り立つから

$$\begin{aligned}
6+2a+2c-\frac{25}{4}ac &\geqq 6+4ac-\frac{25}{4}ac\\
&=6-\frac{9}{4}ac\\
&=\frac{9}{4}(1-ac)+\frac{15}{4}>0
\end{aligned}$$

したがって

$$f(a,b,c,d)-f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right) \geqq 0$$

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \geqq f(a,t,t,t),\quad t=\frac{b+c+d}{3}$$

が成り立つ．

$0 \leqq a \leqq 1 \leqq t,\ a+3t=4$ のとき

$$\begin{aligned}
f(a,t,t,t) &= 10(a^2+3t^2)+41at^3-(1+2a)(1+2t)^3 \\
&= 10(4-3t)^2+30t^2+41(4-3t)t^3-\bigl\{1+2(4-3t)\bigr\}(1+2t)^3 \\
&= -75t^4+164t^3+48t^2-288t+151 \\
&= (t-1)^2(-75t^2+14t+151)
\end{aligned}$$

$-75t^2+14t+151>0$ を示す．

$1 \leqq t \leqq \dfrac{4}{3}$ だから

$$75t^2 \leqq 75 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{400}{3} < 151$$

よって，$-75t^2+14t+151>0$ が成り立つから，$f(a,t,t,t) \geqq 0$ ■

問題 8　(Pham Kim Hung)

$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geqq \frac{10^4}{9^3}$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c\leqq d$ と仮定できる．

$f(a,b,c,d)=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d)-f\left(\frac{a+c}{2},b,\frac{a+c}{2},d\right)\\
&=(1+b^2)(1+d^2)\left[(1+a^2)(1+c^2)-\left\{1+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\right\}^2\right]\\
&=\frac{(1+b^2)(1+d^2)(a-c)^2(8-a^2-6ac-c^2)}{16}
\end{aligned}$$

$8-a^2-6ac-c^2\geqq 0$ を示す．

$(a+c)+(b+d)=4,\ a+c\leqq b+d$ より $a+c\leqq 2$

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$2\geqq a+c\geqq 2\sqrt{ac}$ から $ac\leqq 1$

よって

$$a^2+6ac+c^2=(a+c)^2+4ac\leqq 2^2+4\cdot 1=8$$

$8-a^2-6ac-c^2\geqq 0$ が成り立つので

$$f(a,b,c,d)\geqq f\left(\frac{a+c}{2},b,\frac{a+c}{2},d\right)$$

$f(a,b,c,d)$ a,b,c の対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d)\geqq f(t,t,t,d),\quad t=\frac{a+b+c}{3}$$

が成り立つ．

$g(t)=f(t,t,t,d)=(1+t^2)^3(1+d^2),\ 0<t\leqq 1\leqq d,\ 3t+d=4$ とおくと

$$\begin{aligned}
g'(t)&=6t(1+t^2)^2(1+d^2)+(1+t^2)^3\cdot 2dd'\\
&=6t(1+t^2)^2(1+d^2)-6d(1+t^2)^3\\
&=6(1+t^2)^2(t-d)(1-dt)\\
&=24(1+t^2)^2(t-1)^2(3t-1)
\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0
$g(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって

$$g(t) \geqq g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10^4}{9^3} \qquad \blacksquare$$

(解 2)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$f(x) = -\log(1+x^2)$ $(x \geqq 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \leqq -\log\frac{10^4}{9^3}$$

となる．

$$f''(x) = \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

から，$f(x)$ は $[0,1]$ で凹関数，$[1,\infty)$ で凸関数である．

LCRCF-Theorem より，$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$ は　$0 < a = b = c \leqq d$ のとき最大となる．

$a = b = c = t$ とおくと，$0 < t \leqq 1 \leqq d$ のとき，$(1+t^2)^3(1+d^2) \geqq \dfrac{10^4}{9^3}$ を示せばよい．後は解 1 参照．　$\blacksquare$

問題 9　(Pham Kim Hung)

　$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ は正の実数で，$a+b+c+d+e+f=6$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)(1+e^2)(1+f^2) \geqq (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)(1+f)$$

(解答)　一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c\leqq d\leqq e\leqq f$ と仮定できる．

$F(x)=\log(1+x)-\log(1+x^2)\ (x\geqq 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$F(a)+F(b)+F(c)+F(d)+F(e)+F(f)\leqq 6F\left(\frac{a+b+c+d+e+f}{6}\right)$$

となる．

$F(x)$ が凹関数となる x の範囲を調べる．

$$F''(x)=\frac{x^4+4x^3-2x^2-4x-3}{(1+x^2)^2(1+x)^2}$$

$G(x)=x^4+4x^3-2x^2-4x-3$ とおくと

$$G'(x)=4x^3+12x^2-4x-4,\quad G''(x)=12x^2+24x-4=4(3x^2+6x-1)$$

$G''(x)=0$ はただ 1 つの正の解 $\alpha=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}\ (0<\alpha<1)$ をもち

$0<x<\alpha$ で $G''(x)<0$，$\alpha<x$ で $G''(x)>0$

$G'(0)=-4<0,\ G'(1)=8>0$ より $G'(x)=0$ はただ 1 つの正の解 $\beta\,(0<\beta<1)$ をもち

$0<x<\beta$ で $G'(x)<0$，$\beta<x$ で $G'(x)>0$

$G(1)=-4<0,\ G(2)=29>0$ より $g(t)=0$ はただ 1 つの正の解 $\gamma\,(1<\gamma<2)$ をもち

$0<x<\gamma$ で $G(x)<0$，$\gamma<x$ で $G(x)>0$

よって，$F(x)$ は $[0,\gamma]$ で凹関数である．

$$s=\frac{a+b+c+d+e+f}{6}=1<\gamma$$

となる $s=1$ に対して，$F(x)$ は $x\leqq s=1$ で凹関数である．

LCF-Theorem より $a=b=c=d=e\leqq f$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$H(a)=5F(a)+F(f)\quad(0<a\leqq 1\leqq f,\, 5a+f=6)$ とおくと，$f'=-5$ で

$$\begin{aligned}
H(a)&=5\left\{\log(1+a)-\log(1+a^2)\right\}+\log(1+f)-\log(1+f^2)\\
H'(a)&=5\left\{\frac{1}{1+a}-\frac{2a}{1+a^2}\right\}+\frac{f'}{1+f}-\frac{2ff'}{1+f^2}\\
&=\frac{5}{1+a}-\frac{5}{1+f}-\frac{10a}{1+a^2}+\frac{10f}{1+f^2}\\
&=5(f-a)\left\{\frac{1}{(1+a)(1+f)}+\frac{2(1-af)}{(1+a^2)(1+f^2)}\right\}\\
&=30(1-a)\left[\frac{1}{(1+a)(7-5a)}+\frac{2(5a-1)(a-1)}{(1+a^2)\left\{1+(6-5a)^2\right\}}\right]\\
&=30(1-a)\cdot\frac{-25a^4+20a^3+98a^2-140a+51}{(1+a)(7-5a)(1+a^2)\left\{1+(6-5a)^2\right\}}
\end{aligned}$$

$0<a\leqq 1$ のとき $-25a^4+20a^3+98a^2-140a+51>0$ を示す．

$a=\dfrac{1}{s}$ とおくと，証明すべき不等式は

$$51s^4-140s^3+98s^2+20s-25>0$$

となる．$s\geqq 1$ だから $t=s-1\,(\geqq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&51s^4-140s^3+98s^2+20s-25>0\\
\iff&51(t+1)^4-140(t+1)^3+98(t+1)^2+20(t+1)-25>0\\
\iff&51t^4+64t^3-16t^2+4>0
\end{aligned}$$

$$51t^4+64t^3-16t^2+4=\underbrace{51t^4-16t^2+4}_{>0}+64t^3>0$$

だから，$H'(a)\geqq 0$ となる．

$H(a)$ は増加関数で，$0<a\leqq 1$ のとき $H(a)\leqq H(1)=0$ ■

問題 10　(Nguyen Minh Duc, IMO Short list)

$a,\ b,\ c,\ d$ は非負の実数で，$a+b+c+d=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$abc+bcd+cda+dab \leqq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$$

(初等的な不等式 I 問題 98)

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$f(a,b,c,d) = abc+bcd+cda+dab-\dfrac{176}{27}abcd = ac(b+d)+bd\left(c+a-\dfrac{176}{27}ca\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d)-f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right) &= \left(c+a-\frac{176}{27}ca\right)\left\{bd-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\} \\ &= -\frac{(b-d)^2}{4}\left(c+a-\frac{176}{27}ca\right) \end{aligned}$$

$c+a-\dfrac{176}{27}ca \geqq 0$ を示す．

$a+c \leqq b+d,\ (a+c)+(b+d)=1$ から $a+c \leqq \dfrac{1}{2}$

$a \fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{4}{a+c} \geqq 8 > \frac{176}{27} \quad \text{ゆえに} \quad c+a > \frac{176}{27}ca$$

$a=0$ のとき

$$c+a-\frac{176}{27}ca = c \geqq 0$$

したがって $c+a-\dfrac{176}{27}ca \geqq 0$ なので

$$f(a,b,c,d) \leqq f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)$$

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d についての対称式であるから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \leqq f(a,t,t,t), \quad t=\frac{b+c+d}{3}$$

このことから，$a+3t=1,\ a \leqq \dfrac{1}{4} \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

$$3at^2+t^3 \leqq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}at^3$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}\frac{1}{27}+\frac{176}{27}at^3-(3at^2+t^3) &= \frac{1}{27}+\frac{176}{27}(1-3t)t^3-3(1-3t)t^2-t^3\\ &= \frac{1}{27}\cdot\left\{176(1-3t)t^3+1-27t^3-81(1-3t)t^2\right\}\\ &= \frac{1-3t}{27}\cdot(176t^3+1+3t+9t^2-81t^2)\\ &= \frac{1-3t}{27}\cdot(176t^3-72t^2+3t+1)\\ &= \frac{(1-3t)(4t-1)^2(11t+1)}{27}\geqq 0\end{aligned}$$

よって

$$3at^2+t^3 \leqq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}at^3$$

は成り立つ． ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$a=0$ のとき

$b, c, d \geqq 0,\ b+c+d=1$ のとき $bcd \leqq \dfrac{1}{27}$ を示せばよい．

これは相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$\frac{1}{3}=\frac{b+c+d}{3}\geqq \sqrt[3]{bcd}$$

から $bcd \leqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \leqq \dfrac{1}{27}$ が得られる．

$0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ の場合

$$\begin{aligned} abc+bcd+cda+dab &\leqq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd\\ \Longleftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} &\leqq \frac{1}{27abcd}+\frac{176}{27}\end{aligned}$$

系 2.8 $(p=0, q=-1)$ を適用する．

$$a+b+c+d=constant,\ abcd=constant$$

ならば，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ は $0 < a \leqq b = c = d$ のとき最大となる．後は解 1 参照． ■

問題 11　$a,\ b,\ c,\ d$ は非負の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$16+2abcd \geqq 3(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= 16+2abcd-3(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &= 16+2abcd-3\left\{a(b+c+d)+c(b+d)+bd\right\} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} &f(a,b,c,d)-f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right) \\ &= 2ac\left\{bd-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}+3\left\{\left(\frac{b+d}{2}\right)^2-bd\right\} \\ &= \frac{(b-d)^2}{4}(3-2ac) \end{aligned}$$

$3-2ac>0$ が成り立つことを示す．

$a+c \leqq b+d,\ (a+c)+(b+d)=4$ から $a+c \leqq 2$

よって，$2 \geqq a+c \geqq 2\sqrt{ac}$ から $ac \leqq 1$ となるので，$3>2 \geqq 2ac$

以上のことから，$f(a,b,c,d) \geqq f\left(a, \dfrac{b+d}{2}, c, \dfrac{b+d}{2}\right)$ が成り立つ．

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \geqq f(a,t,t,t), \quad t=\frac{b+c+d}{3}$$

$0 \leqq a \leqq 1 \leqq t \leqq \dfrac{4}{3},\ a+3t=4$ のとき

$$\begin{aligned} f(a,t,t,t) &= 16+2at^3-3(3at+3t^2) = 16+2(4-3t)t^3-9(4-3t)t-9t^2 \\ &= -6t^4+8t^3+18t^2-36t+16 \\ &= 2(t-1)^2(4-3t)(t+2) \geqq 0 \end{aligned}$$

■

(解 2)　系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$a \fallingdotseq 0$ の場合

$$\begin{aligned} &16+2abcd \geqq 3(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ \Longleftrightarrow\ &16+2abcd \geqq \frac{3\left\{(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)\right\}}{2} \end{aligned}$$

$$a+b+c+d=4,\ abcd=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2+d^2$ は $0<a\leqq b=c=d$ のとき最小となる．残りは解 1 参照．

$a=0$ の場合

$b+c+d=4$ のとき，$16\geqq 3(bc+cd+db)$ を示せばよい．

これは，$(x+y+z)^2\geqq 3(xy+yz+zx)$ を用いると

$$16=(b+c+d)^2\geqq 3(bc+cd+db)$$

からいえる． ■

問題 12　$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ は非負の実数で，$a+b+c+d+e=5$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+5abcde \geqq 25$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$ と仮定できる．
$f(a,b,c,d,e)=4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+5abcde$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d,e)-f\left(a,\frac{b+e}{2},c,d,\frac{b+e}{2}\right)\\
&=4\left\{b^2+e^2-2\left(\frac{b+e}{2}\right)^2\right\}+5acd\left\{be-\left(\frac{b+e}{2}\right)^2\right\}\\
&=2(b-e)^2-\frac{5acd(b-e)^2}{4}\\
&=\frac{(b-e)^2}{4}(8-5acd)
\end{aligned}$$

$8-5acd>0$ を示す．

$$3\sqrt[3]{acd} \leqq a+c+d \leqq \frac{2}{3}(a+b+c+d+e)=\frac{10}{3}$$

から

$$acd \leqq \left(\frac{10}{9}\right)^3 < \frac{8}{5}$$

よって，$f(a,b,c,d,e) \geqq f\left(a,\dfrac{b+e}{2},c,d,\dfrac{b+e}{2}\right)$ が成り立つ．
SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d,e) \geqq f(a,t,t,t,t),\quad t=\frac{b+c+d+e}{4}$$

$0 \leqq a \leqq 1 \leqq t,\ a+4t=5$ のとき $4(a^2+4t^2)+5at^4 \geqq 25$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
4(a^2+4t^2)+5at^4-25 &= 16t^2-25+a(4a+5t^4)\\
&=-a(4t+5)+a(4a+5t^4)\\
&=a\left\{4(a-t)+5(t-1)(t^3+t^2+t+1)\right\}\\
&=a\left\{4(a-t)-(a-t)(t^3+t^2+t+1)\right\}\\
&=a(a-t)\left\{4-(t^3+t^2+t+1)\right\}\\
&=a(t-a)(t^3+t^2+t-3)\\
&=a(t-a)(t-1)(t^2+2t+3) \geqq 0
\end{aligned}$$

■

(解 2)　系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．
一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$ と仮定できる．
$a \neq 0$ の場合

$$a+b+c+d+e=5,\, abcde = constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ は $0 < a \leqq b=c=d=e$ のとき最小となる．
$0 < a \leqq 1 \leqq t,\, a+4t=5$ のとき $4(a^2+4t^2)+5at^4 \geqq 25$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
4(a^2+4t^2)+5at^4-25 &= 16t^2-25+a(4a+5t^4) \\
&= -a(4t+5)+a(4a+5t^4) \\
&= a\left\{4(a-t)+5(t-1)(t^3+t^2+t+1)\right\} \\
&= a\left\{4(a-t)-(a-t)(t^3+t^2+t+1)\right\} \\
&= a(a-t)\left\{4-(t^3+t^2+t+1)\right\} \\
&= a(t-a)(t^3+t^2+t-3) \\
&= a(t-a)(t-1)(t^2+2t+3) \geqq 0
\end{aligned}$$

$a=0$ の場合
証明すべき不等式は

$$4(b^2+c^2+d^2+e^2) \geqq 25$$

となる．これはコーシー・シュワルツの不等式を使うと

$$(1^2+1^2+1^2+1^2)(b^2+c^2+d^2+e^2) \geqq (b+c+d+e)^2 = 25$$

から成り立つことがわかる．■

問題 13　(Turkevici's Inequality)

$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ.

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2$$

(初等的な不等式 I 問題 125)

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c\leqq d$ と仮定できる.

$$\begin{aligned}f(a,b,c,d)&=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2)\\&=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-(a^2+c^2)(b^2+d^2)-a^2c^2-b^2d^2\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}f(a,b,c,d)-f(a,\sqrt{bd},c,\sqrt{bd})&=b^4+d^4-2b^2d^2-(a^2+c^2)(b^2+d^2-2bd)\\&=(b^2-d^2)^2-(a^2+c^2)(b-d)^2\\&=(b-d)^2\left\{(b+d)^2-(a^2+c^2)\right\}\\&=(b-d)^2\left\{(b^2-a^2)+(d^2-c^2)+2bd\right\}\geqq 0\end{aligned}$$

から

$$f(a,b,c,d)\geqq f(a,\sqrt{bd},c,\sqrt{bd})$$

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d)\geqq f(a,t,t,t),\ t=\sqrt[3]{bcd}$$

したがって，$a,t>0, a\leqq t$ のとき $f(a,t,t,t)\geqq 0$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}f(a,t,t,t)&=a^4+3t^4+2at^3-(3t^4+3a^2t^2)\\&=a^4+2at^3-3a^2t^2\\&=a(a-t)^2(a+2t)\geqq 0\end{aligned}$$

よって，$f(a,t,t,t)\geqq 0$　■

(解 2)　系 2.8 $(p=0,\ q=2)$ を適用する.

一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c\leqq d$ と仮定できる.

$A=a^2, B=b^2, C=c^2, D=d^2$ とおくと，証明すべき不等式は，$A,B,C,D>0$ のとき

$$A^2+B^2+C^2+D^2+2\sqrt{ABCD}\geqq AB+BC+CD+DA+AC+BD$$

となる．

$$
\begin{aligned}
&A^2+B^2+C^2+D^2+2\sqrt{ABCD} \geqq AB+BC+CD+DA+AC+BD \\
\Longleftrightarrow\ &A^2+B^2+C^2+D^2+2\sqrt{ABCD} \geqq \frac{(A+B+C+D)^2-(A^2+B^2+C^2+D^2)}{2} \\
\Longleftrightarrow\ &3(A^2+B^2+C^2+D^2)+4\sqrt{ABCD} \geqq (A+B+C+D)^2
\end{aligned}
$$

だから

$$A+B+C+D=constant,\ ABCD=costant$$

ならば，$A^2+B^2+C^2+D^2$ は $0<A \leqq B=C=D$ のとき最小となる．
よって，$0<a \leqq b=c=d$ のときを考えればよい．後は解 1 参照． ■

問題 14　(CGMO 2011)

$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数で，$abcd=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d} \geqq \frac{25}{4}$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$f(a,b,c,d)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}$$

とおく．

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d)-f(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d)\\
&=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{2}{\sqrt{ac}}+\frac{9}{a+b+c+d}-\frac{9}{b+d+2\sqrt{ac}}\\
&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{ac}-\frac{9(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{(a+b+c+d)(b+d+2\sqrt{ac})}\\
&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\bigl\{(a+b+c+d)(b+d+2\sqrt{ac})-9ac\bigr\}}{ac(a+b+c+d)(b+d+2\sqrt{ac})}
\end{aligned}$$

$0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と $a+c \geqq 2\sqrt{ac}$ を使うと

$$\begin{aligned}
(a+b+c+d)(b+d+2\sqrt{ac}) &\geqq (2a+2c)(a+c+2\sqrt{ac})\\
&\geqq 4\sqrt{ac}(2\sqrt{ac}+2\sqrt{ac})\\
&=16ac>9ac
\end{aligned}$$

よって，$f(a,b,c,d) \geqq f(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d)$

$f(a,b,c,d)$ は a,b,c に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \geqq f(\sqrt[3]{abc},\sqrt[3]{abc},\sqrt[3]{abc},d)$$

$x=\sqrt[3]{abc}, y=d$ とおくと，$0<x \leqq 1 \leqq y,\quad x^3y=1$ のとき

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{9}{3x+y} \geqq \frac{25}{4}$$

を示せばよい．

$x^3y=1$ の両辺を x で微分することにより $y'=-\dfrac{3y}{x}$

$g(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{9}{3x+y}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{3}{x^2} - \frac{y'}{y^2} - \frac{9(3+y')}{(3x+y)^2} \\
&= -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{xy} - \frac{27(x-y)}{x(3x+y)^2} \\
&= \frac{3(x-y)(9x^2-3xy+y^2)}{x^2y(3x+y)^2} \leqq 0
\end{aligned}
$$

$g(x)$ は減少関数で，$0 < x \leqq 1$ のとき $g(x) \geqq g(1) = \dfrac{25}{4}$ ■

(解 2)　系 2.8 $(p = 0, q = -1)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$a + b + c + d = constant, \quad abcd = 1$$

ならば，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$ は $0 < a = b = c \leqq d$ のとき最小となる．後は解 1 参照． ■

問題 15 (AoPS Forum)

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ は正の実数で，$abcde=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{16}{a+b+c+d+e} \geqq \frac{41}{5}$$

(解 1) 一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$ と仮定できる.

$$f(a,b,c,d,e)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{16}{a+b+c+d+e}-\frac{41}{5}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d,e)-f(\sqrt{ad},b,c,\sqrt{ad},e)\\
&=\frac{1}{a}+\frac{1}{d}-\frac{2}{\sqrt{ad}}+\frac{16}{a+b+c+d+e}-\frac{16}{b+c+e+2\sqrt{ad}}\\
&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{d})^2}{ad}-\frac{16(\sqrt{a}-\sqrt{d})^2}{(a+b+c+d+e)(b+c+e+2\sqrt{ad})}\\
&=(\sqrt{a}-\sqrt{d})^2\cdot\frac{(a+b+c+d+e)(b+c+e+2\sqrt{ad})-16ad}{ad(a+b+c+d+e)(b+c+e+2\sqrt{ad})}
\end{aligned}$$

$(a+b+c+d+e)(b+c+e+2\sqrt{ad})-16ad>0$ を示す.

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$\begin{aligned}
(a+b+c+d+e)(b+c+e+2\sqrt{ad}) &\geqq (3a+2d)(2a+d+2\sqrt{ad})\\
&\geqq 2\sqrt{6ad}(2\sqrt{2ad}+2\sqrt{ad})\\
&=4\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)ad>16ad
\end{aligned}$$

よって

$$f(a,b,c,d,e) \geqq f(\sqrt{ad},b,c,\sqrt{ad},e)$$

$f(a,b,c,d,e)$ は a,b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d,e) \geqq f(t,t,t,t,e),\ t=\sqrt[4]{abcd}$$

$0<t \leqq 1 \leqq e,\ t^4e=1$ のとき

$$\frac{4}{t}+\frac{1}{e}+\frac{16}{4t+e} \geqq \frac{41}{5}$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{t}+\frac{1}{e}+\frac{16}{4t+e} \geqq \frac{41}{5}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{4}{t}+t^4+\frac{16t^4}{1+4t^5} \geqq \frac{41}{5}
\end{aligned}$$

$g(t)=\dfrac{4}{t}+t^4+\dfrac{16t^4}{1+4t^5}\ (0<t\leqq 1)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= 4t^3-\frac{4}{t^2}-\frac{64(t^8-t^3)}{(1+4t^5)^2} \\
&= 4(t^5-1)\cdot\frac{(1+4t^5)^2-16t^5}{t^2(1+4t^5)^2} \\
&= \frac{4(t^5-1)(4t^5-1)^2}{t^2(1+4t^5)^2}\leqq 0
\end{aligned}
$$

$g(t)$ は減少関数で，$(0,1]$ で $g(t)\geqq g(1)=\dfrac{41}{5}$ ■

(解 2)　系 2.8 $(p=0,q=-1)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c\leqq d\leqq e$ と仮定できる．

$$a+b+c+d+e=constant,\quad abcde=1$$

ならば，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}$ は $0<a=b=c=d\leqq e$ のとき最小となる．後は解 1 参照． ■

問題 16　(Vasile Cîrtoaje)

正の実数 x_1, x_2, …, x_n は $x_1x_2\cdots x_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{4n}{n+x_1+x_2+\cdots+x_n}\geqq n+2$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ と仮定できる.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{4n}{n+x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

とおき

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\sqrt{x_1x_{n-1}},x_2,\ldots,x_{n-2},\sqrt{x_1x_{n-1}},x_n)\geqq 0$$

を示す.

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\sqrt{x_1x_{n-1}},x_2,\ldots,x_{n-2},\sqrt{x_1x_{n-1}},x_n)\\
&=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_{n-1}}}+\frac{4n}{n+x_1+x_2+\cdots+x_n}\\
&\quad-\frac{4n}{n+\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_n}\\
&=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_{n-1}})^2}{x_1x_{n-1}}\\
&\quad-\frac{4n(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_{n-1}})^2}{(n+x_1+x_2+\cdots+x_n)(n+2\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n)}\\
&=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_{n-1}})^2\\
&\quad\times\frac{(n+x_1+x_2+\cdots+x_n)(n+2\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n)-4nx_1x_{n-1}}{x_1x_{n-1}(n+x_1+x_2+\cdots+x_n)(n+2\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n)}
\end{aligned}$$

$$(n+x_1+x_2+\cdots+x_n)(n+2\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n)-4nx_1x_{n-1}>0\quad(*)$$

を示す.

$n=3$ のとき

$x_3\geqq 1$ だから $x_1x_2=\dfrac{1}{x_3}\leqq 1$

$$\begin{aligned}
(3+x_1+x_2+x_3)(3+2\sqrt{x_1x_2}+x_3)&\geqq(3+x_1+2x_2)(3+2\sqrt{x_1x_2}+x_2)\\
&>3(x_1+x_2)+6\sqrt{x_1x_2}\\
&\geqq 6\sqrt{x_1x_2}+6\sqrt{x_1x_2}\\
&=12\sqrt{x_1x_2}\geqq 12x_1x_2
\end{aligned}$$

から，$(*)$ は成り立つ.

$n \geqq 4$ の場合

$$
\begin{aligned}
&(n + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(n + 2\sqrt{x_1 x_{n-1}} + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-2} + x_n) \\
&\geqq \{n + (n-2)x_1 + 2x_{n-1}\}\left\{n + 2\sqrt{x_1 x_{n-1}} + (n-3)x_1 + x_{n-1}\right\} \\
&> (n-2)(n-3)x_1^2 + 2x_{n-1}^2 + \{(n-2)x_1 + 2x_{n-1}\} \cdot 2\sqrt{x_1 x_{n-1}} + (3n-8)x_1 x_{n-1} \\
&\geqq 2\sqrt{2(n-2)(n-3)}x_1 x_{n-1} + 2\sqrt{2(n-2)x_1 x_{n-1}} \cdot 2\sqrt{x_1 x_{n-1}} + (3n-8)x_1 x_{n-1} \\
&= \left\{2\sqrt{2(n-2)(n-3)} + 4\sqrt{2(n-2)} + 3n - 8\right\} x_1 x_{n-1} \\
&\geqq \left\{2\sqrt{2(n-2)(n-3)} + 4\sqrt{2(4-2)} + 3n - 8\right\} x_1 x_{n-1} \\
&= \left\{2\sqrt{2(n-2)(n-3)} + 3n\right\} x_1 x_{n-1}
\end{aligned}
$$

だから

$$2\sqrt{2(n-2)(n-3)} + 3n \geqq 4n$$

を示す．

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{2(n-2)(n-3)} + 3n \geqq 4n &\iff 2\sqrt{2(n-2)(n-3)} \geqq n \\
&\iff 8(n-2)(n-3) \geqq n^2 \\
&\iff 7n^2 - 40n + 48 \geqq 0 \\
&\iff (7n-12)(n-4) \geqq 0
\end{aligned}
$$

より，$(*)$ は成り立つ．

よって，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq f(\sqrt{x_1 x_{n-1}}, x_2, \ldots, x_{n-2}, \sqrt{x_1 x_{n-1}}, x_n)$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq f(t, t, \ldots, t, x_n)\,,\ t = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$$

したがって，$0 < t \leqq 1 \leqq x_n$, $t^{n-1}x_n = 1$ のとき

$f(t, t, \ldots, t, x_n) \geqq n + 2$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
f(t, t, \ldots, t, x_n) &= \frac{n-1}{t} + \frac{1}{x_n} + \frac{4n}{n + (n-1)t + x_n} \\
&= \frac{n-1}{t} + t^{n-1} + \frac{4nt^{n-1}}{nt^{n-1} + (n-1)t^n + 1}
\end{aligned}
$$

$g(t)=\dfrac{n-1}{t}+t^{n-1}+\dfrac{4nt^{n-1}}{(n-1)t^n+nt^{n-1}+1}$ $(0<t\leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&g'(t)\\
&=-\frac{n-1}{t^2}+(n-1)t^{n-2}+\frac{4n(n-1)(t^{n-2}-t^{2n-2})}{\left\{(n-1)t^n+nt^{n-1}+1\right\}^2}\\
&=\frac{(n-1)(t^n-1)}{t^2}-\frac{4n(n-1)(t^n-1)t^{n-2}}{\left\{(n-1)t^n+nt^{n-1}+1\right\}^2}\\
&=(n-1)(t^n-1)\left[\frac{1}{t^2}-\frac{4nt^{n-2}}{\left\{(n-1)t^n+nt^{n-1}+1\right\}^2}\right]\\
&=\frac{(n-1)(t^n-1)\left\{(n-1)^2t^{2n}+(2n^2-2n)t^{2n-1}+n^2t^{2n-2}-(2n+2)t^n+2nt^{n-1}+1\right\}}{t^2\left\{(n-1)t^n+nt^{n-1}+1\right\}^2}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&(n-1)^2t^{2n}+(2n^2-2n)t^{2n-1}+n^2t^{2n-2}-(2n+2)t^n+2nt^{n-1}+1\\
=&(n^2-2n)t^{2n}+(t^n-1)^2+2nt^{n-1}(1-t)+(2n^2-2n)t^{2n-1}+n^2t^{2n-2}>0
\end{aligned}$$

だから，$g'(t)\leqq 0$

$g(t)$ は減少関数で，$0<t\leqq 1$ のとき，$g(t)\geqq g(1)=n+2$ ■

(解 2)　系 2.8 $(p=0,q=-1)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ と仮定できる．

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=constant,\ x_1x_2\cdots x_n=1$$

ならば，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ は $0<x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\leqq x_n$ のとき最小となる．

後は解 1 参照． ■

問題 17　n は 4 以上の正の整数で，正の実数 x_1, x_2, $\ldots$, x_n は $x_1x_2\cdots x_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{3n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\geqq n+3$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ と仮定できる．

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{3n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

とおき，$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\sqrt{x_1x_{n-1}},x_2,\ldots,x_{n-2},\sqrt{x_1x_{n-1}},x_n)\geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(\sqrt{x_1x_{n-1}},x_2,\ldots,x_{n-2},\sqrt{x_1x_{n-1}},x_n)\\
&=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_{n-1}}}\\
&\quad+\frac{3n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}-\frac{3n}{\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_n}\\
&=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_{n-1}})^2}{x_1x_{n-1}}\\
&\quad-\frac{3n(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_{n-1}})^2}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)(2\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n)}\\
&=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_{n-1}})^2\\
&\quad\times\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)(2\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n)-3nx_1x_{n-1}}{x_1x_{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)(2\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n)}
\end{aligned}$$

$0<x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ と相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)(2\sqrt{x_1x_{n-1}}+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n)\\
&\geqq\{(n-2)x_1+2x_{n-1}\}\{(n-3)x_1+x_{n-1}+2\sqrt{x_1x_{n-1}}\}\\
&=(n-2)(n-3)x_1^2+2x_n^2+(3n-8)x_1x_{n-1}+2\{(n-2)x_1+2x_{n-1}\}\sqrt{x_1x_{n-1}}\\
&>(3n-8)x_1x_{n-1}+2\cdot2\sqrt{2(n-2)x_1x_{n-1}}\cdot\sqrt{x_1x_{n-1}}\\
&=\left\{(3n-8)+4\sqrt{2(n-2)}\right\}x_1x_{n-1}\\
&\geqq\left\{(3n-8)+4\sqrt{2(4-2)}\right\}x_1x_{n-1}\\
&=3nx_1x_{n-1}
\end{aligned}$$

したがって，$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqq f(\sqrt{x_1x_{n-1}},x_2,\ldots,x_{n-2},\sqrt{x_1x_{n-1}},x_n)$ が成り立つ．
$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ の対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqq f(x,x,\ldots,x,x_n),\ x=\sqrt[n-1]{x_1x_2\ldots x_{n-1}}$$

が成り立つ．

$y = x_n$ とおき，$0 < x \leqq 1 \leqq y,\ x^{n-1}y = 1$ のとき

$f(x, x, \ldots, x, y) \geqq n + 3$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
f(x, x, \ldots, x, y) &= \frac{n-1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3n}{(n-1)x + y} \\
&= \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{3n}{(n-1)x + \dfrac{1}{x^{n-1}}} \\
&= \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{3nx^{n-1}}{(n-1)x^n + 1}
\end{aligned}
$$

$$
g(x) = \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{3nx^{n-1}}{(n-1)x^n + 1} \ \ (0 < x \leqq 1)
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= (n-1)x^{n-2} - \frac{n-1}{x^2} - \frac{3n\left\{(n-1)x^{2n-2} - (n-1)x^{n-2}\right\}}{\{(n-1)x^n + 1\}^2} \\
&= \frac{(n-1)(x^n - 1)}{x^2} - \frac{3n(n-1)x^{n-2}(x^n - 1)}{\{(n-1)x^n + 1\}^2} \\
&= \frac{(n-1)(x^n - 1)\left[\left\{(n-1)x^n + 1\right\}^2 - 3nx^n\right]}{x^2\{(n-1)x^n + 1\}^2}
\end{aligned}
$$

不等式 $(a+b)^2 \geqq 4ab$ を用いると

$$
\left\{(n-1)x^n + 1\right\}^2 \geqq 4 \cdot 1 \cdot (n-1)x^n \geqq 3nx^n
$$

よって，$g'(x) \leqq 0$ から $g(x)$ は減少関数で，$g(x) \geqq g(1) = n + 3$ ■

(解 2)　系 2.8 (p=0,q=-1) を適用する．$0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ で

$$
x_1 + x_2 + \cdots + x_n = constant,\ \ x_1 x_2 \cdots x_n = 1
$$

ならば，$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$ は $0 < x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最小となる．

しがって，$0 < x \leqq 1 \leqq y,\ x^{n-1}y = 1$ のとき

$$
\frac{n-1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3n}{(n-1)x + y} \geqq n + 3
$$

を示せばよい．

$g(x) = \dfrac{n-1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{3n}{(n-1)x + y}$ $(0 < x \leqq 1 \leqq y,\ \ x^{n-1}y = 1)$ とおく．

$y=\dfrac{1}{x^{n-1}}$ を用いて y を消去できるが（解 1 参照），ここではこのまま解いてみる．
$x^{n-1}y=1$ の両辺を x で微分すると

$$(n-1)x^{n-2}y+x^{n-1}y'=0 \quad ゆえに \quad y'=-\frac{(n-1)y}{x}$$

これを用いると

$$\begin{aligned} g'(x)&=-\frac{n-1}{x^2}-\frac{y'}{y^2}-\frac{3n\{(n-1)+y'\}}{\{(n-1)x+y\}^2}\\ &=-\frac{n-1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\left(-\frac{(n-1)y}{x}\right)-\frac{3n\left\{(n-1)-\dfrac{(n-1)y}{x}\right\}}{\{(n-1)x+y\}^2}\\ &=(n-1)\left(\frac{x-y}{x^2y}\right)-\frac{3n(n-1)(x-y)}{x\{(n-1)x+y\}^2}\\ &=\frac{(n-1)(x-y)\left[\{(n-1)x+y\}^2-3nxy\right]}{x^2y\{(n-1)x+y\}^2} \end{aligned}$$

$(a+b)^2 \geqq 4ab$ を用いると

$$\{(n-1)x+y\}^2 \geqq 4(n-1)xy \geqq 3nxy$$

よって，$g'(x) \leqq 0$ から $g(x)$ は減少関数で，$g(x) \geqq g(1)=n+3$ ■

[注 1]　$0<x \leqq 1$ で $\dfrac{n-1}{x}+x^{n-1}+\dfrac{3nx^{n-1}}{(n-1)x^n+1} \geqq n+3$ を証明するのに，
$(n-1)x^n+1$ を両辺にかけて得られる整式を扱うのは得策ではない．
参考までに，$n \geqq 5$ の場合の証明をしてみたい．
$0<x \leqq 1$ のとき $t=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$\begin{aligned} &\frac{n-1}{x}+x^{n-1}+\frac{3nx^{n-1}}{(n-1)x^n+1} \geqq n+3\\ &\iff (n-1)\,x^{2n}-(n^2+2n-3)x^{n+1}+(n^2+n+2)x^n-(n+3)x+n-1 \geqq 0\\ &\iff (n-1)t^{2n}-(n+3)t^{2n-1}+(n^2+n+2)t^n-(n^2+2n-3)t^{n-1}+n-1 \geqq 0 \end{aligned}$$

$F(t)=(n-1)t^{2n}-(n+3)t^{2n-1}+(n^2+n+2)t^n-(n^2+2n-3)t^{n-1}+n-1 \ (t \geqq 1)$
とおくと

$$\begin{aligned} &F'(t)\\ &=t^{n-2}\left\{2n(n-1)t^{n+1}-(2n-1)(n+3)t^n+n(n^2+n+2)t-(n-1)^2(n+3)\right\} \end{aligned}$$

$G(t)=2n(n-1)t^{n+1}-(2n-1)(n+3)t^n+n(n^2+n+2)t-(n-1)^2(n+3)\ (t \geqq 1)$
とおくと

$$
\begin{aligned}
G'(t)&=2n(n-1)(n+1)t^n-(2n-1)n(n+3)t^{n-1}+n(n^2+n+2)\\
G''(t)&=2n^2(n-1)(n+1)t^{n-1}-(2n-1)n(n-1)(n+3)t^{n-2}\\
&=n(n-1)t^{n-2}\big\{2n(n+1)t-(2n-1)(n+3)\big\}
\end{aligned}
$$

t	1	$\cdots$	$\dfrac{(2n-1)(n+3)}{2n(n+1)}$	$\cdots$
$G''(t)$		$-$	0	$+$
$G'(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$G'(t)$ は $t=\dfrac{(2n-1)(n+3)}{2n(n+1)}$ で最小値

$$
\begin{aligned}
G'\left(\frac{(2n-1)(n+3)}{2n(n+1)}\right)&=-\frac{(2n-1)^n(n+3)^n}{2^{n-1}n^{n-1}(n+1)^{n-1}}+n(n^2+n+2)\\
&=\frac{2^{n-1}n^n(n+1)^{n-1}(n^2+n+2)-(2n-1)^n(n+3)^n}{2^{n-1}n^{n-1}(n+1)^{n-1}}
\end{aligned}
$$

をとるから，$n \geqq 5$ で

$$2^{n-1}n^n(n+1)^{n-1}(n^2+n+2)-(2n-1)^n(n+3)^n>0 \qquad \cdots\cdots(\bigstar)$$

がいえれば，$G'\left(\dfrac{(2n-1)(n+3)}{2n(n+1)}\right)>0$ となる．
これから $t \geqq 1$ で，$G'(t)>0$ がいえて $G(t)$ は増加関数となる．
よって，$t \geqq 1$ のとき $G(t) \geqq G(1)=0$ から $F'(t) \geqq 0$
　$F(t)$ は増加関数で，$t \geqq 1$ のとき $F(t) \geqq F(1)=0$ となる．
　以下，$n \geqq 5$ のとき $(\bigstar)$ が成り立つことを示す．

$$
\begin{aligned}
(\bigstar) \Longleftrightarrow\ &(n-1)\log 2+n\log n+(n-1)\log(n+1)+\log(n^2+n+2)\\
&>n\log(2n-1)+n\log(n+3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(x)=&(x-1)\log 2+x\log x+(x-1)\log(x+1)+\log(x^2+x+2)\\
&-x\log(2x-1)-x\log(x+3) \quad (x \geqq 5)
\end{aligned}
$$

とおくと

$$\begin{aligned}H'(x) &= \log 2 + \log x + 1 + \log(x+1) + \frac{x-1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\\&\quad - \log(2x-1) - \frac{2x}{2x-1} - \log(x+3) - \frac{x}{x+3}\\&= 1 + \frac{x-1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{2x}{2x-1} - \frac{x}{x+3} + \log\frac{2x}{2x-1} + \log\frac{x+1}{x+3}\end{aligned}$$

$t>0$ のとき，不等式 $\log t \geqq 1-\dfrac{1}{t}$ （等号は $t=1$ のときに限る.）が成り立つから

$$\log\frac{2x}{2x-1} > 1 - \frac{2x-1}{2x} = \frac{1}{2x},\quad \log\frac{x+1}{x+3} > 1 - \frac{x+3}{x+1} = -\frac{2}{x+1}$$

よって

$$\begin{aligned}H'(x) &> 1 + \frac{x-1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{2x}{2x-1} - \frac{x}{x+3} + \frac{1}{2x} - \frac{2}{x+1}\\&= \frac{4x^5-7x^4-7x^3-67x^2+19x-6}{2x(x+1)(x+3)(2x-1)(x^2+x+2)}\end{aligned}$$

$x \geqq 5$ のとき

$$\begin{aligned}4x^5 &\geqq 4\cdot 5\cdot x^4 = 7x^4 + 13x^4\\&\geqq 7x^4 + 13\cdot 5\cdot x^3 = 7x^4 + 7x^3 + 58x^3\\&\geqq 7x^4 + 7x^3 + 58\cdot 5\cdot x^2 = 7x^4 + 7x^3 + 67x^2 + 223x^2\\19x-6 &> 0\end{aligned}$$

から $4x^5-7x^4-7x^3-67x^2+19x-6 > 223x^2 > 0$ となり $H'(x)>0$

$H(x)$ は $x \geqq 5$ で増加関数で，$x \geqq 5$ のとき

$$H(x) \geqq H(5)$$

$$H(5) > 0 \iff 2^4\cdot 5^5\cdot 6^4\cdot 32 > 9^5\cdot 8^5 \iff 5^5 > 2^2\cdot 3^6$$

$5^5 = 3125,\ 2^2\cdot 3^6 = 2916$ より $H(5)>0$ すなわち $x \geqq 5$ のとき $H(x)>0$ が示せた.

したがって，$n \geqq 5$ のとき $H(n) > 0$ ■

[注 2]　(★) を少し変形して考えてみよう.（ただし，n の範囲が $n \geqq 9$ と変わってしまうが・・・）

以下，$n \geqq 9$ のとき (★) が成り立つことを示す.

$$(\bigstar) \iff \frac{n^2+n+2}{2(n+1)} > \left(\frac{(2n-1)(n+3)}{2n(n+1)}\right)^n$$

$f(x)=\left(\dfrac{(2x-1)(x+3)}{2x(x+1)}\right)^x\ (x>1)$ とおく．

$$\log f(x)=x\log\frac{(2x-1)(x+3)}{2x(x+1)}=x\left\{\log(2x-1)(x+3)-\log 2x(x+1)\right\}$$

の両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\log\frac{(2x-1)(x+3)}{2x(x+1)}+x\left(\frac{2}{2x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$g(x)=\log\frac{(2x-1)(x+3)}{2x(x+1)}+x\left\{\frac{2}{2x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}g'(x)&=2\left(\frac{2}{2x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}\frac{1}{x+1}\right)\\&\quad+x\left(-\frac{4}{(2x-1)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)\\&=-\frac{3(11x^4+\overbrace{8x^3-6x^2}^{>0}+12x+3)}{x(x+1)^2(x+3)^2(2x-1)^2}<0\end{aligned}$$

$g(x)$ は減少関数で $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ だから $g(x)>0$

よって，$f'(x)>0$ となり $f(x)$ は増加関数である．

次に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)(x+3)}{2x(x+1)}\right)^x$ を考える．

$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $x\to+0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log f(x)&=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\log\frac{\left(\frac{2}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}+3\right)}{2\cdot\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{t}+1\right)}\\&=\lim_{t\to+0}\frac{\log(2-t)(1+3t)-\log 2(1+t)}{t}\end{aligned}$$

$h(t)=\log(2-t)(1+3t)-\log 2(1+t)$ とおくと

$$h(0)=0,\quad h'(t)=-\frac{1}{2-t}+\frac{3}{1+3t}-\frac{1}{1+t}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\log f(x) &= \lim_{t\to+0}\frac{\log(2-t)(1+3t)-\log 2(1+t)}{t}\\
&= \lim_{t\to+0}\frac{h(t)}{t}\\
&= \lim_{t\to+0}\frac{h(t)-h(0)}{t}\\
&= h'(0) = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\log f(x)} = e^{\frac{3}{2}}$ から

$$
f(x) < e^{\frac{3}{2}} < \frac{9}{2}
$$

したがって，$n \geqq 9$ のとき $\dfrac{n^2+n+2}{2(n+1)} > \dfrac{9}{2}$ を示せばよい．

$$
\frac{n^2+n+2}{2(n+1)} > \frac{9}{2} \Longleftrightarrow n(n-8) > 7
$$

だから，$n \geqq 9$ のとき $n(n-8) > 7$ は成り立つ． ■

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)(x+3)}{2x(x+1)}\right)^x$ を求めたが，似たような問題が数学甲子園（第 6 回全国数学選手権大会数学甲子園準々決勝）に出題されているので紹介しておく．

次の極限値を求めなさい．（第 6 回数学甲子園）

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right)^x
$$

(解答) $x = \dfrac{1}{t}$ とおくと $x \to \infty$ のとき $x \to +0$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right)^x &= \lim_{t\to+0}\left(\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}+1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}-1}\right)^{\frac{1}{t}}\\
&= \lim_{t\to+0}\left(\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}-t}\right)^{\frac{1}{t}}\\
&= \lim_{t\to+0}\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)^{\frac{2}{t}}
\end{aligned}
$$

$f(t)=\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)^{\frac{2}{t}}$ とおくと，$\log f(t)=\dfrac{2\log\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)}{t}$

$g(t)=\log\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)$ とおくと，

$$g'(0)=0,\ g'(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0}\log f(t)&=\lim_{t\to+0}\frac{2g(t)}{t}\\&=\lim_{t\to+0}2\cdot\frac{g(t)-g(0)}{t}\\&=2g'(0)\\&=2\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{t\to+0}f(t)=\lim_{t\to+0}e^{\log f(t)}=e^2$$

から

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right)^x=e^2 \qquad \blacksquare$$

問題 18　(AoPS Forum-Not easy one, Art of Problem Solving)

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ は正の実数で，$x_1x_2\cdots x_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{n(n-1)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\geqq k_n$$

ここで

$$k_n=\begin{cases}2n-1 & (2\leqq n\leqq 4)\\ \sqrt[n]{\dfrac{2(n-1)}{n-2-\sqrt{n^2-4n}}}\cdot\dfrac{2n\left\{n^2-2n-(n-1)\sqrt{n^2-4n}\right\}}{(n-1)(n-\sqrt{n^2-4n})} & (n\geqq 5)\end{cases}$$

(解答)　系 2.8 (p=0,q=-1) を適用する．$0<x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ で

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=constant,\ x_1x_2\cdots x_n=1$$

ならば，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ は $0<x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\leqq x_n$ のとき最小となる．

$0<x\leqq 1\leqq y,\ x^{n-1}y=1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}+\frac{n-1}{x}+\frac{n(n-1)}{y+(n-1)x}&=x^{n-1}+\frac{n-1}{x}+\frac{n(n-1)}{\dfrac{1}{x^{n-1}}+(n-1)x}\\&=x^{n-1}+\frac{n-1}{x}+\frac{n(n-1)x^{n-1}}{1+(n-1)x^n}\end{aligned}$$

$g(x)=x^{n-1}+\dfrac{n-1}{x}+\dfrac{n(n-1)x^{n-1}}{1+(n-1)x^n}$ $(0<x\leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}g'(x)&=(n-1)x^{n-2}-\frac{1}{x^2}+n(n-1)\cdot\frac{(n-1)x^{n-2}\{1+(n-1)x^n\}-n(n-1)x^{2n-2}}{\{1+(n-1)x^n\}^2}\\&=\frac{(n-1)(x^n-1)}{x^2}-\frac{n(n-1)^2x^{n-2}(x^n-1)}{\{1+(n-1)x^n\}^2}\\&=\frac{(n-1)(x^n-1)\left[\{1+(n-1)x^n\}^2-n(n-1)x^n\right]}{x^2\{1+(n-1)x^n\}^2}\\&=\frac{(n-1)(x^n-1)\left\{(n-1)^2x^{2n}-(n^2-3n+2)x^n+1\right\}}{x^2\{1+(n-1)x^n\}^2}\end{aligned}$$

$D=(n^2-3n+2)^2-4(n-1)^2=(n-1)^2(n^2-4n)$ とおく．

(i) $2 \leqq n \leqq 4$ のとき

$D \leqq 0$ から $(n-1)^2x^{2n}-(n^2-3n+2)x^n+1 \geqq 0$ となり $g'(x) \leqq 0$

$g(x)$ は減少関数で，$g(x) \geqq g(1)=2n-1$

(ii) $n \geqq 5$ のとき

$(n-1)^2x^{2n}-(n^2-3n+2)x^n+1=0$ を解くと

$$x^n=\frac{n-2 \pm \sqrt{n^2-4n}}{2(n-1)}$$

$$\alpha=\sqrt[n]{\frac{n-2-\sqrt{n^2-4n}}{2(n-1)}},\ \beta=\sqrt[n]{\frac{n-2+\sqrt{n^2-4n}}{2(n-1)}}$$

とおくと $0<\alpha<\beta<1$ で

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$2n-1$

増減表から $g(x) \geqq \min\{g(\alpha), 2n-1\}$

ここで，$g(\alpha)=\dfrac{(n-1)\alpha^{2n}+(2n^2-3n+2)\alpha^n+n-1}{\alpha\{1+(n-1)\alpha^n\}}$ で

$$\frac{1}{\alpha}=\sqrt[n]{\frac{2(n-1)}{n-2-\sqrt{n^2-4n}}},\ \frac{1}{1+(n-1)\alpha^n}=\frac{2}{n-\sqrt{n^2-4n}}$$

$$(n-1)\alpha^{2n}+(2n^2-3n+2)\alpha^n+n-1=\frac{n\{n^2-2n-(n-1)\sqrt{n^2-4n}\}}{n-1}$$

よって

$$g(\alpha)=\sqrt[n]{\frac{2(n-1)}{n-2-\sqrt{n^2-4n}}}\cdot\frac{2n\left\{n^2-2n-(n-1)\sqrt{n^2-4n}\right\}}{(n-1)\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)}$$

次に，$n \geqq 5$ のとき

$$\sqrt[n]{\frac{2(n-1)}{n-2-\sqrt{n^2-4n}}}\cdot\frac{2n\left\{n^2-2n-(n-1)\sqrt{n^2-4n}\right\}}{(n-1)\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)}<2n-1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示す.

$(*) \iff$

$$\sqrt[n]{\frac{(n-1)\left(n-2+\sqrt{n^2-4n}\right)}{2}} < \frac{(2n-1)(n-1)\left(3n-4+\sqrt{n^2-4n}\right)}{2n(2n^2-5n+4)} \qquad \cdots\cdots(**)$$

(1) $n=5$ のとき

$\sqrt[5]{2\left(3+\sqrt{5}\right)} < 1.6 < \dfrac{18(11+\sqrt{5})}{5\cdot 29}$ で成立.

(2) $n=6$ のとき

$\sqrt[6]{5(2+\sqrt{3})} < 1.7 < \dfrac{55(7+\sqrt{3})}{6\cdot 46}$ で成立.

(3) $n \geqq 7$ の場合

まず

$$\begin{aligned} F(x) &= \log\sqrt[x]{\frac{(x-1)\left(x-2+\sqrt{x^2-4x}\right)}{2}} \\ &= \frac{1}{x}\left\{\log(x-1)+\log\left(x-2+\sqrt{x^2-4x}\right)-\log 2\right\} \end{aligned}$$

が $[7,\infty)$ で減少関数であることを示す.

$$F'(x) = \frac{\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4x}}-\log\dfrac{x-1}{2}-\log(x-2+\sqrt{x^2-4x})}{x^2}$$

$G(x) = \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4x}}-\log\dfrac{x-1}{2}-\log\left(x-2+\sqrt{x^2-4x}\right)$ とおくと

$$G'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2x}{(x^2-4x)\sqrt{x^2-4x}}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}} < 0$$

$G(x)$ は $[7,\infty)$ で減少関数である.

$$G(7) = \frac{7}{6}+\frac{7}{\sqrt{21}}-\log 3-\log(5+\sqrt{21})$$

$$\log 3+\log(5+\sqrt{21}) > 1+\log(5+4.5) > 1+\log e^2 = 3 > \frac{7}{6}+\frac{\sqrt{21}}{3}$$

ゆえに　$G(7)<0$ から $G(x)<0$ すなわち $F'(x)<0$ となり $F(x)$ は $[7,\infty)$ で減少関数である.

$n \geqq 7$ のとき

$$F(n) \leqq F(7) = \sqrt[7]{3(5+\sqrt{21})} < 1.7$$

が成立するから

$$1.7 < \frac{(2n-1)(n-1)\left(3n-4+\sqrt{n^2-4n}\right)}{2n(2n^2-5n+4)}$$

を示せばよい．

$n \geqq 7$ のとき $\sqrt{n^2-4n} > n-2.5$ が成り立つから

$$\frac{(2n-1)(n-1)(3n-4+\sqrt{n^2-4n})}{2n(2n^2-5n+4)} > \frac{(2n-1)(n-1)(3n-4+n-2.5)}{2n(2n^2-5n+4)}$$

これを使うと

$$\frac{(2n-1)(n-1)(3n-4+n-2.5)}{2n(2n^2-5n+4)} > 1.7$$
$$\Longleftrightarrow 12n^3-80n^2+99n-65 > 0$$

$n \geqq 7$ だから

$$12n^3-80n^2+99n-65 \geqq 12\cdot 7\cdot n^2-80n^2+99\cdot 7-65 = 4n^2+628 > 0$$

が成り立つ． ■

問題 19　x_1, x_2, $\ldots$, x_n は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}} \geqq n+3$$

(解答)　系 2.8 $(p=-1, q=2)$ を適用する．$0<x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ で

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=constant$$

ならば，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ は $0<x_1=x_2=\cdots=x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となる．

$0<x_1 \leqq 1 \leqq x_n$, $(n-1)x_1+x_n=n$ のとき

$$\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}+\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}} \geqq n+3$$

を示せばよい．

$$\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-n=\frac{n(n-1)(1-x_1)^2}{x_1x_n},\ (n-1)x_1^2+x_n^2-n=n(n-1)(1-x_1)^2$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}+\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}} \geqq n+3 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-n \geqq 3\left(\frac{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}}\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-n \geqq 3\left(\frac{(n-1)x_1^2+x_n^2-n}{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}\left(\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}+\sqrt{n}\right)}\right) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{n(n-1)(1-x_1)^2}{x_1x_n} \geqq 3\cdot\frac{n(n-1)(1-x_1)^2}{\sqrt{n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}}+(n-1)x_1^2+x_n^2}
\end{aligned}$$

したがって

$$\sqrt{n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}}+(n-1)x_1^2+x_n^2>3x_1x_n \qquad (\bigstar)$$

を示せばよい．

$n=2$ の場合

$2=x_1+x_2 \geqq 2\sqrt{x_1x_2}$ から $x_1x_2 \leqq 1$

$$\sqrt{2(x_1^2+x_2^2)}+x_1^2+x_2^2 \geqq \sqrt{4x_1x_2}+2x_1x_2 \geqq 2x_1x_2+2x_1x_2=4x_1x_2>3x_1x_2$$

となり，(★) は成り立つ．

$n \geqq 3$ の場合

相加平均・相乗平均の不等式から

$$(n-1)x_1^2+x_n^2 \geqq 2\sqrt{n-1}\,x_1x_n \qquad \cdots\cdots ①$$

次に

$$\sqrt{n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}} \geqq \sqrt{n+3}\,x_1x_n \qquad \cdots\cdots ②$$

を示す．

ヘルダーの不等式を使うと

$$\begin{aligned}&\left(\frac{n-1}{x_n^2}+\frac{1}{x_1^2}\right)\left\{x_n+(n-1)x_1\right\}\left\{x_n+(n-1)x_1\right\}\\ \geqq &\left(\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)^3\\ =&(n-1)\left(1+\sqrt[3]{n-1}\right)^3\end{aligned}$$

よって

$$(n-1)x_1^2+x_n^2 \geqq \frac{(n-1)\left(1+\sqrt[3]{n-1}\right)^3}{n^2}x_1^2x_n^2$$

したがって

$$(n-1)\left(1+\sqrt[3]{n-1}\right)^3 \geqq n(n+3)$$

を示せば，② が成り立つことがわかる．

$\sqrt[3]{n-1}=t \geqq \sqrt[3]{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}&(n-1)\left(1+\sqrt[3]{n-1}\right)^3 \geqq n(n+3)\\ \iff& t^3(1+t)^3 \geqq (t^3+1)(t^3+4)\\ \iff& 3t^5+3t^4-4t^3-4 \geqq 0\\ \iff& (t+1)(3t^4-4t^2+4t-4) \geqq 0\end{aligned}$$

$t \geqq \sqrt[3]{2}$ より $t^2=\sqrt[3]{4}>\dfrac{4}{3}$ なので

$$3t^4-4t^2+4t-4=t^2\underbrace{(3t^2-4)}_{>0}+4\underbrace{(t-1)}_{>0}>0$$

よって，$(t+1)(3t^4-4t^2+4t-4) \geqq 0$ は成り立つ.

①，②から

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}}+(n-1)x_1^2+x_n^2 &\geqq \left(\sqrt{n+3}+2\sqrt{n-1}\right)x_1x_n \\
&\geqq \left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)x_1x_n \\
&> 3x_1x_n
\end{aligned}
$$

となり，(★) は成り立つ. ■

問題 20 (Pham Kim Hung)

$n \geqq 4$ は正の整数，x_1，x_2，…，x_n は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1})}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}} \geqq n+2\sqrt{n-1}+\sqrt{n+4}$$

(解答) 系 2.8 $(p=-1, q=2)$ を適用する．$0<x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ で

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=constant$$

ならば，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ は $0<x_1=x_2=\cdots=x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となる．

$0<x_1 \leqq 1 \leqq x_n$, $(n-1)x_1+x_n=n$ のとき

$$\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}+\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}} \geqq n+2\sqrt{n-1}+\sqrt{n+4}$$

を示せばよい．

$$\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-n=\frac{n(n-1)(1-x_1)^2}{x_1x_n},\ (n-1)x_1^2+x_n^2-n=n(n-1)(1-x_1)^2$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}+\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}} \geqq n+\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-n \geqq (\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1})\left(\frac{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}}\right)\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-n \geqq \left(\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1}\right)\left(\frac{(n-1)x_1^2+x_n^2-n}{\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}\left(\sqrt{(n-1)x_1^2+x_n^2}+\sqrt{n}\right)}\right)\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{n(n-1)(1-x_1)^2}{x_1x_n} \geqq \left(\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1}\right)\cdot\frac{n(n-1)(1-x_1)^2}{\sqrt{n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}}+(n-1)x_1^2+x_n^2}
\end{aligned}$$

したがって

$$\sqrt{n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}}+(n-1)x_1^2+x_n^2 \geqq (\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1})x_1x_n \qquad (\bigstar\bigstar)$$

を示せばよい．

相加平均・相乗平均の不等式から

$$(n-1)x_1^2+x_n^2 \geqq 2\sqrt{n-1}x_1x_n \qquad \cdots\cdots ①$$

次に

$$\sqrt{n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}} \geqq \sqrt{n+4}\,x_1x_n \qquad \cdots\cdots ②$$

を示す．
ヘルダーの不等式を使うと

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{n-1}{x_n^2}+\frac{1}{x_1^2}\right)\left\{x_n+(n-1)x_1\right\}\left\{x_n+(n-1)x_1\right\}\\
&\geqq \left(\sqrt[3]{n-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)^3\\
&=(n-1)\left(1+\sqrt[3]{n-1}\right)^3
\end{aligned}$$

よって

$$(n-1)x_1^2+x_n^2 \geqq \frac{(n-1)\left(1+\sqrt[3]{n-1}\right)^3}{n^2}x_1^2x_n^2$$

$$(n-1)\left(1+\sqrt[3]{n-1}\right)^3 \geqq n(n+4)$$

を示せば，② が成り立つことがわかる．
$\sqrt[3]{n-1}=t \geqq \sqrt[3]{3}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&(n-1)\left(1+\sqrt[3]{n-1}\right)^3 \geqq n(n+4)\\
\Longleftrightarrow\ & t^3(1+t)^3 \geqq (t^3+1)(t^3+5)\\
\Longleftrightarrow\ & 3t^5+3t^4-5t^3-5 \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ & (t+1)(3t^4-5t^2+5t-5) \geqq 0
\end{aligned}$$

$t \geqq \sqrt[3]{3}$ より $t^2=\sqrt[3]{9}>2>\dfrac{5}{3}$ なので

$$3t^4-5t^2+5t-5=t^2\underbrace{(3t^2-5)}_{>0}+5\underbrace{(t-1)}_{>0}>0$$

よって，$(t+1)(3t^4-5t^2+5t-5) \geqq 0$ は成り立つ．
　①，②から

$$\sqrt{n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}}+(n-1)x_1^2+x_n^2 \geqq (\sqrt{n+4}+2\sqrt{n-1})x_1x_n$$

となり，(★★) は成り立つ．　■

問題 21 (Pham Kim Hung)

x_1, x_2, ..., x_n は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{2n\sqrt{n-1}}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} \geqq n+2\sqrt{n-1}$$

(解答) 系 2.8 $(p=-1, q=2)$ を適用する．$0<x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ で

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=constant$$

ならば，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ は $0<x_1=x_2=\cdots=x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となる．

$0<x_1 \leqq 1 \leqq x_n$, $()x_1+x_n=n$ のとき

$$\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}+\frac{2n\sqrt{n-1}}{(n-1)x_1^2+x_n^2} \geqq n+2\sqrt{n-1}$$

を示せばよい．

$$\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-n=\frac{n(n-1)(1-x_1)^2}{x_1x_n},\ (n-1)x_1^2+x_n^2-n=n(n-1)(1-x_1)^2$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}+\frac{2n\sqrt{n-1}}{(n-1)x_1^2+x_n^2} \geqq n+2\sqrt{n-1}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{n-1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-n-\frac{2\sqrt{n-1}}{(n-1)x_1^2+x_n^2}\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2-n\right\} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{n(n-1)(x_1-1)^2}{x_1x_n}-\frac{2\sqrt{n-1}\,n(n-1)(x_1-1)^2}{\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &n(n-1)(x_1-1)^2\cdot\frac{(n-1)x_1^2+x_n^2-2\sqrt{n-1}\,x_1x_n}{x_1x_n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &n(n-1)(x_1-1)^2\cdot\frac{\left(\sqrt{n-1}x_1-x_n\right)^2}{x_1x_n\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 22　a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

(初等的な不等式 I 問題 127)

(解 1)　証明すべき不等式を同次化すると

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geqq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right) abc$$

となる．ここで，$a+b+c=3$ と仮定して一般性を失わない．また，$0 < a \leqq b \leqq c$ とする．

$f(a,b,c) = \left(a^2+b^2+c^2\right) abc$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \\
&= abc(a^2+b^2+c^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 c \left\{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + c^2\right\} \\
&= c\left[ab(a^2+b^2) - 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + c^2\left\{ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}\right] \\
&= -\frac{c(a-b)^4}{8} - \frac{c^2(a-b)^2}{4} \\
&= -\frac{(a-b)^2 c\{(a-b)^2 + 2c\}}{8} \leqq 0
\end{aligned}$$

したがって

$$f(a,b,c) \leqq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$$

が成り立つ．

$x = \dfrac{a+b}{2}, y = c$ とおき

$$F(x) = (2x^2+y^2)x^2y = 2x^4y + x^2y^3 \quad (0 < x \leqq 1 \leqq y,\ 2x+y=3)$$

を考える．

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 8x^3y + 2x^4y' + 2xy^3 + 3x^2y^2y' \\
&= 8x^3y - 4x^4 + 2xy^3 - 6x^2y^2 \\
&= 2x(y-x)(2x^2 - 2xy + y^2) \geqq 0
\end{aligned}$$

$F(x)$ は増加関数で，$0 < x \leqq 1$ のとき $F(x) \leqq F(1) = 3$　■

(解 2)　系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

証明すべき不等式を同次化すると

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5 \geqq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)abc$$

となる．条件 $abc=1$ を除いて考える．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$a+b+c=constant,\ abc=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $a=b \leqq c$ のとき最大となる．
したがって，$0<a \leqq 1 \leqq c$ のとき

$$\left(\frac{2a+c}{3}\right)^5 \geqq \left(\frac{2a^2+c^2}{3}\right)a^2c$$

を示せばよい．$x=\dfrac{a}{c}\ (\leqq 1)$ とおくと

$$\left(\frac{2a+c}{3}\right)^5 \geqq \left(\frac{2a^2+c^2}{3}\right)a^2c \Longleftrightarrow (2x+1)^5 \geqq 81x^2(2x^2+1)$$

したがって，$(2x+1)^5-81x^2(2x^2+1) \geqq 0$ を示す．

$$\begin{aligned}
&(2x+1)^5-81x^2(2x^2+1) \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &32x^5-82x^4+80x^3-41x^2+10x+1 \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &(x-1)^2(32x^3-18x^2+12x+1) \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は

$$32x^3-18x^2+12x+1 = 2\underbrace{(16x^2-9x+6)}_{>0}x+1>0$$

なので成り立つことがわかる．■

問題 23　(France Team Selection Test 2007)

$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数で，$a+b+c+d=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geqq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$$

(初等的な不等式 I 問題 144)

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$f(a,b,c,d)=6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)-\dfrac{1}{8}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d)-f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right)\\
&=6\left\{b^3+d^3-2\left(\frac{b+d}{2}\right)^3\right\}-\left\{b^2+d^2-2\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{9(b-d)^2(b+d)}{2}-\frac{(b-d)^2}{2}\\
&=\frac{(b-d)^2}{2}\{9(b+d)-1\}
\end{aligned}$$

$9(b+d)-1>0$ を示す．

$(a+c)+(b+d)=1,\ a+c \leqq b+d$ から $b+d \geqq \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{9}$

よって

$$f(a,b,c,d) \geqq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right)$$

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \geqq f(a,t,t,t),\ t=\frac{b+c+d}{3}$$

したがって，$0<a \leqq \dfrac{1}{4} \leqq t < \dfrac{1}{3}$，$a+3t=1$ のとき $f(a,t,t,t) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
f(a,t,t,t)&=6(a^3+3t^3)-(a^2+3t^2)-\frac{1}{8}\\
&=6\left\{(1-3t)^3+3t^3\right\}-\left\{(1-3t)^2+3t^2\right\}-\frac{1}{8}\\
&=-\frac{3(384t^3-400t^2+128t-13)}{8}\\
&=\frac{3(4t-1)^2(13-24t)}{8} \geqq 0
\end{aligned}$$

■

(解 2) 　$f(x)=6x^3-x^2\,(x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geqq 4f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)$$

となる．

$$f''(x)=36x-2$$

だから $f(x)$ は $\left[\dfrac{1}{18},\infty\right)$ で凸関数である．

$s=\dfrac{a+b+c+d}{4}=\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{18}$ となる $s=\dfrac{1}{4}$ に対して，$f(x)$ は $x \geqq s$ で凸関数である．

RCF-Theorem より

$$a \leqq \frac{1}{4} \leqq b=c=d$$

のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

系 2 により

$$g(t)=\frac{f(t)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{t-\frac{1}{4}}=\frac{48t^2+4t+1}{8}$$

とおくと，$0<x \leqq 1 \leqq y,\quad x+3y=1$ に対して，$g(x) \leqq g(y)$ が成り立つことを示せばよい．

$$g(x)-g(y)=6(x^2-y^2)+\frac{1}{2}(x-y)=(x-y)\left\{6(x+y)+\frac{1}{2}\right\} \leqq 0 \qquad \blacksquare$$

問題 24 (China 2005)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) \geqq 1$$

(初等的な不等式 I 問題 180)

(解 1) $f(x)=9x^5-10x^3\ (x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c) \leqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

となる．

$$f''(x)=60x(3x^2-1)$$

だから $f(x)$ は $\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ で凹関数である．

$s=\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となる $s=\dfrac{1}{3}$ に対して，$f(x)$ は $x \leqq s$ で凹関数である．
LCF-Theorem より

$$a=b \leqq \frac{1}{3} \leqq c$$

のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$$F(x)=f(1-2x)+2f(x)\ \left(0<x \leqq \frac{1}{3}\right)$$

を考える．

$$\begin{aligned}
-1-F(t) &= -1-f(1-2x)-2f(x)\\
&= 10(1-2x)^3-9(1-2x)^5+2(10x^3-9x^5)-1\\
&= 30(9x^5-24x^4+22x^3-8x^2+x)\\
&= 30x(x-1)^2(3x-1)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

から

$$f(1-2x)+2f(x) \leqq -1$$ ■

(解 2) 系 2.8 $(p=3, q=5)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$a+b+c=1$, $a^3+b^3+c^3=constant$ ならば，$a^5+b^5+c^5$ は $a=b \leqq c$ のとき最大となる．したがって，

$$a=b \leqq \frac{1}{3} \leqq c$$

のとき不等式が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照． ■

問題 25　(Mihai Piticari, Dan Popescu)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$5(a^2+b^2+c^2) \leqq 6(a^3+b^3+c^3)+1$$

(初等的な不等式 I 問題 179)

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=6(a^3+b^3+c^3)+1-5(a^2+b^2+c^2)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\\
&=6\left\{b^3+c^3-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^3\right\}-5\left\{b^2+c^2-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\}\\
&=6\cdot\frac{3(b-c)^2(b+c)}{4}-5\cdot\frac{(b-c)^2}{2}\\
&=\frac{(b-c)^2}{2}\{9(b+c)-5\}
\end{aligned}$$

$9(b+c)-5>0$ を示す．

$0<a\leqq\dfrac{1}{3}$ だから，$9(b+c)-5=9(1-a)-5=4-9a\geqq 1>0$

よって

$$f(a,b,c)\geqq f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$

$t=\dfrac{b+c}{2}$ とおくと，$0<a\leqq\dfrac{1}{3}\leqq t$, $a+2t=1$ で

$$\begin{aligned}
f(a,t,t)&=6(a^3+2t^3)+1-5(a^2+2t^2)\\
&=6a^3+12\left(\frac{1-a}{2}\right)^3+1-5a^2-10\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\\
&=\frac{9a^3-6a^2+a}{2}\\
&=\frac{a(3a-1)^2}{2}\geqq 0
\end{aligned}$$

ゆえに，$f(a,t,t)\geqq 0$ ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(x)=6x^3-5x^2\,(x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)\geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

となる．

$$f''(x) = 36x - 10$$

だから $f(x)$ は $\left[\dfrac{5}{18}, \infty\right)$ で凸関数である．

$s = \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{1}{3} > \dfrac{5}{18}$ となる $s = \dfrac{1}{3}$ に対して，$f(x)$ は $x \geqq s$ で凸関数である．

RCF-Theorem より

$$a \leqq \frac{1}{3} \leqq b = c$$

のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$b = c = x$ とおくと，$a = 1 - 2x$, $\dfrac{1}{3} \leqq x < \dfrac{1}{2}$

$$F(x) = f(1-2x) + 2f(x) = -36x^3 + 42x^2 - 16x + 1 \quad \left(\frac{1}{3} \leqq x < \frac{1}{2}\right)$$

を考える．

$$\begin{aligned} 1 + F(x) &= -36x^3 + 42x^2 - 16x + 2 \\ &= 2(1-2x)(3x-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

から

$$f(1-2x) + 2f(x) \geqq -1$$ ■

(解 3)　系 2.8 $(p = 2, q = 3)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$a + b + c = 1,\ a^2 + b^2 + c^2 = constant$$

ならば，$a^3 + b^3 + c^3$ は $a \leqq b = c$ のとき最小となる．したがって，

$$a \leqq \frac{1}{3} \leqq b = c$$

のとき不等式が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照． ■

問題 26　(Darij Grinberg)

a, b, c は非負の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geqq 2(ab+bc+ca)$$

(初等的な不等式 I 問題 115(2))

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

(i) $0 \leqq a \leqq 2$ の場合

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca) \\ &= a^2+b^2+c^2+2abc+1-2a(b+c)-2bc \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} &f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right) \\ &= b^2+c^2-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+2a\left\{bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\}-2\left\{bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\} \\ &= \frac{(b-c)^2}{2}-\frac{a(b-c)^2}{2}+\frac{(b-c)^2}{2} \\ &= \frac{(b-c)^2(2-a)}{2} \geqq 0 \end{aligned}$$

よって

$$f(a,b,c) \geqq f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$

$t=\dfrac{b+c}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a,t,t) &= a^2+2t^2+2at^2+1-2(2at+t^2) \\ &= a^2+2at^2+1-4at \\ &= 2a(t-1)^2+(a-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

(ii) $a>2$ の場合

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca) \\ &\geqq a^2+b^2+c^2+4bc+1-2(ab+bc+ca) \\ &= a^2+b^2+c^2+2bc+1-2ab-2ca \\ &= (a-b)^2+2c(b-a)+c^2+1>0 \end{aligned}$$

■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

(i) $a=0$ の場合 $b^2+c^2+1 \geqq 2bc$ を示せばよく，これは $b^2+c^2+1-2bc=(b-c)^2+1>0$ から成り立つ．

(ii) $0<a \leqq b \leqq c$ の場合　系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．証明すべき不等式は

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geqq (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

と変形できる．

$$a+b+c=constant,\ abc=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小となるから
$0<a \leqq b$ のとき

$$a^2+2b^2+2ab^2+1 \geqq 2(2ab+b^2) \quad \text{すなわち} \quad a^2+2ab^2+1 \geqq 4ab$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} & a^2+2b^2+2ab^2+1 \geqq 2(2ab+b^2) \\ \iff & a^2+2ab(b-2)+1 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

$b \geqq 2$ のとき $(*)$ は明らかに成り立つ．
$0<b<2$ のとき

$$\begin{aligned} a^2+2ab(b-2)+1 &= \{a+b(b-2)\}^2-b^2(b-2)^2+1 \\ &= \{a+b(b-2)\}^2+(b-1)^2\{1+b(2-b)\} \geqq 0 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

問題 27　$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$1 + a + b + c \geqq 2\sqrt{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$\begin{aligned}
&1 + a + b + c \geqq 2\sqrt{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \\
\Longleftrightarrow\ &(1 + a + b + c)^2 \geqq \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow\ &a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) \geqq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 3
\end{aligned}$$

$f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) - 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) - 3$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) \\
&= b^2 + c^2 - 2bc + 2(b + c - 2\sqrt{bc}) - 2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{\sqrt{bc}}\right) \\
&= (b - c)^2 + 2(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 - \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2}{bc} \\
&= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2\left\{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 + 2 - \frac{1}{bc}\right\} \\
&= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2\left\{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 + 2 - a\right\}
\end{aligned}$$

$0 < a \leqq b \leqq c,\ abc = 1$ から $0 < a \leqq 1 < 2$ なので

$$(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2\left\{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 + 2 - a\right\} \geqq 0$$

すなわち

$$f(a, b, c) \geqq f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})$$

$t = \sqrt{bc}$ とおくと，$0 < a \leqq 1 \leqq t,\ at^2 = 1$ のとき

$$f(a, t, t) \geqq 0$$

を示せばよい．

$at^2 = 1$ の両辺を t で微分すると，$a't^2 + 2at = 0$ だから $a' = -\dfrac{2a}{t}$ である．

$g(t)=f(a,t,t)=a^2+2t^2+2(a+2t)-2\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{t}\right)-3$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g'(t)&=2aa'+4t+2(a'+2)+2\left(\frac{a'}{a^2}+\frac{2}{t^2}\right)\\
&=-\frac{4a^2}{t}+4t-\frac{4a}{t}+4-\frac{4}{at}+\frac{4}{t^2}\\
&=\frac{4(t^2-a^2)}{t}+\frac{4(t-a)}{t}-\frac{4(t-a)}{at^2}\\
&=4(t-a)\left\{\frac{t+a}{t}+\frac{1}{t}-1\right\}\\
&=\frac{4(t-a)(a+1)}{t}\geqq 0
\end{aligned}
$$

$g(t)$ は増加関数で，$1\leqq t$ のとき，$g(t)\geqq g(1)=0$ ■

(解 2)　系 2.8 $(p=0, q=-1)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

$abc=1$, $a+b+c=constant$ ならば，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ は $a\leqq b=c$ のとき最大となる．したがって，

$$0<a\leqq 1\leqq b=c,\ ab^2=1$$

のとき不等式

$$1+a+2b\geqq 2\sqrt{1+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}$$

が成り立つことを示せばよい．

$$
\begin{aligned}
1+a+2b\geqq 2\sqrt{1+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}&\iff\left(1+\frac{1}{b^2}+2b\right)^2\geqq 4\left(1+b^2+\frac{2}{b}\right)\\
&\iff(2b^3+b^2+1)^2\geqq 4b^3(b^3+b+2)\\
&\iff 4b^5-3b^4-4b^3+2b^2+1\geqq 0\\
&\iff(b-1)^2(b+1)(4b^2+b+1)\geqq 0
\end{aligned}
$$

$4b^2+b+1>0$ であるから，最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

[注]　解 1 でみたように

$$a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)\geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3$$

を示せばよいから

$$f(t)=t^2+2t-\frac{2}{t}\ (t>0),\quad f_1(u)=f(e^u)=e^{2u}+2e^u-2e^{-u}$$

とおいて，RCF-Corollary を使っても証明できる．

問題 28　(Vasile Cîrtoaje　，Romania TST,2006)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq a^2+b^2+c^2$$

(初等的な不等式 I 問題 184)

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-(a^2+b^2+c^2)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\\
&=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{8}{(a+b)^2}-\left\{a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{(a^2+b^2)(a+b)^2-8a^2b^2}{a^2b^2(a+b)^2}-\frac{a^2-2ab+b^2}{2}\\
&=\frac{(a-b)^2}{2a^2b^2(a+b)^2}\{2(a^2+4ab+b^2)-a^2b^2(a+b)^2\}
\end{aligned}$$

$2(a^2+4ab+b^2)-a^2b^2(a+b)^2>0$ を示す．

$0<a \leqq b \leqq c$, $a+b+c=3$ より $c \geqq 1$ で $a+b=3-c \leqq 2$

$2 \geqq a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ から $ab \leqq 1$ よって

$$a^2b^2(a+b)^2 \leqq (a+b)^2 < 2(a^2+4ab+b^2)$$

だから

$$f(a,b,c) \geqq f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$$

が成り立つ．

$t=\dfrac{a+b}{2}$ とおくと，$0<t \leqq 1 \leqq c$, $2t+c=3$ のとき $f(t,t,c) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
f(t,t,c) \geqq 0 &\Longleftrightarrow \frac{2}{t^2}+\frac{1}{c^2} \geqq 2t^2+c^2\\
&\Longleftrightarrow \frac{2}{t^2}+\frac{1}{(3-2t)^2} \geqq 2t^2+(3-2t)^2\\
&\Longleftrightarrow -\frac{24t^6-120t^5+234t^4-216t^3+72t^2+24t-18}{t^2(3-2t)^2} \geqq 0\\
&\Longleftrightarrow 6(t-1)^2(-4t^4+12t^3-11t^2+2t+3) \geqq 0
\end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
-4t^4+12t^3-11t^2+2t+3 &= (-4t^4+12t^3-11t^2+2t+1)+2 \\
&= -(t-1)^2(4t^2-4t-1)+2 \\
&= (t-1)^2(\underbrace{-4t^2+4t}_{\geqq 0}+1)+2>0
\end{aligned}
$$

だから，$f(t,t,c) \geqq 0$ が成り立つ． ■

(解 2)　系 2.8 $(p=-2, q=2)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$
a+b+c=constant,\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=constant
$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $0<a=b \leqq c$ の最大となる．

$0<a \leqq 1 \leqq c,\ 2a+c=3$ のとき $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{c^2} \geqq 2a^2+c^2$ を示せばよい．

$f(a)=\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}-(2a^2+c^2)$ $(0<a \leqq 1 \leqq c,\ 2a+c=3)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= -\frac{4}{t^3}-\frac{2c'}{c^3}-4t-2cc' = -\frac{4}{t^3}+\frac{4}{c^3}-4t+4c \\
&= \frac{4(a^3-c^3)}{a^3c^3}-4(a-c) = \frac{4(a-c)}{a^3c^3}(a^2+ac+c^2-a^3c^3) \\
&= \frac{4(a-c)}{a^3c^3}\left\{a^2+a(3-2a)+(3-2a)^2-a^3(3-2a)^3\right\} \\
&= \frac{4(a-c)}{a^3c^3}(8a^6-36a^5+54a^4-27a^3+3a^2-9a+9) \\
&= \frac{4(a-c)}{a^3c^3}(8a^6-36a^5+54a^4-27a^3+3a^2-9a+7+2) \\
&= \frac{4(a-c)}{a^3c^3}\left\{(a-1)^2(8a^4-20a^3+6a^2+5a+7)+2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8a^4-20a^3+6a^2+5a+7 &\geqq 8a^4-20a^3+6a^2+5a^2+7a^2 \\
&= (8a^2-20a+18)a^2>0
\end{aligned}
$$

だから $f'(a) \leqq 0$ となり，$f(a)$ は減少関数である．

よって，$0<a \leqq 1$ のとき $f(a) \geqq f(1)=0$ ■

(解 3)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる.

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} \ (x > 0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a) + f(b) + f(c) \leqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

となる.

$$f''(x) = \frac{2(x^4 - 3)}{x^4}$$

だから $f(x)$ は $\left(0, \sqrt[4]{3}\,\right]$ において凹関数である.

$s = \dfrac{a+b+c}{3} = 1$ とおくと, $f(x)$ は $(0, 1]$ において凹関数であるから, LCF-Theorem より

$0 < a = b \leqq 1 \leqq c,\ 2a + c = 3$ のとき

$$\frac{2}{a^2} + \frac{1}{c^2} \geqq 2a^2 + c^2$$

が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照. ■

問題 29　　$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca) \geqq 10(a+b+c)$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．
このとき，$0<a \leqq b \leqq c$ と $abc=1$ から $0<a \leqq 1 \leqq c$ となる．
$f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca)-10(a+b+c)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a,b,c)-f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c) &= a^2+b^2-2ab+9c(a+b-2\sqrt{ab})-10(a+b-2\sqrt{ab}) \\ &= (a-b)^2+9c(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-10(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\ &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\left\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+9c-10\right\} \end{aligned}$$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+9c-10>0$ を示す．

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+9c &\geqq 4\sqrt{a}+\sqrt{b}+9c \\ &= \frac{4}{\sqrt{c}}+9c \\ &\geqq 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{c}}\cdot 9c} \\ &= 12\sqrt[4]{c} \geqq 12 > 10 \end{aligned}$$

だから

$$f(a,b,c) \geqq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$$

$t=\sqrt{ab}$ とおくと，$0<t \leqq 1 \leqq c,\ t^2c=1$ のとき $f(t,t,c) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned} f(t,t,c) \geqq 0 &\iff 2t^2+c^2+9\left(t^2+2tc\right) \geqq 10(2t+c) \\ &\iff 2t^2+\frac{1}{t^4}+9\left(\frac{2}{t}+t^2\right) \geqq 10\left(2t+\frac{1}{t^2}\right) \\ &\iff 11t^6-20t^5+18t^3-10t^2+1 \geqq 0 \\ &\iff (t-1)^2(11t^4+2t^3-7t^2+2t+1) \geqq 0 \end{aligned}$$

ここで

$$11t^4+2t^3-7t^2+2t+1 \geqq 11t^4+2t^4-7t^2+2t+1 = \underbrace{(13t^4-7t^2+1)}_{>0}+2t>0$$

だから，$f(t,t,c) \geqq 0$　■

(解 2)　系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

証明すべき不等式を変形する．

$$\begin{aligned}
& a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca) \geqq 10(a+b+c) \\
\Longleftrightarrow\ & 2(a^2+b^2+c^2)+9\left\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right\} \geqq 20(a+b+c) \\
\Longleftrightarrow\ & 9(a+b+c)^2-20(a+b+c) \geqq 7(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}$$

$$abc=1,\ a+b+c=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $0 < a = b \leqq c$ のとき最大となる．

したがって，$0 < a \leqq 1 \leqq c,\ a^2c=1$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

$$f(a)=2a^2+c^2+9(a^2+2ac)-10(2a+c) \quad (0 < a \leqq 1 \leqq c)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 4a+2cc'+9(2a+2c+2ac')-10(2+c') \\
&= 4a-\frac{4c^2}{a}+9(2a-2c)-10\cdot\frac{2a-2c}{a} \\
&= \frac{2(a-c)}{a}(11a+4c-10) \\
&= \frac{2(a-c)}{a^3}(11a^3-10a^2+4)
\end{aligned}$$

ここで

$$11a^3-10a^2+4 \geqq 11a^4-10a^2+4 > 0$$

だから $f'(a) \leqq 0$

$f(a)$ は減少関数で，$0 < a \leqq 1$ のとき，$f(a) \geqq f(1) = 0$　■

問題 30　(Tran Nam Dung)

a, b, c は非負の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$2(a^2+b^2+c^2)+abc+8 \geqq 5(a+b+c)$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=2(a^2+b^2+c^2)+abc+8-5(a+b+c)$ とおくと

(i) $0 \leqq a \leqq 4$ の場合

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2})\\
&=2\left\{b^2+c^2-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\}+a\left\{bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\}\\
&=2\cdot\frac{(b-c)^2}{2}-\frac{a(b-c)^2}{4}\\
&=(b-c)^2\left(1-\frac{a}{4}\right) \geqq 0
\end{aligned}$$

よって

$$f(a,b,c) \geqq f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$

$t=\dfrac{b+c}{2}$ とおくと $0 \leqq a \leqq 4$, $a \leqq t$ で

$$\begin{aligned}
f(a,t,t)&=2(a^2+2t^2)+at^2+8-5(a+2t)\\
&=(a+4)t^2-10t+2a^2-5a+8
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
D/4&=25-(a+4)(2a^2-5a+8)\\
&=-(2a^3+3a^2-12a+7)\\
&=-(a-1)^2(2a+7) \leqq 0
\end{aligned}$$

だから，$f(a,t,t) \geqq 0$

(ii) $a \geqq 4$ の場合

$4 \leqq a \leqq b \leqq c$ から

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqq 2(4a+4b+4c) > 5(a+b+c)$$

が成り立つ．これを使うと，$f(a,b,c)>0$ は成り立つ．■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

(i) $a = 0$ の場合

$2(b^2 + c^2) + 8 \geqq 5(b + c)$ を示せばよい．

$$2(b^2 + c^2) + 8 - 5(b + c) = \underbrace{2b^2 - 5b + 4}_{>0} + \underbrace{2c^2 - 5c + 4}_{>0} > 0$$

(ii) $0 < a \leqq b \leqq c$ の場合

系 2.8 $(p = 0, q = 2)$ を適用する．

$$abc = constant,\ a + b + c = constant$$

ならば，$a^2 + b^2 + c^2$ は $0 < a \leqq b = c$ のとき最小となる．

したがって，$0 < a \leqq b$ のとき

$$2(a^2 + 2b^2) + ab^2 + 8 \geqq 5(a + 2b)$$

が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照．　■

問題 31　　a, b, c, d は正の実数で，$a+b+c+d+abcd=5$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqq 4$$

(解答)　系 2.8 $(p=0, q=-1)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$a+b+c+d=constant,\ abcd=constant$$

ならば，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ は $0<a=b=c \leqq d$ のとき最小となる．

したがって，$0<a \leqq d,\ 3a+d+ad^3=5$ のとき

$$\frac{3}{a}+\frac{1}{d} \geqq 4$$

を示せばよい．

$3a+d+ad^3=5$ から $d=\dfrac{5-3a}{a^3+1}$

次に，$a \leqq d$ から

$$\begin{aligned} a \leqq d &\Longleftrightarrow a \leqq \frac{5-3a}{a^3+1} \\ &\Longleftrightarrow a^4+4a-5 \leqq 0 \\ &\Longleftrightarrow (a-1)(a^3+a^2+a+5) \leqq 0 \end{aligned}$$

よって，$0<a \leqq 1$

$f(a)=\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{3}{a}+\dfrac{a^3+1}{5-3a}$ $(0<a \leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{6a^5-15a^4+24a^2-90a+75}{a^2(5-3a)^2} \\ &= -\frac{3(a-1)(5-2a)(a^3+a^2+a+5)}{a^2(5-3a)^2} \leqq 0 \end{aligned}$$

から $f(a)$ は減少関数で，$0<a \leqq 1$ のとき，$f(a) \geqq f(1)=4$ ■

問題 32　　a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca) \geqq 25$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．
$f(a,b,c)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+48(ab+bc+ca)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\\
&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}+48\left\{ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}-48\cdot\frac{(a-b)^2}{4}\\
&=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\{1-12ab(a+b)\}
\end{aligned}$$

$1-12ab(a+b)>0$ を示す．
$c \geqq \dfrac{1}{3}$ だから $a+b=1-c \leqq \dfrac{2}{3}$ すなわち $a+b \leqq \dfrac{2}{3}$
次に

$$\frac{2}{3} \geqq a+b \geqq 2\sqrt{ab} \quad \text{から} \quad ab \leqq \frac{1}{9}$$

これらを使うと

$$ab(a+b) \leqq \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{27}<\frac{1}{12}$$

よって

$$f(a,b,c) \geqq f(t,t,c),\ t=\frac{a+b}{2}$$

$0<t \leqq \dfrac{1}{3} \leqq c$, $2t+c=1$ のとき $f(t,t,c) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&f(t,t,c) \geqq 0\\
\iff &\frac{2}{t}+\frac{1}{c}+48(t^2+2ct)-25 \geqq 0\\
\iff &\frac{2}{t}+\frac{1}{1-2t}+48\left\{t^2+2(1-2t)t\right\}-25 \geqq 0\\
\iff &\frac{288t^4-336t^3+146t^2-28t+2}{t(1-2t)} \geqq 0\\
\iff &\frac{2(3t-1)^2(4t-1)^2}{t(1-2t)} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つから，$f(t,t,c) \geqq 0$ は成り立つ．　■

(解 2)　系 2.8 $(p=-1, q=2)$ を適用する．
一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．
不等式を同値変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca) \geqq 25 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+24\left\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right\} \geqq 25
\end{aligned}$$

$$a+b+c=constant,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $0<a=b \leqq c$ のとき最大となる．
　したがって，$0<a \leqq \dfrac{1}{3} \leqq c,\ 2a+c=1$ のとき

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{c}+48(a^2+2ac) \geqq 25$$

が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照．■

問題 33　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は正の実数で，$abc = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geqq \frac{3}{2}\left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 6 - \dfrac{3}{2}\left(a + b + c + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) &= b^2 + c^2 - 2bc - \frac{3}{2}\left(b + c - 2\sqrt{bc} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{\sqrt{bc}}\right) \\ &= (b - c)^2 - \frac{3}{2}\left\{(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2}{bc}\right\} \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2\left\{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - \frac{3}{2}(1 + a)\right\} \end{aligned}$$

$(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - \dfrac{3}{2}(1 + a) > 0$ を示す．

$0 < a \leqq 1$ だから

$$\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \geqq 4\sqrt{bc} = \frac{4}{\sqrt{a}} \geqq 4 > 3 \geqq \frac{3}{2}(1 + a)$$

よって，$f(a, b, c) \geqq f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})$

$t = \sqrt{bc}$ とおくと，$a \leqq 1 \leqq t$, $at^2 = 1$ のとき，$f(a, t, t) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned} f(a, t, t) \geqq 0 &\Longleftrightarrow a^2 + 2t^2 + 6 \geqq \frac{3}{2}\left(a + 2t + \frac{1}{a} + \frac{2}{t}\right) \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{t^4} + 2t^2 + 6 \geqq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{t^2} + 2t + t^2 + \frac{2}{t}\right) \\ &\Longleftrightarrow t^6 - 6t^5 + 12t^4 - 6t^3 - 3t^2 + 2 \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow (t - 1)^2(t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 4t + 2) \geqq 0 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 4t + 2 &= t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 4t - 4 + 6 \\ &= (t - 2)^2(t - 1)(t + 1) + 6 > 0 \end{aligned}$$

だから，$f(a, t, t) \geqq 0$ ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(x) = x^2 - \dfrac{3}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ $(x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a) + f(b) + f(c) \geqq 3f(\sqrt[3]{abc})$$

となる．

$f_1(u)=f(e^u)=e^{2u}-\dfrac{3}{2}\left(e^u+e^{-u}\right)$ とおくと

$$f_1''(u)=\frac{8e^{3u}-3e^{2u}-3}{2e^u}$$

$u\geqq 0$ すなわち $e^u\geqq 1$ のとき

$$8e^{3u}-3e^{2u}-3=3(e^{3u}-e^{2u})+3(e^{3u}-1)+2e^{3u}>0$$

だから，$f_1(u)$ は $[0,\infty)$ で凸関数である．

$r=\sqrt[3]{abc}=1$ とおくと，$f_1(u)$ は $u\geqq \log r=0$ で凸関数であるから，RCF-Corollary より $a\leqq 1\leqq b=c,\ ab^2=1$ のとき不等式が成り立つことをいえばよい．

$g(a)=a^2+2b^2+6-\dfrac{3}{2}\left(a+2b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)$，$(a\leqq 1\leqq b,\ ab^2=1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
g'(a)&=2a+4bb'-\frac{3}{2}\left(1+2b'-\frac{1}{a^2}-\frac{2b'}{b^2}\right)\\
&=2a-\frac{2b^2}{a}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{b}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}\right)\\
&=\frac{2(a^2-b^2)}{a}-\frac{3}{2}\left(\frac{a-b}{a}+\frac{a-b}{a^2b}\right)\\
&=\frac{(a-b)}{2a^2b}\cdot\{4(a+b)ab-3ab-3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4(a+b)ab-3ab-3&=4\left(\frac{1}{b^2}+b\right)\cdot\frac{1}{b^2}\cdot b-3\cdot\frac{1}{b^2}\cdot b-3\\
&=\frac{b^3-3b^2+4}{b^3}=\frac{(b+1)(b-2)^2}{b^3}\geqq 0
\end{aligned}$$

だから，$g'(a)\leqq 0$ となる．

$g(a)$ は減少関数で，$0<a\leqq 1$ のとき $g(a)\geqq g(1)=0$ ■

(解 3)　系 2.8 $\left(p=0,q=\dfrac{1}{2}\right)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

$$abc=1,\ a+b+c=constant$$

ならば，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ は $0<a\leqq b=c$ のとき最大で，$a^2+b^2+c^2$ は $0<a\leqq b=c$ のとき最小であるから，$0<a\leqq b=c$ のとき

$$a^2+2b^2+6\geqq\frac{3}{2}\left(a+2b+\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)$$

を示せばよい．後は解 1 参照． ■

問題 34　(Serbia 2008)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2+3abc \geqq \frac{4}{9}$$

(初等的な不等式 I 問題 95)

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．
$0<a \leqq b \leqq c$ と $a+b+c=1$ から $a \leqq \frac{1}{3} \leqq c$ が成り立つ．
$f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+3abc$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right) &= b^2+c^2-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+3a\left\{bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\} \\
&= \frac{(b-c)^2}{2}-\frac{3a(b-c)^2}{4} \\
&= \frac{(b-c)^2}{4}(2-3a) \geqq 0
\end{aligned}$$

ゆえに，$f(a,b,c) \geqq f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$
$t=\frac{b+c}{2}$ とおくと，$a \leqq \frac{1}{3} \leqq t$, $a+2t=1$ のとき，$f(a,t,t) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
& a^2+2t^2+3at^2 \geqq \frac{4}{9} \\
\Longleftrightarrow\ & a^2+2\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+3a\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \geqq \frac{4}{9} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{27a^3-9a+2}{36} \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (3a-1)^2(3a+2) \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つから，$f(a,t,t) \geqq 0$　■

(解 2)　系 2.8 $(p=0,q=2)$ を適用する．
一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$a+b+c=1,\ abc=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $0<a \leqq \frac{1}{3} \leqq b$ のとき最小であるから，$0<a \leqq \frac{1}{3} \leqq b$ のとき

$$a^2+2b^2+3ab^2 \geqq \frac{4}{9}$$

を示せばよい．後は解 1 参照．　■

問題 35　a, b, c は非負の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3+abc \geqq \frac{1}{7}(a+b+c)^3$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+abc-\dfrac{1}{7}(a+b+c)^3$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right) &= b^3+c^3-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^3+a\left\{bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\} \\ &= \frac{3(b-c)^2(b+c)}{4}-\frac{a(b-c)^2}{4} \\ &= \frac{(b-c)^2}{4}(3b+3c-a) \geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$f(a,b,c) \geqq f\left(a,\dfrac{b+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right)$

$t=\dfrac{b+c}{2}$ とおくと，$a \leqq t$ のとき，$f(a,t,t) \geqq 0$ を示せばよい．

$t=a+x\,(x \geqq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} & a^3+2t^3+at^2 \geqq \frac{1}{7}(a+2t)^3 \\ \Longleftrightarrow\ & a^3+2(a+x)^3+a(a+x)^2 \geqq \frac{1}{7}\left\{a+2(a+x)\right\}^3 \\ \Longleftrightarrow\ & a^3+2a^2x+13ax^2+6x^3 \geqq 0 \end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つから，$f(a,t,t) \geqq 0$　■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

(i) $a=0$ の場合 $b^3+c^3 \geqq \dfrac{1}{7}(b+c)^3$ を示せばよい．

$b^2-bc+c^2 \geqq \dfrac{1}{4}(b+c)^2$ が成り立つから

$$b^3+c^3=(b+c)(b^2-bc+c^2) \geqq \frac{1}{4}(b+c)^3 \geqq \frac{1}{7}(b+c)^3$$

(ii) $0<a \leqq b \leqq c$ の場合

系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

$$a+b+c=constant,\ abc=constant$$

ならば，$a^3+b^3+c^3$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小であるから，$0<a \leqq b=c$ のとき

$$a^3+2b^3+ab^2 \geqq \frac{1}{7}(a+2b)^3$$

を示せばよい．後は解 1 参照．　■

問題 35 の不等式は次のように変えても成立する．

a, b, c は非負の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3+\frac{6}{7}abc \geqq \frac{1}{7}(a+b+c)^3$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

(i) $a=0$ の場合 $b^3+c^3 \geqq \dfrac{1}{7}(b+c)^3$ を示せばよい．

ヘルダーの不等式を使うと

$$(1^3+1^3)(1^3+1^3)(b^3+c^3) \geqq (b+c)^3$$

が成り立つから

$$b^3+c^3 \geqq \frac{1}{4}(b+c)^3 \geqq \frac{1}{7}(b+c)^3$$

(ii) $0<a \leqq b \leqq c$ の場合

不等式は同次式であるから $a+b+c=1$ とおく．

系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

$$a+b+c=1,\ abc=constant$$

ならば，$a^3+b^3+c^3$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小であるから，$0<a \leqq \dfrac{1}{3} \leqq b$, $a+2b=1$ のとき

$$a^3+2b^3+\frac{6}{7}ab^2 \geqq \frac{1}{7}$$

を示せばよい．

$f(a)=a^3+2b^3+\dfrac{6}{7}ab^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 3a^2+6b^2b'+\frac{6}{7}(b^2+2abb') \\
&= 3a^2-3b^2+\frac{6}{7}(b^2-ab) \\
&= 3(a-b)(a+b)+\frac{6}{7}b(b-a) \\
&= (a-b)\left\{3(a+b)-\frac{6}{7}b\right\} \\
&= (a-b)\left(3a+\frac{15}{7}b\right) \leqq 0
\end{aligned}$$

$f(a)$ は減少関数で，$0<a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，$f(a) \geqq f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{7}$　■

問題 36　a, b, c は非負の実数で，$a+b+c=2$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3+\frac{15abc}{4} \geqq 2$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=a^3+b^3+c^2+\dfrac{15}{4}abc-2$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\\
&=b^3+c^3-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^3+\frac{15}{4}a\left\{bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{3(b-c)^2(b+c)}{4}-\frac{15a}{4}\cdot\frac{(b-c)^2}{4}\\
&=\frac{3(b-c)^2}{4}\left\{(b+c)-\frac{5}{4}a\right\} \geqq 0
\end{aligned}$$

ゆえに

$$f(a,b,c) \geqq f\left(a,t,t\right),\ t=\frac{b+c}{2}$$

が成り立つ．

したがって，$a \leqq \dfrac{2}{3} \leqq t$, $a+2t=2$ のとき，$f(a,t,t) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&a^3+2t^3+\frac{15}{4}at^2 \geqq 2\\
\Longleftrightarrow\ &a^3+2\left(\frac{2-a}{2}\right)^3+\frac{15}{4}a\left(\frac{2-a}{2}\right)^2 \geqq 2\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{27a^3-36a^2+12a}{16} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &3a(3a-2)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つから，$f(a,t,t) \geqq 0$　■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

(i) $a=0$ の場合 $b^3+c^3 \geqq 2$ を示せばよい．

$b^2-bc+c^2 \geqq \dfrac{1}{4}(b+c)^2=1$ が成り立つから

$$b^3+c^3=(b+c)(b^2-bc+c^2)=2(b+c)(b^2-bc+c^2) \geqq 2$$

(ii) $0<a \leqq b \leqq c$ の場合

系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

$$a+b+c=2,\ abc=constant$$

ならば，$a^3+b^3+c^3$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小であるから

$0<a \leqq \dfrac{2}{3} \leqq b$ のとき

$$a^3+2b^3+\frac{15}{4}ab^2 \geqq 2$$

を示せばよい．後は解 1 参照. ■

問題 37　(Vasile Cîrtoaje)

$a,\, b,\, c$ は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$5(a+b+c)+\frac{3}{abc} \geqq 18$$

(解答)　系 2.8 $\left(p=0, q=\dfrac{1}{2}\right)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$a^2=A, b^2=B, c^2=C$ とおくと，$0<A \leqq B \leqq C,\, A+B+C=3$ のとき

$$5\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)+\frac{3}{\sqrt{ABC}} \geqq 18$$

を示せばよい．

$$A+B+C=3,\, ABC=constant$$

ならば，$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ は $A=B \leqq C$ のとき最小となる．したがって，

$$0<a=b \leqq 1 \leqq c,\, 2a^2+c^2=3$$

のとき不等式

$$5(2a+c)+\frac{3}{a^2c} \geqq 18$$

が成り立つことを示せばよい．$f(a)=5(2a+c)+\dfrac{3}{a^2c}$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 10+5c'-\frac{3(2ac+a^2c')}{(a^2c)^2} \\
&= 10-\frac{10a}{c}-\frac{6\left(ac-\dfrac{a^3}{c}\right)}{(a^2c)^2} \\
&= \frac{10(c-a)}{c}-\frac{6(c-a)(c+a)}{a^3c^3} \\
&= \frac{2(c-a)\left\{5a^3c^2-3(c+a)\right\}}{a^3c^3}
\end{aligned}$$

$5a^3c^2<3(c+a)$ を示す．

相加平均と相乗平均の不等式から

$$3=a^2+a^2+c^2 \geqq 3\sqrt[3]{a^4c^2} \quad ゆえに \quad a^2c \leqq 1$$

コーシーシュワルツの不等式から

$$\frac{9}{2}=\left(\frac{1}{2}+1\right)(2a^2+c^2) \geqq (a+c)^2 \quad ゆえに \quad a+c \leqq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{a} \geqq \frac{4}{a+c} \geqq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

から，$c+a \geqq \dfrac{4\sqrt{2}}{3}ca$
よって

$$5a^3c^2 = 5ac\cdot a^2c \leqq 5ac \leqq \frac{15\sqrt{2}}{8}(a+c) < 3(a+c)$$

から，$f'(a) \leqq 0$

$f(a)$ は減少関数で，$0 < a \leqq 1$ のとき，$f(a) \geqq f(1) = 18$ ■

[注]　$5a^3c^2 < 3(c+a)$ はもっと簡単に示せる．

$$3 = 2a^2 + c^2 \geqq 2\sqrt{2}ac \quad \text{ゆえに} \quad a^2c^2 \leqq \frac{9}{8}$$

が成り立つから

$$5a^3c^2 = 5a\cdot a^2c^2 \leqq \frac{45}{8}a < 6a \leqq 3(c+a)$$

[注]　$0 < a = b \leqq 1 \leqq c$, $2a^2 + c^2 = 3$ のとき

$$\begin{aligned}
&5(2a+c) + \frac{3}{a^2c} \geqq 18 \\
\Longleftrightarrow\ & 5(2a+c)a^2c + 3 \geqq 18a^2c \\
\Longleftrightarrow\ & (18a^2 - 10a^3)c \leqq 3 + 15a^2 - 10a^4 \\
\Longleftrightarrow\ & (18a^2 - 10a^3)^2(3 - 2a^2) \leqq (3 + 15a^2 - 10a^4)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 300a^8 - 720a^7 + 48a^6 + 1080a^5 - 807a^4 + 90a^2 + 9 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 3(a-1)^2(100a^6 - 40a^5 - 164a^4 + 72a^3 + 39a^2 + 6a + 3) \geqq 0
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&100a^6 - 40a^5 - 164a^4 + 72a^3 + 39a^2 + 6a + 3 \\
&\geqq 100a^6 - 40a^5 - 164a^4 + 72a^4 + 39a^2 + 6a + 3 \\
&= (25a^6 - 40a^5 + 16a^4) + (75a^6 - 108a^4 + 39a^2) + 6a + 3 \\
&= (5a-4)^2a^4 + \underbrace{(75a^4 - 108a^2 + 39)}_{>0}a^2 + 6a + 3 > 0
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$3(a-1)^2(100a^6 - 40a^5 - 164a^4 + 72a^3 + 39a^2 + 6a + 3) \geqq 0$$

問題 38　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は非負の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$12+9abc \geqq 7(ab+bc+ca)$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$a=0$ の場合

$b^2+c^2=3,\ 0 \leqq b \leqq c$ のとき，$12 \geqq 7bc$ を示せばよい．

これは

$$3=b^2+c^2 \geqq 2bc \quad \text{から} \quad bc \leqq \frac{3}{2} < \frac{12}{7}$$

から示される．

$0 < a \leqq b \leqq c$ の場合

系 2.8 $\left(p=0, q=\dfrac{1}{2}\right)$ を適用する．

$a^2=A, b^2=B, c^2=C$ とおくと，証明すべき不等式は

$0 < A \leqq B \leqq C,\ A+B+C=3$ のとき

$$12+9\sqrt{ABC} \geqq \frac{7}{2}\left\{\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)^2-(A+B+C)\right\}$$

となる．

$$A+B+C=3,\ ABC=constant$$

ならば，$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ は $A \leqq B=C$ のとき最大となる．したがって

$$0 < a \leqq 1 \leqq b=c,\ a^2+2b^2=3$$

のとき不等式

$$12+9ab^2 \geqq 14ab+7b^2$$

が成り立つことを示せばよい．

$f(a)=12+9ab^2-(14ab+7b^2)$ とおくと，$b'=-\dfrac{a}{2b}$ で

$$\begin{aligned} f'(a) &= 9b^2+18abb'-14(b+ab')-14bb' \\ &= 9b^2-9a^2-14b+\frac{7a^2}{b}+7a \\ &= 9(b-a)(b+a)+\frac{7(a-b)(a+2b)}{b} \\ &= \frac{(b-a)\left\{9(ab+b^2)-7(a+2b)\right\}}{b} \end{aligned}$$

$9(ab+b^2) < 7(a+2b)$ を示す．

コーシーシュワルツの不等式から

$$9 = (1+2)\,(a^2+2b^2) \geqq (a+2b)^2 \quad ゆえに \quad a+2b \leqq 3$$

これを使うと

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \geqq \frac{4}{a+2b} \geqq \frac{4}{3}$$

から，$a+2b \geqq \dfrac{4}{3}b(a+b)$ を得る．

よって

$$9b(a+b) \leqq \frac{27}{4}(a+2b) < 7(a+2b)$$

から，$9(ab+b^2) < 7(a+2b)$ となり，$f'(a) \leqq 0$

$f(a)$ は減少関数で，$0 < a \leqq 1$ のとき，$f(a) \geqq f(1) = 0$ ■

問題 39 (Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は非負の実数で，$ab+bc+ca=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3+7abc \geqq 10$$

(解答) 一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$a=0$ の場合

$bc=3, b>0, c>0$ のとき，$b^3+c^3 \geqq 10$ を示せばよい．

$$b^3+c^3 \geqq 2\sqrt{(bc)^3}=6\sqrt{3}>10$$

$0<a \leqq b \leqq c$ の場合

系 2.8 $(p=0, q=-3)$ を適用する．

$\dfrac{1}{a}=A, \dfrac{1}{b}=B, \dfrac{1}{c}=C$ とおくと，証明すべき不等式は

$0<C \leqq B \leqq A$, $A+B+C=3ABC$ のとき

$$\frac{1}{A^3}+\frac{1}{B^3}+\frac{1}{C^3}+\frac{7}{ABC} \geqq 10$$

となる．

$$A+B+C=constant,\ ABC=constant$$

ならば，$\dfrac{1}{A^3}+\dfrac{1}{B^3}+\dfrac{1}{C^3}$ は $C=B \leqq A$ のとき最小となる．したがって，

$$0<a \leqq 1 \leqq b=c,\ b^2+2ab=3$$

のとき不等式

$$a^3+2b^3+7ab^2 \geqq 10$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned}
&a^3+2b^3+7ab^2 \geqq 10\\
\Longleftrightarrow\ &\left(\frac{3-b^2}{2b}\right)^3+2b^3+7\cdot\frac{3-b^2}{2b}\cdot b^2 \geqq 10\\
\Longleftrightarrow\ &-\frac{13b^6-93b^4+80b^3+27b^2-27}{8b^3} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &(b-1)^2(b+3)(-13b^3+13b^2+15b+9) \geqq 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

$1 \leqq b < \sqrt{3}$ だから

$$\begin{aligned} 13b^3 &= b^3 + 5b^3 + 7b^3 \\ &< 3\sqrt{3} + 15b + 7\sqrt{3}b^2 \\ &< 9 + 15b + 13b^2 \end{aligned}$$

よって $-13b^3 + 13b^2 + 15b + 9 > 0$ となり，$(*)$ は成り立つ． ■

[注]　$-13b^3 + 13b^2 + 15b + 9 > 0$ は次のように示すこともできる．

$f(b) = -13b^3 + 13b^2 + 15b + 9\,(1 \leqq b < \sqrt{3})$ とおくと

$$f'(b) = -39b^2 + 26b + 15$$

$f'(b) = 0$ は $1 < b < \sqrt{3}$ においてただ 1 つの解をもつから，これを α とおくと，

$1 \leqq b < \alpha$ で $f'(b) > 0$，$\alpha < b < \sqrt{3}$ で $f'(b) < 0$

また，$f(1) = 24$, $\displaystyle\lim_{b \to \sqrt{3}} f(b) = 48 - 24\sqrt{3} > 0$ なので，$f(b) > 0$

問題 40　a, b, c は正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3}\geqq\frac{3}{ab+bc+ca}$$

(解答)　系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．
一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．
証明すべき不等式は

$$\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3}\geqq\frac{6}{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}$$

と変形できる．

$$abc=1,\ a+b+c=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $a=b\leqq c$ のとき最大となる．
したがって

$$0<a\leqq 1\leqq c,\ a^2c=1$$

のとき不等式

$$\frac{2}{2a+c}+\frac{1}{3}\geqq\frac{3}{a^2+2ca}$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{2a+c}+\frac{1}{3}\geqq\frac{3}{a^2+2ca}\\
\iff&\frac{2}{2a+\dfrac{1}{a^2}}+\frac{1}{3}\geqq\frac{3}{a^2+2a\cdot\dfrac{1}{a^2}}\\
\iff&\frac{2a^2}{2a^3+1}+\frac{1}{3}\geqq\frac{3a}{a^3+2}\\
\iff&2a^6+6a^5-18a^4+5a^3+12a^2-9a+2\geqq 0\\
\iff&(a-1)^2(2a^4+10a^3-5a+2)\geqq 0
\end{aligned}\qquad(*)$$

ここで

$$\begin{aligned}
2a^4+10a^3-5a+2&\geqq 2a^4+10a^4-5a+2\\
&=\underbrace{12a^4-\frac{13}{2}a^2+1}_{>0}+\underbrace{\frac{13}{2}a^2-5a+1}_{>0}>0
\end{aligned}$$

だから，$(*)$ は成り立つ．　■

[注]　$0 < a \leqq 1$ のとき $2a^4 + 10a^3 - 5a + 2 > 0$ が成り立つことは次のように示すことができる.

$s = \dfrac{1}{a}\,(s \geqq 1), t = s + 1\,(s \geqq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&2a^4 + 10a^3 - 5a + 2 \geqq 0 \\
\iff& 2s^4 - 5s^3 + 10s + 2 > 0 \\
\iff& 2(t+1)^4 - 5(t+1)^3 + 10(t+1) + 2 > 0 \\
\iff& 2t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 3t + 9 > 0
\end{aligned}$$

ここで

$$2t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 3t + 9 = 2t^4 + 3\underbrace{\left(t^2 - t + 1\right)}_{>0}t + 9 > 0$$

となる.

問題 41 　$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$ab+bc+ca \leqq abc+2$$

(解 1) 　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$0<a \leqq b \leqq c,\ a^2+b^2+c^2=3$ から $0<a \leqq 1 \leqq c$ が成り立つ．

$f(a,b,c)=ab+bc+ca-abc=a(b+c)+bc-abc$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)\\
&=a\left(b+c-2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)+bc-\frac{b^2+c^2}{2}-a\left(bc-\frac{b^2+c^2}{2}\right)\\
&=a\cdot\frac{(b+c)^2-2(b^2+c^2)}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}-\frac{(b-c)^2}{2}+\frac{a(b-c)^2}{2}\\
&=(b-c)^2\left(-\frac{a}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}-\frac{1-a}{2}\right)\leqq 0
\end{aligned}$$

よって

$$f(a,b,c) \leqq f\left(a,t,t\right),\ t=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$$

が成り立つ．

したがって $0<a \leqq 1 \leqq t,\ a^2+2t^2=3$ のとき

$$f(a,t,t)=t^2+2at-at^2 \leqq 2$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
t^2+2at-at^2 \leqq 2 &\iff 3-a^2+4at-2at^2 \leqq 4\\
&\iff 2a(t-1)^2+(a-1)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

(解 2) 　系 2.8 $\left(p=0, q=\dfrac{1}{2}\right)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$a=\sqrt{A}, b=\sqrt{B}, c=\sqrt{C}$ とおくと，$0<A \leqq B \leqq C,\ A+B+C=3$ のとき

$$(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})^2-(A+B+C) \leqq 2\sqrt{ABC}+4$$

を示せばよい．

$$A+B+C=3,\ ABC=constant$$

ならば，$(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})^2$ は $0<A \leqq B=C$ のとき最大となる．
したがって，$0<a \leqq b=c$ のときを考えればよい．

$0<a \leqq 1 \leqq b,\ a^2+2b^2=3$ のとき，$2ab+b^2 \leqq ab^2+2$ を示す．

$f(a)=ab^2+2-2ab-b^2$ とおくと，$a^2+2b^2=3$ から $b'=-\dfrac{a}{2b}$

$$\begin{aligned}
f'(a) &= b^2+2abb'-2b-2ab'-2bb' \\
&= b^2-a^2-2b+\frac{a^2}{b}+a \\
&= b^2-a^2+\frac{a^2+ab-2b^2}{b} \\
&= (b-a)(b+a)+\frac{(a-b)(a+2b)}{b} \\
&= \frac{(b-a)}{b}(ab+b^2-a-2b)
\end{aligned}$$

$b(a+b)-(a+2b)<0$ を示す．

$$9=(1+2)(a^2+2b^2) \geqq (a+2b)^2 \quad \text{から} \quad a+2b \leqq 3$$

これを使うと

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b} \geqq \frac{4}{a+2b} \geqq \frac{4}{3}>1$$

よって，$a+2b>b(a+b)$ が成り立つから，$f'(a) \leqq 0$

$f(a)$ は減少関数で，$0<a \leqq 1$ のとき，$f(a) \geqq f(1)=0$ ■

問題 42　a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 4(a^3+b^3+c^3)+21$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4(a^3+b^3+c^3)-21$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\\
&=12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}\right)-4\left\{a^3+b^3-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\right\}\\
&=\frac{12(a-b)^2}{ab(a+b)}-3(a-b)^2(a+b)\\
&=\frac{3(a-b)^2}{ab(a+b)}\left\{4-ab(a+b)^2\right\}
\end{aligned}$$

$4-ab(a+b)^2 \geqq 0$ を示す．

$c \geqq 1$ となるから $a+b=3-c \leqq 2$

これを使うと，$2 \geqq a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ から $ab \leqq 1$

よって，$ab(a+b)^2 \leqq (a+b)^2 \leqq 4$ だから

$$f(a,b,c) \geqq f(t,t,c),\ t=\frac{a+b}{2}$$

したがって $0<t \leqq 1 \leqq c$, $2t+c=3$ のとき，$f(t,t,c) \geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
f(t,t,c) \geqq 0 &\Longleftrightarrow 12\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{c}\right)-4(2t^3+c^3)-21 \geqq 0\\
&\Longleftrightarrow 12\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{3-2t}\right)-4\left\{2t^3+(3-2t)^3\right\}-21 \geqq 0\\
&\Longleftrightarrow -\frac{48t^5-360t^4+864t^3-906t^2+423t-72}{t(3-2t)} \geqq 0\\
&\Longleftrightarrow 3(2t-1)^2(-4t^3+26t^2-45t+24) \geqq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4t^3+26t^2-45t+24 &= -4t^3+26t^2-45t+23+1\\
&=(1-t)\underbrace{(4t^2-22t+23)}_{>0}+1>0
\end{aligned}$$

だから，$f(t,t,c) \geqq 0$　■

(解 2)　系 2.8 ($p=-1, q=3$) を適用する．

一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$a+b+c=3,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=constant$$

ならば，$a^3+b^3+c^3$ は $0 < a = b \leqq c$ のとき最大となる．

したがって，$0 < a \leqq 1 \leqq c,\ 2a+c=3$ のとき

$$12\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{c}\right) \geqq 4(2a^3+c^3)+21$$

を示せばよい．後は解 1 参照． ■

問題 43　　$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$abc=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c} \geqq 5$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a<b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{6}{a+b+c}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)\\
&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)+\frac{6}{a+b+c}-\frac{6}{2\sqrt{ab}+c}\\
&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{ab}-\frac{6(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+b+c)(2\sqrt{ab}+c)}\\
&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{ab(a+b+c)(2\sqrt{ab}+c)}\Big\{(a+b+c)(2\sqrt{ab}+c)-6ab\Big\}
\end{aligned}$$

$(a+b+c)(2\sqrt{ab}+c)-6ab>0$ を示す．

$$\begin{aligned}
(a+b+c)(2\sqrt{ab}+c) &\geqq (a+2b)(2a+b)\\
&> 2\sqrt{2ab}\cdot 2\sqrt{2ab}\\
&= 8ab > 6ab
\end{aligned}$$

したがって，$f(a,b,c) \geqq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$ が成り立つ．

$t=\sqrt{ab}$ とおくと，$0<t \leqq 1 \leqq c,\ t^2c=1$ のとき，$f(t,t,c) \geqq 5$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
f(t,t,c) \geqq 5 &\iff \frac{2}{t}+\frac{1}{c}+\frac{6}{2t+c} \geqq 5\\
&\iff \frac{2}{t}+t^2+\frac{6t^2}{2t^3+1} \geqq 5\\
&\iff \frac{2t^6-10t^4+11t^3-5t+2}{t(2t^3+1)} \geqq 0\\
&\iff (t-1)^2(2t^4+4t^3-4t^2-t+2) \geqq 0
\end{aligned}$$

$u=\frac{1}{t}\,(\geqq 1)\,,v=u-1\,(\geqq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}
2t^4+4t^3-4t^2-t+2>0 &\iff 2u^4-u^3-4u^2+4u+2>0\\
&\iff 2(v+1)^4-(v+1)^3-4(v+1)^2+4(v+1)+2>0\\
&\iff 2v^3+7v^3+5v^2+v+3>0
\end{aligned}$$

だから，$f(t,t,c) \geqq 5$ は成り立つ．　■

(解 2)　系 2.8 $(p=0, q=-1)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$abc = 1,\ a+b+c = constant$$

ならば，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ は $a = b \leqq c$ のとき最小となる．

したがって

$$0 < a \leqq 1 \leqq c,\ a^2c = 1$$

のとき不等式

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{c}+\frac{6}{2a+c} \geqq 5$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{c}+\frac{6}{2a+c} \geqq 5 \Longleftrightarrow \frac{2}{a}+a^2+\frac{6a^2}{2a^3+1} \geqq 5$$

$f(a) = \dfrac{2}{a}+a^2+\dfrac{6a^2}{2a^3+1}$ $(0 < a \leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{2}{a^2}+2a-\frac{12a(a^3-1)}{(2a^3+1)^2} \\ &= -\frac{2(a^3-1)}{a^2}-\frac{12a(a^3-1)}{(2a^3+1)^2} \\ &= \frac{2(a^3-1)(4a^6-2a^3+1)}{a^2(2a^3+1)^2} \leqq 0 \end{aligned}$$

$f(a)$ は減少関数で，$0 < a \leqq 1$ のとき，$f(a) \geqq f(1) = 5$　■

問題 44　　a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca} \geqq 5$$

(解答)　系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

証明すべき不等式は

$$abc+\frac{24}{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)} \geqq 5$$

と変形できる．

$$a+b+c=3,\ abc=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $a \leqq b=c$ のとき最小となる．したがって，

$$0<a \leqq 1 \leqq b=c,\ a+2b=3$$

のとき不等式

$$ab^2+\frac{12}{b^2+2ab} \geqq 5$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned}
&ab^2+\frac{12}{b^2+2ab} \geqq 5 \\
\iff &(3-2b)b^2+\frac{12}{(b^2+2(3-2b)b} \geqq 5 \\
\iff &2b^5-7b^4+6b^3+5b^2-10b+4 \geqq 0 \\
\iff &(b-1)^2(2b^3-3b^2-2b+4) \geqq 0
\end{aligned}$$

だから，$0 \leqq b < \dfrac{3}{2}$ のとき $2b^3-3b^2-2b+4>0$ を示す．

$f(b)=2b^3-3b^2-2b+4$ とおくと

$$f'(b)=6b^2-6b-2$$

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}<\dfrac{3}{2}$ とおくと，増減表は次のようになる．

b	1	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(b)$		$-$	0	$+$	0
$f(b)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$f(b)$ は $x = \alpha$ で最小値

$$f'(\alpha) = (3\alpha^2 - 3\alpha - 1) \cdot \frac{2\alpha - 1}{3} - \frac{7\alpha - 11}{3} = \frac{11 - 7\alpha}{3}$$

をとる．

$\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{6} < \dfrac{3}{2} < \dfrac{11}{7}$ だから，$11 - 7\alpha > 0$

よって，$f(\alpha) > 0$ となるから，$f(b) > 0$ ■

問題 45　(Zdravko Cvetkovski)

a, b, c は正の実数で，$ab+bc+ca=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a^3-a+5)(b^5-b^3+5)(c^7-c^5+5) \geqq 125$$

(解答)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$(a-1)(a^2-1) \geqq 0$, $(b^2-1)(b^3-1) \geqq 0$, $(c^2-1)(c^5-1) \geqq 0$ から

$$a^3-a \geqq a^2-1,\ b^5-b^3 \geqq b^2-1,\ c^7-c^5 \geqq c^2-1$$

よって

$$a^3-a+5 \geqq a^2+4,\ b^5-b^3+5 \geqq b^2+4,\ c^7-c^5+5 \geqq c^2+4$$

の辺々をかけると

$$(a^3-a+5)(b^5-b^3+5)(c^7-c^5+5) \geqq (a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)$$

したがって

$$(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4) \geqq 125$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} &(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4) \geqq 125 \\ \Longleftrightarrow\ &a^2b^2c^2+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+16(a^2+b^2+c^2) \geqq 61 \end{aligned}$$

$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ が成り立つから，$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqq abc(a+b+c)$

これを使うと

$$a^2b^2c^2+4abc(a+b+c)+16(a^2+b^2+c^2) \geqq 61$$

を証明すればよい．

系 2.7 ($p=2$) を適用する．

$3=ab+bc+ca=\dfrac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}$ より

$$a+b+c=constant,\ a^2+b^2+c^2=constant$$

ならば，abc $0<a \leqq b=c$ のとき最小となる．

したがって，$0<a \leqq 1 \leqq b$, $2ab+b^2=3$ のとき

$$a^2b^4+4ab^2(a+2b)+16(a^2+2b^2) \geqq 61$$

を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&a^2b^4+4ab^2(a+2b)+16(a^2+2b^2) \geqq 61\\
\iff &\left(\frac{3-b^2}{2b}\right)^2 b^4+4\left(\frac{3-b^2}{2b}\right)^2 b^2+8\left(\frac{3-b^2}{2b}\right) b^3+16\left(\frac{3-b^2}{2b}\right)^2+32b^2 \geqq 61\\
\iff &\frac{b^8-18b^6+177b^4-304b^2+144}{4b^2} \geqq 0\\
\iff &\frac{(b-1)^2(b+1)^2(b^4-16b^2+144)}{4b^2} \geqq 0
\end{aligned}
$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

[注]　a, b, c は正の実数で，$ab+bc+ca=3$ を満たすとき

$$(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4) \geqq 125$$

を示したが，一般的に

> x, y, z が正の実数のとき
>
> $$(x^2+4)(y^2+4)(z^2+4) \geqq 5(x+y+z+2)^2 \qquad (*)$$
>
> が成り立つ．

$ab+bc+ca=3$ のときは，$(a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)=9$ から $a+b+c \geqq 3$ で $a+b+c+2 \geqq 5$

よって，$(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4) \geqq 5(a+b+c)^2 \geqq 125$ がいえる．

$(*)$ の証明

$(x^2-1)(y^2-1)<0$ かつ $(y^2-1)(z^2-1)<0$ かつ $(z^2-1)(x^2-1)<0$

と仮定して，これらの不等式の辺々をかけると，$(x^2-1)^2(y^2-1)^2(z^2-1)^2<0$ となるが，これは $(x^2-1)^2(y^2-1)^2(z^2-1)^2 \geqq 0$ に矛盾する．

よって

$(x^2-1)(y^2-1) \geqq 0$ または $(y^2-1)(z^2-1) \geqq 0$ または $(z^2-1)(x^2-1) \geqq 0$

となる．

$(y^2-1)(z^2-1) \geqq 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
&(y^2+4)(z^2+4)-5(y^2+z^2+3)\\
&=y^2z^2+3(y^2+z^2)-2yz-6(y+z)+7\\
&=(y^2-1)(z^2-1)+(y-z)^2+3(y-1)^2+3(z-1)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

から

$$(y^2+4)(z^2+4) \geqq 5(y^2+z^2+3)$$

を得る．したがって

$$(x^2+4)(y^2+z^2+3) \geqq (x+y+z+2)^2$$

を示せばよい．これは，コーシーシュワルツの不等式

$$(x^2+1+1+2)(1+y^2+z^2+2) \geqq (x+y+z+2)^2$$

から得られる． ■

問題 46　　a, b, c は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$8(a^3+b^3+c^3) \geqq (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=8(a^3+b^3+c^3)-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \\
&=8\left\{b^3+c^3-2\left(\frac{b+c}{2}\right)^3\right\}-(a+b)^3-(c+a)^3+2\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^3 \\
&=8\cdot\frac{3(b-c)^2(b+c)}{4}-\frac{3(b-c)^2(2a+b+c)}{4} \\
&=\frac{3(b-c)^2}{4}\{8(b+c)-(2a+b+c)\} \\
&=\frac{3(b-c)^2}{4}\{7(b+c)-2a\} \geqq 0
\end{aligned}$$

から

$$f(a,b,c) \geqq f(a,t,t),\ t=\frac{b+c}{2}$$

が成り立つ．

$0<a \leqq t$ のとき

$$\begin{aligned}
f(a,t,t)&=8(a^3+2t^3)-2(a+t)^3-(2t)^3 \\
&=6t^3-6at^2-6a^2t+6a^3 \\
&=6(t-a)^2(t+a) \geqq 0
\end{aligned}$$

■

(解 2)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

不等式は同次式だから，$a+b+c=3$ と仮定できる．このとき，証明すべき不等式は

$$8(a^3+b^3+c^3) \geqq (3-a)^3+(3-b)^3+(3-c)^3$$

となる．

$f(x)=8x^3-(3-x)^3 \quad (x>0)$ とおくと，$f''(x)=18(3x-1)$

$f(x)$ は $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ で凸関数である．

$s=\dfrac{a+b+c}{3}=1$ とおくと，$f(x)$ は $[1,\infty)$ で凸関数である．

RCF-Theorem より $0<a \leqq 1 \leqq b=c$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．
後は解 1 参照．　■

(解 3)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる.

$$\begin{aligned} & 8(a^3+b^3+c^3) \geqq (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3 \\ \Longleftrightarrow\ & 2(a^3+b^3+c^3) \geqq a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b \\ \Longleftrightarrow\ & 3(a^3+b^3+c^3) \geqq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \qquad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

系 2.8 $(p=2, q=3)$ を適用する.

$$a+b+c = constant,\ a^2+b^2+c^2 = constant$$

ならば，$a^3+b^3+c^3$ は $0 < a \leqq b = c$ のとき最小となる．後は解 1 参照. ■

(解 4)　不等式を同値変形して

$$3(a^3+b^3+c^3) \geqq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \qquad \cdots\cdots(*)$$

を示せばよい.
コーシーシュワルツの不等式より

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geqq (a^2+b^2+c^2)^2 \qquad \cdots\cdots①$$

ヘルダーの不等式より

$$(1+1+1)(1+1+1)(a^3+b^3+c^3) \geqq (a+b+c)^3 \qquad \cdots\cdots②$$

① × ② から

$$9(a^3+b^3+c^3)^2 \geqq (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)^2$$

よって，$(*)$ は成り立つ. ■

(解 5)　$f(t) = t^3 \quad (t > 0)$ は凸関数だから

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geqq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{より} \quad \frac{a^3+b^3}{2} \geqq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

よって，$4(a^3+b^3) \geqq (a+b)^3$ が成り立つ.
同様にして，$4(b^3+c^3) \geqq (b+c)^3$, $4(c^3+a^3) \geqq (c+a)^3$ が成り立つから，これらの不等式の辺々を加えると

$$8(a^3+b^3+c^3) \geqq (a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$$ ■

問題 47　a, b, c は非負の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b) \leqq \frac{1}{12}(a+b+c)^5$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$a=0$ のとき

$$b^4c+bc^4 \leqq \frac{1}{12}(b+c)^5$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} & b^4c+bc^4 \leqq \frac{1}{12}(b+c)^5 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{b^5-7b^4c+10b^3c^2+10b^2c^3-7bc^4+c^5}{12} \geqq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{(b+c)(b^2-4bc+c^2)^2}{12} \geqq 0 \end{aligned}$$

$\dfrac{(b+c)(b^2-4bc+c^2)^2}{12} \geqq 0$ は明らかに成り立つ．

$0 < a \leqq b \leqq c$ の場合

証明すべき不等式は同次式だから，$a+b+c=3$ と仮定できる．

このとき

$$\begin{aligned} & a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b) \leqq \frac{1}{12}(a+b+c)^5 \\ \Longleftrightarrow\ & a^4(3-a)+b^4(3-b)+c^4(3-c) \leqq \frac{81}{4} \\ \Longleftrightarrow\ & 3(a^4+b^4+c^4) \leqq a^5+b^5+c^5+\frac{81}{4} \end{aligned}$$

系 2.8 $(p=4, q=5)$ を適用する．

$$a+b+c=3,\ a^4+b^4+c^4=constant$$

ならば，$a^5+b^5+c^5$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小となる．

$0 < a \leqq 1 \leqq b$, $a+2b=3$ のとき

$$a^4(3-a)+2b^4(3-b) \leqq \frac{81}{4}$$

を示せばよい.

$$
\begin{aligned}
& a^4(3-a)+2b^4(3-b) \leqq \frac{81}{4} \\
\Longleftrightarrow\ & a^4(3-a)+2\left(\frac{3-a}{2}\right)^4\left(3-\frac{3-a}{2}\right) \leqq \frac{81}{4} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{15a^5-39a^4-18a^3-54a^2+243a+81}{16} \geqq 0
\end{aligned}
$$

$$
39a^4+18a^3+54a^2 \leqq 39a+18a+54a=111a
$$

より

$$
\begin{aligned}
& 15a^5-39a^4-18a^3-54a^2+243a+81 \\
=\ & (\underbrace{111a-39a^4-18a^3-54a^2}_{\geqq 0})+15a^5+132a+81>0
\end{aligned}
$$

■

問題 48　　a, b, c は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \leqq a+b+c$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=a+b+c-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)\\
&=b+c-2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}-\left\{b^2c^2-\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{-(b-c)^2}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}+\frac{(b^2-c^2)^2}{4}\\
&=(b-c)^2\left\{\frac{(b+c)^2}{4}-\frac{1}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}\right\}
\end{aligned}$$

$\dfrac{(b+c)^2}{4}-\dfrac{1}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}>0$ を示す．

$a \leqq 1$ で $b^2+c^2=3-a^2 \geqq 2$ から $b^2+c^2 \geqq 2$

また，$(b+c)^2>b^2+c^2 \geqq 2$ から $b+c>\sqrt{2}$

これらのことから

$$\frac{(b+c)^2}{4}>\frac{(\sqrt{2})^2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}<\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+2}<\frac{1}{2}$$

よって，$\dfrac{(b+c)^2}{4}-\dfrac{1}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}>0$ となるから，

$$f(a,b,c) \geqq f\left(a,t,t\right),\ t=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$$

したがって，$0<a \leqq 1 \leqq t$, $a^2+2t^2=3$ のとき，$f(a,t,t) \geqq 0$ が成り立つことを示せば

よい．

$$\begin{aligned}
f(a,t,t) \geqq 0 &\iff 2t \geqq -a + 2a^2t^2 + t^4 \\
&\iff 2t \geqq -a + 2a^2\left(\frac{3-a^2}{2}\right) + \left(\frac{3-a^2}{2}\right)^4 \\
&\iff \sqrt{2(3-a^2)} \geqq -\frac{3a^4-6a^2+4a-9}{4} \\
&\iff 2(3-a^2) \geqq \left(\frac{3a^4-6a^2+4a-9}{4}\right)^2 \\
&\quad \because -3a^4+6a^2-4a+9 = (-3a^4+6a^2)+(-4a+9) > 0 \\
&\iff -\frac{9a^8-36a^6+24a^5-18a^4-48a^3+156a^2-72a-15}{16} \geqq 0 \\
&\iff 3(a-1)^2(-3a^6-6a^5+3a^4+4a^3+11a^2+34a+5) \geqq 0
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&-3a^6-6a^5+3a^4+4a^3+11a^2+34a+5 \\
=& \underbrace{(-3a^6+3a^4)}_{\geqq 0} + \underbrace{(-6a^5+11a^2)}_{>0} + 4a^3+34a+5 > 0
\end{aligned}$$

が成り立つから，$f(a,t,t) \geqq 0$ ■

(解 2)　系 2.8 $(p=2, q=4)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

不等式を変形した

$$(a^2+b^2+c^2)^2 - (a^4+b^4+c^4) \leqq 2(a+b+c)$$

を示せばよい．

$$a^2+b^2+c^2 = 3,\ a+b+c = constant$$

ならば，$a^4+b^4+c^4$ は $0 < a \leqq b = c$ のとき最小となる．

したがって，$0 < a \leqq 1 \leqq b,\ a^2+2b^2=3$ のとき，$2a^2b^2+b^4 \leqq a+2b$ を示せばよい．

$f(a) = a+2b-(2a^2b^2+b^4)\ (0 < a \leqq 1 \leqq b,\ a^2+2b^2=3)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 1+2b'-4ab^2-4a^2bb'-4b^3b' \\
&= 1-\frac{a}{b}-4ab^2+2a^3+2ab^2 = 1-\frac{a}{b}-2ab^2+2a^3 \\
&= \frac{b-a}{b} - 2a(b^2-a^2) \\
&= \frac{b-a}{b}\left\{1-2ab(a+b)\right\}
\end{aligned}$$

$h(a) = 1 - 2ab(a+b) = 1 - 2(a^2b + ab^2)$ とおくと

$$\begin{aligned} h'(a) &= -2(2ab + a^2b' + b^2 + 2abb') \\ &= -2\left\{2ab - \frac{a^3}{2b} + b^2 - a^2\right\} \\ &= -\left\{\frac{a(4b^2 - a^2)}{b} + 2(b^2 - a^2)\right\} < 0 \end{aligned}$$

より，$h(a)$ は減少関数で

$$\lim_{a \to +0} h(a) = 1 > 0,\ h(1) = -3 < 0$$

だから，$h(a) = 0$ は $(0, 1)$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつ．この解を α とおくと
$0 < a < \alpha$ のとき，$h(a) > 0$，$\alpha < a \leqq 1$ のとき，$h(a) < 0$ である．
よって $0 < a < \alpha$ のとき，$f'(a) > 0$，$\alpha < a < 1$ のとき，$f'(a) < 0$ である．

$$\lim_{a \to +0} f(a) = \sqrt{6} - \frac{9}{4} > 0,\ f(1) = 0$$

だから，$f(a)$ は $a = 1$ で最小値 $f(1) = 0$ をとるから，$0 < a \leqq 1$ のとき $f(a) \geqq 0$ ■

問題 49 (Vasile Cîrtoaje)

$a,\ b,\ c,\ d$ は非負の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd \geqq 16$$

(解 1) 一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる.

$f(a,b,c,d)=3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd-16$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d)-f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\\
&=3\left\{b^2+d^2-2\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}+4ac\left\{bd-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{3(b-d)^2}{2}-ac(b-d)^2\\
&=(b-d)^2\left(\frac{3}{2}-ac\right)
\end{aligned}$$

$\dfrac{3}{2}-ac>0$ を示す.

$a+c \leqq b+d,\ (a+c)+(b+d)=4$ より $a+c \leqq 2$

これから

$$2 \geqq a+c \geqq 2\sqrt{ac} \quad \text{より} \quad ac \leqq 1 < \frac{3}{2}$$

よって，$f(a,b,c,d) \geqq f\left(a,\dfrac{b+d}{2},c,\dfrac{b+d}{2}\right)$

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \geqq f(a,t,t,t), \quad t=\frac{b+c+d}{3}$$

が成り立つ．したがって，$0 \leqq a \leqq 1 \leqq t \leqq \dfrac{4}{3},\ a+3t=4$ のとき，$f(a,t,t,t) \geqq 0$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}
&f(a,t,t,t) \geqq 0\\
&\Longleftrightarrow 3(a^2+3t^2)+4at^3 \geqq 16\\
&\Longleftrightarrow 3(4-3t)^2+9t^2+4(4-3t)t^3 \geqq 16\\
&\Longleftrightarrow -12t^4+16t^3+36t^2-72t+32 \geqq 0\\
&\Longleftrightarrow 4(t-1)^2(t+2)(4-3t) \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ. ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

(i) $a = 0$ のとき

$b + c + d = 4$ のとき，$3(b^2 + c^2 + d^2) \geqq 16$ をしめせばよく，これは コーシーシュワルツの不等式を使うと

$$(1 + 1 + 1)(b^2 + c^2 + d^2) \geqq (b + c + d)^2 = 4^2$$

が成り立つことから得られる．

(ii) $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ の場合

系 2.8 $(p = 0, q = 2)$ を適用する．

$$a + b + c + d = 4,\ abcd = constant$$

ならば，$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ は $0 < a \leqq b = c = d$ のとき最小となる．後は解 1 参照．　■

問題 50　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は非負の実数で，$a^2+b^2+c^2=a+b+c$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \leqq ab+bc+ca$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$0 < a \leqq b \leqq c$ の場合

証明すべき不等式を変形する．

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)^2-(a^4+b^4+c^4) \leqq (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\ \Longleftrightarrow\ & a^4+b^4+c^4 \geqq a^2+b^2+c^2\\ \Longleftrightarrow\ & (a+b+c)^2(a^4+b^4+c^4) \geqq (a^2+b^2+c^2)^3\end{aligned}$$

系 2.8 $(p=2, q=4)$ を適用する．

$$a+b+c=constant,\ a^2+b^2+c^2=constant$$

ならば，$a^4+b^4+c^4$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小となる．

$$\begin{aligned}&(a+2b)^2(a^4+2b^4) \geqq (a^2+2b^2)^3\\ \Longleftrightarrow\ & 4a^5b-2a^4b^2-10a^2b^4+8ab^5 \geqq 0\\ \Longleftrightarrow\ & 2ab(a-b)^2(2a^2+3ab+4b^2) \geqq 0\end{aligned}$$

明らかに，$2ab(a-b)^2(2a^2+3ab+4b^2) \geqq 0$ は成り立つ．

$a=0$ の場合

$b^2+c^2=b+c$ のとき $(bc)^2 \leqq bc$ を示せばよい．

$b^2+c^2=b+c$ から $(b+c)^2-2bc=b+c$ すなわち $bc=\dfrac{(b+c)^2-(b+c)}{2}$

$bc \leqq \dfrac{(b+c)^2}{4}$ が成り立つから

$$\frac{(b+c)^2-(b+c)}{2} \leqq \frac{(b+c)^2}{4}$$

を解くと，$0 \leqq b+c \leqq 2$

これを使うと，$2 \geqq b+c \geqq 2\sqrt{bc}$ から，$bc \leqq 1$ なので $(bc)^2 \leqq bc$ が成り立つ．　■

(解 2)　証明すべき不等式を変形すると

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)^2-(a^4+b^4+c^4) \leqq (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\ \Longleftrightarrow\ & a^4+b^4+c^4 \geqq a^2+b^2+c^2 \qquad (*)\end{aligned}$$

ヘルダーの不等式から

$$(a+b+c)(a+b+c)(a^4+b^4+c^4) \geqq (a^2+b^2+c^2)^3 \qquad (**)$$

$a+b+c=a^2+b^2+c^2>0$ のときは，$(**)$ から $(*)$ が得られる．

$a^2+b^2+c^2=0$ のときは，$a=b=c=0$ だから，$(*)$ は成り立つ． ■

問題 51　(Macedomia MO 1999)

$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=1$ を満たすとき

$$A=a+b+c+\frac{1}{abc}$$

の最小値を求めよ．　(初等的な不等式　問題 121)

(解答)　一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=a+b+c+\dfrac{1}{abc}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},c\right)\\
&=a+b-2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{1}{abc}-\frac{1}{\dfrac{a^2+b^2}{2}\cdot c}\\
&=a+b-\sqrt{2(a^2+b^2)}+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{ab}-\frac{2}{a^2+b^2}\right)\\
&=\frac{(a+b)^2-2(a^2+b^2)}{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}+\frac{1}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-2ab}{ab(a^2+b^2)}\\
&=\frac{-(a-b)^2}{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}+\frac{1}{c}\cdot\frac{(a-b)^2}{ab(a^2+b^2)}\\
&=\frac{(a-b)^2\left\{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}-abc(a^2+b^2)\right\}}{\left\{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}\right\}abc(a^2+b^2)}
\end{aligned}$$

$a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}-abc(a^2+b^2)>0$ を示す．

$0<a\leqq b\leqq c,\ a^2+b^2+c^2=1$ のとき，$a^2\leqq\dfrac{1}{3}\leqq c^2,\ a^2+b^2<1$ で

また，$0<a,b,c<1$ から $abc<1$

よって

$$abc(a^2+b^2)<a^2+b^2<\sqrt{a^2+b^2}<\sqrt{2(a^2+b^2)}<a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

が成り立つから

$$f(a,b,c)\geqq f\left(t,t,c\right),\ t=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$0<t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq c,\ 2t^2+c^2=1$ のとき

$$2t+c+\frac{1}{t^2c}$$

の最小値を求める．

$g(t)=2t+c+\dfrac{1}{t^2c}$ とおくと，$c'=-\dfrac{2t}{c}$ で

$$\begin{aligned}
g'(t)&=2+c'-\frac{2tc+t^2c'}{(t^2c)^2}\\
&=2-\frac{2t}{c}-\frac{2tc+t^2\left(-\frac{2t}{c}\right)}{(t^2c)^2}\\
&=\frac{2(c-t)}{c}-\frac{2(c^2-t^2)}{t^3c^3}\\
&=\frac{2(c-t)(t^3c^2-c-t)}{t^3c^3}
\end{aligned}$$

$0<t, c<1$ なので $t^3c^2<c<c+t$ だから $g'(t)\leqq 0$

$g(t)$ は減少関数で，$g(t)\geqq g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=4\sqrt{3}$

したがって，$a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき A は最小値 $4\sqrt{3}$ をとる． ■

問題 52　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は非負の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$21+18abc \geqq 13(ab+bc+ca)$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

(i) $a=0$ のとき

$0 \leqq b \leqq c$, $b^2+c^2=3$ のとき，$21 \geqq 13bc$ を示せばよい．

$3=b^2+c^2 \geqq 2bc$ から $bc \leqq \dfrac{3}{2} < \dfrac{21}{13}$

よって，$21 > 13bc$

(ii) $0 < a \leqq b \leqq c$ の場合 系 2.8 $\left(p=0, q=\dfrac{1}{2}\right)$ を適用する．

$A=a^2, B=b^2, C=c^2$ とおくと，$0 < A \leqq B \leqq C$, $A+B+C=3$ のとき

$$21+18\sqrt{ABC} \geqq \frac{13}{2}\left\{\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)^2-(A+B+C)\right\}$$

を示せばよく

$$A+B+C=3,\ ABC=contant$$

ならば，$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ は $0 < A \leqq B = C$ のとき最大である．

すなわち，$0 < a \leqq b = c$ の場合を考えればよい．

$0 < a \leqq 1 \leqq b$, $a^2+2b^2=3$ のとき

$$21+18ab^2 \geqq 13(2ab+b^2)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&21+18ab^2 \geqq 13(2ab+b^2)\\
\Longleftrightarrow\ &42+18a(3-a^2) \geqq 52ab+13(3-a^2)\\
\Longleftrightarrow\ &52ab \leqq 3+54a+13a^2-18a^3\\
\Longleftrightarrow\ &52^2a^2b^2 \leqq (3+54a+13a^2-18a^3)^2\\
\Longleftrightarrow\ &52^2a^2\cdot\frac{3-a^2}{2} \leqq (3+54a+13a^2-18a^3)^2\\
\Longleftrightarrow\ &324a^6-468a^5-423a^4+1296a^3-1062a^2+324a+9 \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &9(a-1)^2(36a^4+20a^3-43a^2+38a+1) \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &9(a-1)^2\left\{(6a^2-1)^2+a(20a^2-31a+38)\right\} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 53　(Art of problem solving)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2} \leqq \frac{3}{4}$$

(解答)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$f(a,b,c)=\dfrac{1}{2+a^2+b^2}+\dfrac{1}{2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{2+c^2+a^2}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)-f(a,b,c)\\
&=\left[\frac{1}{2+2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}-\frac{1}{2+a^2+b^2}\right]+\left[\frac{1}{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2}-\frac{1}{2+b^2+c^2}\right]\\
&\qquad+\left[\frac{1}{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2}-\frac{1}{2+c^2+a^2}\right]\\
&=\frac{a^2+b^2-2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\left\{2+2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}(2+a^2+b^2)}+\frac{b^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\left\{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2\right\}(2+b^2+c^2)}\\
&\qquad+\frac{a^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\left\{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2\right\}(2+c^2+a^2)}\\
&=\frac{(a-b)^2}{2\left\{2+2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}(2+a^2+b^2)}+\frac{(b-a)(a+3b)}{4\left\{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2\right\}(2+b^2+c^2)}\\
&\qquad-\frac{(b-a)(3a+b)}{4\left\{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2\right\}(2+c^2+a^2)}\\
&=\frac{(a-b)^2}{2\left\{2+2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}(2+a^2+b^2)}\\
&\qquad+\frac{(b-a)\left\{(a+3b)(2+c^2+a^2)-(3a+b)(2+b^2+c^2)\right\}}{4\left\{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2\right\}(2+b^2+c^2)(2+c^2+a^2)}
\end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&(a+3b)(2+c^2+a^2)-(3a+b)(2+b^2+c^2)\\
&=\{(a+3b)-(3a+b)\}(2+c^2)+(a+3b)a^2-(3a+b)b^2\\
&=(b-a)(4-4ab+2c^2-a^2-b^2)\\
&=(b-a)\left\{4(1-ab)+(c^2-a^2)+(c^2-b^2)\right\}
\end{aligned}
$$

$1-ab \geqq 0$ を示す．

$c \geqq 1$ だから $a+b=3-c \leqq 2$ で $2 \geqq a+b \geqq 2\sqrt{ab}$

よって，$ab \leqq 1$

以上のことから

$$
f(t,t,c) \geqq f(a,b,c),\ t=\frac{a+b}{2}
$$

$0<t \leqq 1 \leqq c,\ 2t+c=3$ のとき，$f(t,t,c) \leqq \dfrac{3}{4}$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&f(t,t,c)=\frac{1}{2+2t^2}+\frac{2}{2+t^2+c^2} \leqq \frac{3}{4}\\
\iff &\frac{1}{2+2t^2}+\frac{2}{2+t^2+(3-2t)^2} \leqq \frac{3}{4}\\
\iff &\frac{15t^4-36t^3+30t^2-12t+3}{4(t^2+1)(5t^2-12t+11)} \geqq 0\\
\iff &\frac{3(t-1)^2(5t^2-2t+1)}{4(t^2+1)(5t^2-12t+11)} \geqq 0
\end{aligned}
$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 54　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9 \geqq 10(a^2+b^2+c^2)$$

(解 1)　系 2.8 $(p=-1, q=2)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$a+b+c=3,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $a=b \leqq c$ のとき最大となる．

したがって，$0<a \leqq 1 \leqq c,\ 2a+c=3$ のとき

$$8\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{c}\right)+9 \geqq 10(2a^2+c^2)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&8\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{c}\right)+9 \geqq 10(2a^2+c^2)\\
\Longleftrightarrow\ &8\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{3-2a}\right)+9 \geqq 10\left\{2a^2+(3-2a)^2\right\}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{120a^4-420a^3+522a^2-267a+48}{a(3-2a)} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{3(2a-1)^2(10a^2-25a+16)}{ac} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかになり立つ． ■

(解 2)　$f(x)=10x^2-\dfrac{8}{x}\ (x>0)$ とおくと

$$\lim_{x \to +0} f(x)=-\infty,\ f''(x)=\frac{4(5x^3-4)}{x^3}$$

$f(x)$ は $\left(0, \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}\right]$ で凹関数，$\left[\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}, \infty\right)$ で凸関数である．

LCRCF-Theorem より $f(a)+f(b)+f(c)$ は $a=b \leqq c$ のとき最大となる．後は解 1 参照． ■

問題 55　(Pham Kim Hung)

a, b, c, d は正の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$9\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+56 \geqq 15(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

(解 1)　系 2.8 $(p=-1, q=2)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$a+b+c+d=4,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2+d^2$ は $a=b=c \leqq d$ のとき最大となる．

$F(a)=9\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{d}\right)-15(3a^2+d^2)\quad 0<a \leqq 1 \leqq d,\ 3a+d=4$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(a) &= 9\left(-\frac{3}{a^2}-\frac{d'}{d^2}\right)-15(6a+2dd') \\
&= 9\left(-\frac{3}{a^2}+\frac{3}{d^2}\right)-15(6a-6d) \\
&= 9(d-a)\left\{10-\frac{3(a+d)}{a^2d^2}\right\} \\
&= 36(1-a)\cdot\frac{10a^2(4-3a)^2-3(4-2a)}{a^2d^2} \\
&= 72(1-a)\cdot\frac{45a^4-120a^3+80a^2+3a-6}{a^2d^2} \\
&= 72(1-a)(3a-1)\cdot\frac{15a^3-35a^2+15a+6}{a^2d^2}
\end{aligned}$$

$0<a \leqq 1$ のとき

$$15a^3-35a^2+15a+6 \geqq 15a^3-35a^2+15a+6a=(15a^2-35a+21)a>0$$

である．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$F'(a)$		$-$	0	$+$	0
$F(a)$		↘	極小	↗	

よって

$$F(a) \geqq F\left(\frac{1}{3}\right)=-56$$

■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$f(x) = 15x^2 - \dfrac{9}{x}$ $(x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \leqq 56$$

となる．

$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$ を満たし

$$f''(x) = 30 - \frac{18}{x^3}$$

より，$f(x)$ は $\left(0, \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right]$ で凹関数，$\left[\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}, \infty\right]$ で凸関数である．

LCRCF-Theorem より $a, b, c, d > 0$, $a + b + c + d = 4$ のとき

$f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$ は $0 < a = b = c \leqq d$ のとき最大となる．

$a = b = c = t$ とおくと $t \leqq 1 \leqq d$, $3t + d = 4$ だから

$$g(t) = 3f(t) + f(4 - 3t) \quad (0 < t < 1)$$

とおき，$g(t) \leqq 56$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
56 - g(t) &= 56 + 9\left(\frac{3}{t} + \frac{1}{4 - 3t}\right) - 15\left\{3t^2 + (4 - 3t)^2\right\} \\
&= \frac{4(135t^4 - 450t^3 + 498t^2 - 202t + 27)}{t(4 - 3t)} \\
&= \frac{4(3t - 1)^2(15t^2 - 40t + 27)}{t(4 - 3t)} \geqq 0
\end{aligned}$$

したがって，$g(t) \leqq 56$ ■

問題 56　(Pham Kim Hung)

$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数で，$abcd=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3+d^3+12 \geqq 2\left(a+b+c+d+abc+bcd+cda+dab\right)$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= a^3+b^3+c^3+d^3+12-2\left(a+b+c+d+abc+bcd+cda+dab\right) \\ &= a^3+b^3+c^3+d^3+12-2(a+b+c+d)-2ac(b+d)-2bd(a+c) \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} & f(a,b,c,d)-f(a,\sqrt{bd},c,\sqrt{bd}) \\ &= b^3+d^3-2\sqrt{b^3d^3}-2(b+d-2\sqrt{bd})-2ac(b+d-2\sqrt{bd}) \\ &= \left(\sqrt{b^3}-\sqrt{d^3}\right)^2-2\left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right)^2-2ac\left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right)^2\left\{\left(b+\sqrt{bd}+d\right)^2-2-2ac\right\} \\ &= \left(\sqrt{b}-\sqrt{d}\right)^2\left\{b^2+d^2+2(b+d)\sqrt{bd}+3bd-2-2ac\right\} \end{aligned}$$

ここで，$0<ac \leqq bd,\ (ac)(bd)=1$ より $bd \geqq 1$ だから

$$\begin{aligned} b^2+d^2+2(b+d)\sqrt{bd}+3bd-2-2ac &\geqq 2bd+2(b+d)\sqrt{bd}+3bd-2-2ac \\ &= 2(bd-ac)+2(bd-1)+bd>0 \end{aligned}$$

よって，$b^2+d^2+2(b+d)\sqrt{bd}+3bd-2-2ac>0$ となり

$$f(a,b,c,d) \geqq f(a,\sqrt{bd},c,\sqrt{bd})$$

がいえる．

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \geqq f(a,t,t,t),\ t=\sqrt[3]{bcd}$$

が成り立つ．

したがって，$0<a \leqq 1 \leqq t,\ at^3=1$ のとき

$$a^3+3t^3+12 \geqq 2\left(a+3t+\frac{1}{a}+\frac{3}{t}\right)$$

を示す.

$$
\begin{aligned}
& a^3+3t^3+12 \geqq 2\left(a+3t+\frac{1}{a}+\frac{3}{t}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{t^9}+3t^3+12 \geqq 2\left(\frac{1}{t^3}+3t+t^3+\frac{3}{t}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & t^{12}-6t^{10}+12t^9-6t^8-2t^6+1 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (t-1)^2(t^{10}+2t^9-3t^8+4t^7+5t^6+6t^5+5t^4+4t^3+3t^2+2t+1) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (t-1)^2\left\{t^{10}+t^7\underbrace{(2t^2-3t+4)}_{>0}+5t^6+6t^5+5t^4+4t^3+3t^2+2t+1\right\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

最後の不等式は明らかに成り立つ. ■

(解 2)　系 2.8 $(p=0, q=3, q=-1)$ を適用する.

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる.

証明すべき不等式は

$$a^3+b^3+c^3+d^3+12 \geqq 2\left(a+b+c+d+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

と変形できる.

$$abcd=1,\ a+b+c+d=constant$$

ならば

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ は $a \leqq b=c=d$ のとき最大,

$a^3+b^3+c^3+d^3$ は $a \leqq b=c=d$ のとき最小となる.

したがって, $0<a \leqq 1 \leqq b,\ ab^3=1$ のとき

$$a^3+3b^3+12 \geqq 2\left(a+3b+\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)$$

を示せばよい. 後は解 1 参照. ■

(解 3)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる.

証明すべき不等式は

$$a^3+b^3+c^3+d^3+12 \geqq 2\left(a+b+c+d+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

と変形できる.

$f(x)=x^3-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$　$(x>0)$ とおくと, 証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geqq 4f(\sqrt[4]{abcd})$$

となる．

$f_1(u) = f(e^u) = e^{3u} - 2(e^u + e^{-u})$ とおくと

$$f_1''(u) = \frac{9e^{4u} - 2e^{2u} - 2}{e^u}$$

$f_1''(u) \geqq 0$ を解くと $u \geqq \log\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{19}}{9}}$

$r = \sqrt[4]{abcd} = 1 > \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{19}}{9}}$ とおくと，$f_1''(u)$ は $u \geqq \log r = 0$ で凸関数であるから，RCF-Corollary より，$0 < a \leqq 1 \leqq b = c = d$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照． ■

問題 57　(Austria 2005)

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \geqq \frac{a+b+c+d}{abcd}$$

(初等的な不等式 I 問題 164)

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．
また，証明すべき不等式は，同次式であるから $abcd=1$ と仮定できる．

$f(x)=x-\dfrac{1}{x^3}$ $(x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \leqq 4f\left(\sqrt[4]{abcd}\right)$$

となる．$f_1(e^u)=f(e^u)=e^u-\dfrac{1}{e^{3u}}$ とおくと

$$f_1''(x)=\frac{e^{4u}-9}{e^{3u}}$$

だから $f_1(u)$ は $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\log 3\right]$ で凹関数である．

$r=\sqrt[4]{abcd}=1<\sqrt{3}$ となる $r=1$ に対して，$f_1(u)$ は $u \leqq \log r=0$ で凹関数である．

LCF-Corollary より $a=b=c \leqq d$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$a=b=c=x, d=y$ とおくと，$0<x \leqq 1 \leqq y$, $x^3y=1$

$$F(x)=\frac{3}{x^3}+\frac{1}{y^3}-(3x+y) \quad (0<x \leqq 1 \leqq y)$$

を考える．$x^3y=1$ から $y'=-\dfrac{3y}{x}$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{9}{x^4}-\frac{3y'}{y^4}-(3+y') \\
&= -\frac{9}{x^4}+\frac{9}{xy^3}-3+\frac{3y}{x} \\
&= \frac{9(x^3-y^3)}{x^4y^3}-\frac{3(x-y)}{x} \\
&= \frac{3(x-y)\left\{3(x^2+xy+y^2)-\overbrace{x^3y^3}^{=y^2}\right\}}{x^4y^3} \\
&= \frac{3(x-y)\left(3x^2+3xy+2y^2\right)}{x^4y^3} \leqq 0
\end{aligned}$$

$F'(x)\leqq 0$ から $F(x)$ は減少関数で

$$F(x)\geqq F(1)=0 \qquad \blacksquare$$

(解 2)　系 2.8 $(p=0,q=-3)$ を適用する．　同次式であるから $abcd=1$ と仮定できる．

一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c\leqq d$ と仮定できる．

$$a+b+c=constant,\ abc=1$$

ならば，$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}$ は $a=b=c\leqq d$ のとき最小となる．後は解 1 参照． $\blacksquare$

問題 58　(MOSP 2007)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geqq \frac{1}{3}$$

(初等的な不等式 I 問題 128)

(解答)　$x=\dfrac{2b}{a}$, $y=\dfrac{2c}{b}$, $z=\dfrac{2a}{c}$ とおくと，$x, y, z>0$, $xyz=8$ で証明すべき不等式は

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+\left(\frac{1}{1+y}\right)^2+\left(\frac{1}{1+z}\right)^2 \geqq \frac{1}{3}$$

となる．ここで一般性を失うことなく $0<x \leqq y \leqq z$ と仮定できる．

$f(x)=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2$　$(x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x)+f(y)+f(z) \geqq 3f(\sqrt[3]{xyz})$$

である．

$f_1(u)=f(e^u)=(1+e^u)^{-2}$ とおくと，$f_1''(u)=\dfrac{2e^u(2e^u-1)}{(e^u+1)^4}$

$f_1(u)$ は $u \geqq -\log 2$ で凸関数だから，$r=\sqrt[3]{xyz}=2$ とおくと，$u \geqq \log r=\log 2$ で凸関数となる，

RCF-Corollary より，$0<x \leqq 2 \leqq y=z$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<x \leqq 2 \leqq y$, $xy^2=8$ のとき

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+2\left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \geqq \frac{1}{3}$$

を示す．

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+2\left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \geqq \frac{1}{3}\\
\iff &\left(\frac{y^2}{y^2+8}\right)^2+2\left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \geqq \frac{1}{3}\\
\iff &\frac{2y^6+4y^5-8y^4-32y^3+16y^2-128y+320}{3(y+1)^2(y^2+8)^2} \geqq 0\\
\iff &\frac{2(y-2)^2(y^4+6y^3+16y^2+24y+40)}{3(y+1)^2(y^2+8)^2} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 59　(China Western MO 2004)

$a,\ b,\ c$ が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(初等的な不等式 I 問題 171)

(解答)　右側の不等式を示す．$x = \dfrac{b}{a},\ y = \dfrac{c}{b},\ z = \dfrac{a}{c}$ とおくと，$x, y, z > 0,\ xyz = 1$ で証明すべき不等式は

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

となる．ここで一般性を失うことなく $0 < x \leqq y \leqq z$ と仮定できる．

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\quad (x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x) + f(y) + f(z) \leqq 3f(\sqrt[3]{xyz})$$

である．

$f_1(u) = f(e^u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2u}}}$ とおくと

$$f_1''(u) = \frac{e^{2u}(e^{2u}-2)}{(e^{2u}+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$f_1(u)$ は $u \leqq \dfrac{1}{2}\log 2$ で凹関数だから，$r = \sqrt[3]{xyz} = 1$ とおくと，$u \leqq \log r = 0$ で凹関数となる，

LCF-Corollary より，$0 < x = y \leqq 1 \leqq z$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

$0 < x \leqq 1 \leqq z,\ x^2 z = 1$ のとき

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

を示す．

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \leqq \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \quad (0 < x \leqq 1)$ とおくと

$$g'(x) = \frac{2x\left\{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}(x^4+1)^{\frac{1}{2}} - x^8 - 2x^4 - 1\right\}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(1+x^4)^2}$$

ここで

$$\begin{aligned}(x^2+1)^3(x^4+1) - (x^4+1)^4 &= (x^4+1)\left\{(x^2+1)^3 - (x^4+1)^3\right\} \\ &= (x^4+1)(-x^{12} - 3x^8 + x^6 + 3x^2) \\ &= (x^4+1)\left\{\underbrace{(-x^{12}+x^6)}_{\geqq 0} + \underbrace{(-3x^8+3x^2)}_{\geqq 0}\right\} \geqq 0\end{aligned}$$

$g'(x) \geqq 0$ となり，$g(x)$ は増加関数で，$0 < x \leqq 1$ のとき，$g(x) \leqq g(1) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
左側の不等式は省略. ■

問題 60　(Vietnam 2005)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \geqq \frac{3}{8}$$

(初等的な不等式 I 問題 172)

(解答)　$x = \dfrac{b}{a}$, $y = \dfrac{c}{b}$, $z = \dfrac{a}{c}$ とおくと，$x, y, z > 0$, $xyz = 1$ で証明すべき不等式は

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+y}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+z}\right)^3 \geqq \frac{3}{8}$$

となる．

$f(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^3$　$(x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x) + f(y) + f(z) \geqq 3f(\sqrt[3]{xyz})$$

である．

$f_1(u) = f(e^u) = (1+e^u)^{-3}$ とおくと，$f_1''(u) = \dfrac{3e^u(3e^u - 1)}{(e^u+1)^5}$

$f_1(u)$ は $u \geqq -\log 3$ で凸関数だから，$r = \sqrt[3]{xyz} = 1$ とおくと，$u \geqq \log r = 0$ で凸関数となる，

RCF-Corollary より，$0 < x \leqq 1 \leqq y = z$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

$0 < x \leqq 1 \leqq y$, $xy^2 = 1$ のとき

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{1+y}\right)^3 \geqq \frac{3}{8}$$

を示す．

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1+x}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{1+y}\right)^3 \geqq \frac{3}{8} \\
\Longleftrightarrow\ &\left(\frac{y^2}{y^2+1}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{1+y}\right)^3 \geqq \frac{3}{8} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{5y^9 + 15y^8 + 6y^7 - 6y^6 - 36y^5 + 12y^4 - 30y^3 + 30y^2 - 9y + 13}{8(y+1)^3(y^2+1)^3} \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(y-1)^2(5y^7 + 25y^6 + 51y^5 + 71y^4 + 55y^3 + 51y^2 + 17y + 13)}{8(y+1)^3(y^2+1)^3} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．■

この不等式は，変数が 4 個の場合でも成り立つ．

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+d}\right)^3+\left(\frac{d}{d+a}\right)^3 \geqq \frac{1}{2}$$

$(yanagita)$

(解答)　$x=\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{d}{c}$, $t=\dfrac{a}{d}$ とおくと，$x,y,z,t>0$, $xyzt=1$ で証明すべき不等式は

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^3+\left(\frac{1}{1+y}\right)^3+\left(\frac{1}{1+z}\right)^3+\left(\frac{1}{1+t}\right)^3 \geqq \frac{1}{2}$$

となる．

$f(x)=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^3$　$(x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(t) \geqq 4f(\sqrt[4]{xyzt})$$

である．

$f_1(u)=f(e^u)=(1+e^u)^{-3}$ とおくと，$f_1''(u)=\dfrac{3e^u(3e^u-1)}{(e^u+1)^5}$

$f_1(u)$ は $u \geqq -\log 3$ で凸関数だから，$r=\sqrt[4]{xyzt}=1$ とおくと，$u \geqq \log r=0$ で凸関数となる，

RCF-Corollary より，$0<x \leqq 1 \leqq y=z=t$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<x \leqq 1 \leqq y$, $xy^3=1$ のとき

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^3+3\left(\frac{1}{1+y}\right)^3 \geqq \frac{1}{2}$$

を示す．

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1+x}\right)^3+3\left(\frac{1}{1+y}\right)^3 \geqq \frac{1}{2}\\
\iff &\left(\frac{y^3}{y^3+1}\right)^3+3\left(\frac{1}{1+y}\right)^3 \geqq \frac{1}{2}\\
\iff &\frac{y^9+3y^6-18y^5+36y^4-45y^3+36y^2-18y+5}{2(y^3+1)^3} \geqq 0\\
\iff &\frac{(y-1)^2(y^7+2y^6+3y^5+7y^4-7y^3+15y^2-8y+5)}{2(y^3+1)^3} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 61　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c, d が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+d}\right)^2+\left(\frac{d}{d+a}\right)^2 \geqq 1$$

(解答)　$x=\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{d}{c}$, $t=\dfrac{a}{d}$ とおくと，$x,y,z,t>0$, $xyzt=1$ で証明すべき不等式は

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+\left(\frac{1}{1+y}\right)^2+\left(\frac{1}{1+z}\right)^2+\left(\frac{1}{1+t}\right)^2 \geqq 1$$

となる．

$f(x)=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2$　$(x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(t) \geqq 4f(\sqrt[4]{xyzt})$$

である．

$f_1(u)=f(e^u)=(1+e^u)^{-2}$ とおくと，$f_1''(u)=\dfrac{2e^u(2e^u-1)}{(e^u+1)^4}$

$f_1(u)$ は $u \geqq -\log 2$ で凸関数だから，$r=\sqrt[4]{xyzt}=1$ とおくと，$u \geqq \log r=0$ で凸関数となる，

RCF-Corollary より，$0<x \leqq 1 \leqq y=z=t$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<x \leqq 1 \leqq y$, $xy^3=1$ のとき

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+3\left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \geqq 1$$

を示す．

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1+x}\right)^2+3\left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \geqq 1\\
\iff &\left(\frac{y^3}{y^3+1}\right)^2+3\left(\frac{1}{1+y}\right)^2 \geqq 1\\
\iff &\frac{3y^4-8y^3+9y^2-6y+2}{(y^3+1)^2} \geqq 0\\
\iff &\frac{(y-1)^2(3y^2-2y+2)}{(y^3+1)^2} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 62 (Zdravko Cvetkovski)

a, b, c, d は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^5+\left(\frac{b}{b+c}\right)^5+\left(\frac{c}{c+d}\right)^5+\left(\frac{d}{d+a}\right)^5 \geqq \frac{1}{8}$$

(解答) $x=\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{d}{c}$, $t=\dfrac{a}{d}$ とおくと，$x,y,z,t>0$, $xyzt=1$ で証明すべき不等式は

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^5+\left(\frac{1}{1+y}\right)^5+\left(\frac{1}{1+z}\right)^5+\left(\frac{1}{1+t}\right)^5 \geqq \frac{1}{8}$$

となる．ここで一般性を失うことなく $0<x\leqq y\leqq z\leqq t$ と仮定できる．

$$f(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \quad (x>0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(t)\geqq 4f(\sqrt[4]{xyzt})$$

である．

$$f_1(u)=f(e^u)=(1+e^u)^{-5}$$

とおくと

$$f_1''(u)=\frac{5e^u(5e^u-1)}{(e^u+1)^7}$$

$f_1(u)$ は $u\geqq -\log 5$ で凸関数だから，$r=\sqrt[4]{xyzt}=1$ とおくと，$u\geqq \log r=0$ で凸関数となる．

RCF-Corollary より，$0<x\leqq 1\leqq y=z=t$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<x\leqq 1\leqq y$, $xy^3=1$ のとき

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^5+3\left(\frac{1}{1+y}\right)^5\geqq\frac{1}{8}$$

を示す．

$$F(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)^5+3\left(\frac{1}{1+y}\right)^5-\frac{1}{8} \quad (0<x\leqq 1\leqq y)$$

とおくと，$y'=-\dfrac{y}{3x}$ だから

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= -5(1+x)^{-6} - 15(1+y)^{-6}y' \\
&= -5(1+x)^{-6} + \frac{5y}{x}(1+y)^{-6} \\
&= \frac{5\left\{y(1+x)^6 - x(1+y)^6\right\}}{x(1+x)^6(1+y)^6} \\
&= \frac{5\left\{y(1+x)^6 - \dfrac{1}{y^3}(1+y)^6\right\}}{x(1+x)^6(1+y)^6} \\
&= \frac{5\left\{y^4(1+x)^6 - (1+y)^6\right\}}{xy^3(1+x)^6(1+y)^6} \\
&= \frac{5\left\{y^2(1+x)^3 - (1+y)^3\right\}\left\{y^2(1+x)^3 + (1+y)^3\right\}}{xy^3(1+x)^6(1+y)^6}
\end{aligned}
$$

$$
y^2(1+x)^3 - (1+y)^3 \leqq 0
$$

を示す．

$y \geqq 1$ なので

$$
\begin{aligned}
y^2(1+x)^3 - (1+y)^3 &= y^2\left(1+\frac{1}{y^3}\right)^3 - (1+y)^3 \\
&= \frac{-y^{10} - 2y^9 - 3y^8 - y^7 + 3y^6 + 3y^3 + 1}{y^7} \\
&= \frac{(-y^{10} - 2y^9 + 3y^6) + (-3y^8 + 3y^3) + (-y^7 + 1)}{y^7} \\
&\leqq 0
\end{aligned}
$$

よって，$F'(x) \leqq 0$ となる．

$F(x)$ は減少関数で，$0 < x \leqq 1$ で $F(x) \geqq F(1) = 0$ ■

問題 63 (Pham Kim Hung)

a, b, c, d が正の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2} \leqq \frac{1}{3}$$

(初等的な不等式 I 問題 204)

(解答) 一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$f(x)=\frac{1}{11+x^2}$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \leqq 4f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)$$

である．

$f''(x)=\dfrac{2(3x^2-11)}{(11+x^2)^3}$ より $f(x)$ は $\left(-\infty, \sqrt{\dfrac{11}{3}}\right]$ で凹関数である．

$s=\dfrac{a+b+c+d}{4}=1<\sqrt{\dfrac{11}{3}}$ となる s に対して，$f(x)$ は $x \leqq s$ で凹関数である．

LCF-Theorem より $a=b=c \leqq 1 \leqq d$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<a \leqq 1 \leqq d$, $3a+d=4$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}-3f(a)-f(d) &= \frac{1}{3}-\frac{3}{11+a^2}-\frac{1}{11+d^2} \\
&= \frac{1}{3}-\frac{3}{11+a^2}-\frac{1}{11+(4-3a)^2} \\
&= \frac{3a^4-8a^3+14a^2-16a+7}{(11+a^2)\left\{11+(4-3a)^2\right\}} \\
&= \frac{(a-1)^2(3a^2-2a+7)}{(11+a^2)\left\{11+(4-3a)^2\right\}} \geqq 0
\end{aligned}$$

よって

$$3f(a)+f(d) \leqq \frac{1}{3}$$

■

問題 64　(China 2005)

a, b, c, d は正の実数で，$abcd=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geqq 1$$

(初等的な不等式 I 問題 173)

(解答)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\ (x>0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geqq 4f(\sqrt[4]{abcd})$$

となる．

$$f_1(u)=f(e^u)=\frac{1}{(1+e^u)^2}$$

とおくと

$$f_1''(u)=\frac{2e^u(2e^u-1)}{(1+e^u)^4}$$

よって，$[-\log 2,\infty)$ で $f_1(u)$ は凸関数．

$r=\sqrt[4]{abcd}=1$ とおくと，$f_1(u)$ は $[\log r,\infty)$ で凸関数だから，RCF-Corollary より，$0<a \leqq b=c=d$ に対して不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<a \leqq 1 \leqq b,\ ab^3=1$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{3}{(1+b)^2} \geqq 1 &\iff \frac{1}{\left(1+\frac{1}{b^3}\right)^2}+\frac{3}{(1+b)^2} \geqq 1 \\
&\iff \frac{b^6}{(1+b^3)^2}+\frac{3}{(1+b)^2} \geqq 1 \\
&\iff 3b^4-8b^3+9b^2-6b+2 \geqq 0 \\
&\iff (b-1)^2(3b^2-2b+2) \geqq 0
\end{aligned}$$

$(b-1)^2(3b^2-2b+2) \geqq 0$ は明らかに成り立つ．■

問題 65 (Vasile Cîrtoaje)

a, b, c, d は正の実数で，$abcd = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)} + \frac{1}{(1+b)(1+b^2)} + \frac{1}{(1+c)(1+c^2)} + \frac{1}{(1+d)(1+d^2)} \geqq 1$$

(初等的な不等式 I 問題 191)

(解答) 一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} \ (x > 0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geqq 4f\left(\sqrt[4]{abcd}\right)$$

となる．

$$f_1(u) = f(e^u) = \frac{1}{(1+e^u)(1+e^{2u})}$$

とおくと

$$f_1''(u) = \frac{e^u(9e^{5u} + 11e^{4u} + 6e^{3u} - 6e^{2u} - 3e^u - 1)}{(1+e^u)^3(1+e^{2u})^3}$$

$g(t) = 9t^5 + 11t^4 + 6t^3 - 6t^2 - 3t - 1 \quad (t > 0)$ とおくと

$$g'(t) = 45t^4 + 44t^3 + 18t^2 - 12t - 3, \quad g''(t) = 180t^3 + 132t^2 + 36t - 12$$

$g'''(t) = 540t^2 + 264t + 36 > 0$ より $g''(t)$ は増加関数である．

$$\lim_{t\to+0} g''(t) = -12 < 0,\ g''(1) = 336 > 0$$

より $g''(t) = 0$ ただ 1 つの正の解 α $(0 < \alpha < 1)$ をもち

$0 < t < \alpha$ で $g''(t) < 0$，$\alpha < t$ で $g''(t) > 0$

$$\lim_{t\to+0} g'(t) = -3 < 0,\ g'(1) = 92 > 0$$

より $g'(t) = 0$ ただ 1 つの正の解 β $(0 < \beta < 1)$ をもち

$0 < t < \beta$ で $g'(t) < 0$，$\beta < t$ で $g'(t) > 0$

$$\lim_{t\to+0} g(t) = -1 < 0,\ g(1) = 16 > 0$$

より $g(t) = 0$ ただ 1 つの正の解 γ $(0 < \gamma < 1)$ をもち

$0 < t < \gamma$ で $g(t) < 0$，$\gamma < t$ で $g(t) > 0$

よって，$f_1(u)$ は $[\log\gamma, \infty)$ で凸関数で ある．

$$r = \sqrt[4]{abcd} = 1 > \gamma$$

となる r に対して，$f_1(u)$ は $u \geqq \log r = 0$ で凸関数である．

RCF-Corollary より $a \leqq b = c = d$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$a \leqq 1 \leqq b = c = d, ab^3 = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+a)(1+a^2)} + \frac{3}{(1+b)(1+b^2)} - 1 \\
&= \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{b^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{b^6}\right)} + \frac{3}{(1+b)(1+b^2)} - 1 \\
&= \frac{b^9}{(1+b^3)(1+b^6)} + \frac{3}{(1+b)(1+b^2)} - 1 \\
&= \frac{2b^6 - 3b^5 + 2b^3 - 3b + 2}{(1+b^3)(1+b^6)} \\
&= \frac{(b-1)^2(2b^4 + b^3 + b + 2)}{(1+b^3)(1+b^6)} \geqq 0
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)} + \frac{3}{(1+b)(1+b^2)} \geqq 1 \qquad \blacksquare$$

問題 66　$a,\ b,\ c,\ d$ は非負の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$abc+bcd+cda+dab+(abc)^2+(bcd)^2+(cda)^2+(dab)^2 \leqq 8$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= abc+bcd+cda+dab+(abc)^2+(bcd)^2+(cda)^2+(dab)^2 \\ &= ac(b+d)+(a+c)bd+a^2c^2(b^2+d^2)+(a^2+c^2)b^2d^2 \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} &f(a,b,c,d) - f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right) \\ &= (a+c)\left\{bd - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\} + a^2c^2\left\{b^2+d^2-2\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\} \\ &\quad + (a^2+c^2)\left\{b^2d^2 - \left(\frac{b+d}{2}\right)^4\right\} \\ &= -\frac{(a+c)(b-d)^2}{4} + \frac{a^2c^2(b-d)^2}{2} - \frac{(a^2+c^2)(b-d)^2(b^2+6bd+d^2)}{16} \\ &= (b-d)^2\left[-\frac{a+c}{4} + \frac{a^2c^2}{2} - \frac{(a^2+c^2)(b^2+6bd+d^2)}{16}\right] \end{aligned}$$

$-\dfrac{a+c}{4} + \dfrac{a^2c^2}{2} \leqq 0$ を示す．
$(a+c)+(b+d)=4,\ a+c \leqq b+d$ より $a+c \leqq 2$

$$2 \geqq a+c \geqq 2\sqrt{ac} \quad \text{から} \quad ac \leqq 1$$

(i) $a>0$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c} \geqq \dfrac{4}{a+c} \geqq 2$ から $a+c \geqq 2ac$
よって，$a+c \geqq 2ac \geqq 2a^2c^2$
(ii) $a=0$ のとき，$a+c \geqq 2a^2c^2$ は明らかに成り立つ．
以上のことから，$-\dfrac{a+c}{4} + \dfrac{a^2c^2}{2} \leqq 0$ が成り立つので

$$f(a,b,c,d) \geqq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right)$$

$f(a,b,c,d)$ は b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \leqq f(a,t,t,t),\ t=\frac{b+c+d}{3}$$

したがって，$0 < a \leqq 1 \leqq t,\ a+3t=4$ のとき

$$f(a,t,t,t) = t^3 + 3at^2 + t^6 + 3a^2t^4 \leqq 8$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} & t^3 + 3at^2 + t^6 + 3a^2t^4 \leqq 8 \\ \iff & t^3 + 3(4-3t)t^2 + t^6 + 3(4-3t)^2t^4 \leqq 8 \\ \iff & 28t^6 - 72t^5 + 48t^4 - 8t^3 + 12t^2 - 8 \leqq 0 \\ \iff & 4(t-1)^2(7t^4 - 4t^3 - 3t^2 - 4t - 2) \leqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7t^4 - 4t^3 - 3t^2 - 4t - 2 \\ = & 4\underbrace{(t^4 - t^3)}_{\leqq 0} + 3\underbrace{(t^4 - t^2)}_{\leqq 0} - 4t - 2 < 0 \end{aligned}$$

だから，$f(a,t,t,t) \leqq 8$ は成り立つ． ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

(i) $a=0$ のとき

$b,c,d \geqq 0,\ b+c+d=4$ のとき，$bcd+(bcd)^2 \leqq 8$ を示せばよい．

$4 = b+c+d \geqq 3\sqrt[3]{bcd}$ より $bcd \leqq \left(\dfrac{4}{3}\right)^3$

よって

$$bcd + (bcd)^2 \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^6 = \frac{5824}{729} < 8$$

(ii) $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ の場合

系 2.8 $(p=0, q=-1, q=-2)$ を適用する．

証明すべき不等式を

$$abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) + (abcd)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right) \leqq 8$$

と変形する．

$$a+b+c+d = constant,\ abcd = constant$$

ならば，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}$ はともに $0 < a \leqq b = c = d$ のとき最大となる．後は解 1 参照． ■

問題 67　a, b, c, d は非負の実数で，$a+b+c+d=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^4+b^4+c^4+d^4+\frac{148}{27}abcd \geqq \frac{1}{27}$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$f(a,b,c,d)=a^4+b^4+c^4+d^4+\dfrac{148}{27}abcd$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d)-f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right)\\
&=b^4+d^4-2\left(\frac{b+d}{2}\right)^4+\frac{148}{27}ac\left\{bd-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}\\
&=(b-d)^2\left(\frac{7b^2+10bd+7d^2}{8}-\frac{37}{27}ac\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{7b^2+10bd+7d^2}{8}-\frac{37}{27}ac=\frac{7}{8}(b-d)^2+3\underbrace{(bd-ac)}_{\geqq 0}+\frac{44}{27}ac>0$$

だから，$f(a,b,c,d) \geqq f\left(a, \dfrac{b+d}{2}, c, \dfrac{b+d}{2}\right)$

$f(a,b,c,d) \geqq$ は b,c,d に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \geqq f(a,t,t,t),\ t=\frac{b+c+d}{3}$$

したがって，$0<a \leqq \dfrac{1}{4} \leqq t,\ a+3t=1$ のとき，$a^4+3t^4+\dfrac{148}{27}at^3 \geqq \dfrac{1}{27}$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&a^4+3t^4+\frac{148}{27}at^3 \geqq \frac{1}{27}\\
\Longleftrightarrow\ &a^4+3\left(\frac{1-a}{3}\right)^4+\frac{148}{27}a\left(\frac{1-a}{3}\right)^3 \geqq \frac{1}{27}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{608a^4+336a^3-282a^2+40a}{729} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &2a(4a-1)^2(19a+20) \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

(i) $a=0$ の場合　$b^4+c^4+d^4 \geqq \dfrac{1}{27}$ を示せばよい．

この不等式は，ヘルダーの不等式

$$(1^4+1^4+1^4)(1^4+1^4+1^4)(1^4+1^4+1^4)(b^4+c^4+d^4) \geqq (b+c+d)^4=1$$

から $27(b^4+c^4+d^4) \geqq 1$ がいえる．

(ii) $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ の場合

系 2.8 $(p=0, q=4)$ を適用する．

$a+b+c+d=1$, $abcd=constant$ ならば，$a^4+b^4+c^4$ は $0<a \leqq b=c=d$ のとき最小となる．

したがって，$0<a \leqq \dfrac{1}{4} \leqq b$, $a+3b=1$ のとき，$a^4+3b^4+\dfrac{148}{27}ab^3 \geqq \dfrac{1}{27}$ を示せばよい．

$f(a)=a^4+3b^4+\dfrac{148}{27}ab^3 \left(0<a \leqq \dfrac{1}{4} \leqq b,\ a+3b=1\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 4a^3+12b^3b'+\frac{148}{27}(b^3+3ab^2b') \\
&= 4(a^3-b^3)+\frac{148}{27}(b^3-ab^2) \\
&= (b-a)\left\{\frac{148}{27}b^2-4(a^2+ab+b^2)\right\} = (b-a)\left\{\frac{40}{27}b^2-4(a^2+ab)\right\} \\
&= \frac{4(b-a)}{243}\cdot(-152a^2-101a+10)
\end{aligned}$$

$g(a)=-152a^2-101a+10$ とおくと，$0<a \leqq \dfrac{1}{4}$ で $g(a)$ は減少関数で

$$\lim_{a\to+0} g(a)=10>0,\ g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{99}{4}<0$$

だから，$g(a)=0$ は $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．この解を α とおくと

$0<a<\alpha$ のとき，$g(a)>0$，$\alpha<a<\dfrac{1}{4}$ のとき，$g(a)<0$ である．

よって $0<a<\alpha$ のとき，$f'(a)>0$，$\alpha<a<\dfrac{1}{4}$ のとき，$f'(a)<0$ である．

$$\lim_{a\to+0} f(a)=\frac{1}{27}>0,\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{27}$$

だから，$f(a)$ は $a=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{27}$ をとる．

$0<a \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき $f(a) \geqq \dfrac{1}{27}$ ■

問題 68 (Pham Kim Hung)

$a,\ b,\ c,\ d$ は正の実数で，$a^2+b^2+c^2+d^2=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{5-a}+\frac{1}{5-b}+\frac{1}{5-c}+\frac{1}{5-d}\leqq 1$$

(解 1) 一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c\leqq d$ と仮定できる．

$f(a,b,c,d)=\dfrac{1}{5-a}+\dfrac{1}{5-b}+\dfrac{1}{5-c}+\dfrac{1}{5-d}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}},b,\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}},d\right)-f(a,b,c,d)\\
&=\frac{1}{5-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}}-\frac{1}{5-a}+\frac{1}{5-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}}-\frac{1}{5-c}\\
&=\frac{\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}-a}{\left(5-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\right)(5-a)}+\frac{\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}-c}{\left(5-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\right)(5-c)}\\
&=\frac{c^2-a^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+a\right)\left(5-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\right)(5-a)}\\
&\qquad-\frac{c^2-a^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+c\right)\left(5-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\right)(5-c)}\\
&=\frac{(c^2-a^2)\left\{\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+c\right)(5-c)-\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+a\right)(5-a)\right\}}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+a\right)\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+c\right)\left(5-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\right)(5-a)(5-c)}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+c\right)(5-c)-\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+a\right)(5-a)\\
&=(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\{(5-c)-(5-a)\}+c(5-c)-a(5-a)\\
&=(c-a)\left\{5-(c+a)-\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

において，$5-(c+a)-\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}>0$ を示す．

$(a^2+c^2)+(b^2+d^2)=4$, $a^2+c^2 \leqq b^2+d^2$ より $a^2+c^2 \leqq 2$ だから $\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}} \leqq 1$
また，$a+c \leqq \sqrt{2(a^2+c^2)} \leqq 2$ が成り立つから

$$(c+a)+\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} \leqq 3 < 5$$

よって

$$f(a,b,c,d) \leqq f\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}, b, \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}, d\right)$$

$f(a,b,c,d)$ は a,b,c に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(a,b,c,d) \leqq f(t,t,t,d),\ t=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

したがって，$0<t \leqq 1 \leqq d$, $3t^2+d^2=4$ のとき

$$\frac{3}{5-t}+\frac{1}{5-d} \leqq 1$$

を示せばよい．

$g(t)=\dfrac{3}{5-t}+\dfrac{1}{5-d} \quad (0<t \leqq 1 \leqq d,\ 3t^2+d^2=4)$ とおくと，$d'=-\dfrac{3t}{d}$ で

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{3}{(5-t)^2}+\frac{d'}{(5-d)^2} \\
&= \frac{3}{(5-t)^2}-\frac{3t}{d(5-d)^2} \\
&= \frac{3\left\{d(5-d)^2-t(5-t)^2\right\}}{(5-t)^2 d(5-d)^2} \\
&= \frac{3\left\{d^3-t^3+10(t^2-t^2)+25(d-t)\right\}}{(5-t)^2 d(5-d)^2} \\
&= \frac{3(d-t)\left\{t^2+td+d^2-10(t+d)+25\right\}}{(5-t)^2 d(5-d)^2} \\
&= \frac{3(d-t)\left\{(t-1)^2+td+(d-1)^2-8(t+d)+23\right\}}{(5-t)^2 d(5-d)^2}
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{16}{3}=\left(\frac{1}{3}+1\right)(3t^2+d^2) \geqq (t+d)^2$$

から

$$t+d \leqq \frac{4}{\sqrt{3}} < \frac{23}{8}$$

よって，$(t-1)^2+td+(d-1)^2-8(t+d)+23>0$ となり，$g'(t) \geqq 0$

$g(t)$ は増加関数で，$0<t \leqq 1$ のとき，$g(t) \leqq g(1)=1$ ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$A=a^2, B=b^2, C=c^2, D=d^2$ とおくと，証明すべき不等式は

$0<A \leqq B \leqq C \leqq D$, $A+B+C+D=4$ のとき

$$\frac{1}{5-\sqrt{A}}+\frac{1}{5-\sqrt{B}}+\frac{1}{5-\sqrt{C}}+\frac{1}{5-\sqrt{D}} \leqq 1$$

となる．

$f(x)=\dfrac{1}{5-\sqrt{x}}$　$(0<x<4)$ とおくと，証明すべき不等式は，

$$f(A)+f(B)+f(C)+f(D) \leqq 4f\left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)$$

である．

$f''(x)=\dfrac{3\sqrt{x}-5}{4x\sqrt{x}(5-\sqrt{x})^3}$ から $f(x)$ は $\left(0, \dfrac{25}{9}\right]$ で凹関数である．

$s=\dfrac{A+B+C+D}{4}=1$ とおくと，$f(x)$ は $(0,1]$ で凹関数だから

$0<A=B=C \leqq 1 \leqq D$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

すなわち，$0<a=b=c \leqq 1 \leqq d$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<a \leqq 1 \leqq d$, $3a^2+d^2=4$ のとき，$\dfrac{3}{5-a}+\dfrac{1}{5-d} \leqq 1$ を示す．

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{5-a}+\frac{1}{5-d} \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & ad-4a-2d+5 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & d(2-a) \leqq 5-4a \\
\Longleftrightarrow\ & d^2(2-a)^2 \leqq (5-4a)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (4-3a^2)(2-a)^2 \leqq (5-4a)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 3a^4-12a^3+24a^2-24a+9 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 3(a-1)^2\underbrace{(a^2-2a+3)}_{>0} \geqq 0
\end{aligned}$$

■

問題 69　　a, b, c, d は正の実数で，$a^2+b^2+c^2+d^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}+\sqrt{1-d} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$$

(解答)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．
$A=a^2, B=b^2, C=c^2, D=d^2$ とおくと，証明すべき不等式は
$0<A \leqq B \leqq C \leqq D,\ A+B+C+D=1$ のとき

$$\sqrt{1-\sqrt{A}}+\sqrt{1-\sqrt{B}}+\sqrt{1-\sqrt{C}}+\sqrt{1-\sqrt{D}} \geqq \sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C}+\sqrt[4]{D}$$

となる．
$f(x)=\sqrt[4]{x}-\sqrt{1-\sqrt{x}} \quad (0<x<1)$ とおくと，証明すべき不等式は，

$$f(A)+f(B)+f(C)+f(D) \leqq 4f\left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)$$

である．
$t=\sqrt{x}$ とおくと

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\left[-\frac{1}{16x(\sqrt{1-\sqrt{x}})^3}+\frac{1}{8x\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}+\frac{3}{16x^{\frac{7}{4}}}\right] \\
&= -\left[-\frac{1}{16t^2(\sqrt{1-t})^3}+\frac{1}{8t^3\sqrt{1-t}}+\frac{3}{16t^{\frac{7}{2}}}\right] \\
&= -\left[\frac{2-3t}{16t^3(\sqrt{1-t})^3}+\frac{3}{16t^{\frac{7}{2}}}\right]
\end{aligned}$$

より，$0<t \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき $f''(x)<0$ となるから $f(x)$ は $0<x \leqq \dfrac{4}{9}$ で凹関数である．
$s=\dfrac{A+B+C+D}{4}=\dfrac{1}{4}<\dfrac{4}{9}$ とおくと，$f(x)$ は $0<x \leqq s=\dfrac{1}{4}$ で凹関数であるから，LCF-Theorem より $0<A=B=C \leqq \dfrac{1}{4} \leqq D$ のとき，不等式が成り立つことを示せばよい．
すなわち，$0<a=b=c \leqq \dfrac{1}{2} \leqq d,\ 3a^2+d^2=1$ のとき

$$3\sqrt{1-a}+\sqrt{1-d} \geqq 3\sqrt{a}+\sqrt{d}$$

を示せばよい．

$F(a)=3\sqrt{1-a}+\sqrt{1-d}-3\sqrt{a}-\sqrt{d}\quad \left(0<a\leqq\dfrac{1}{2}\leqq d,\ 3a^2+d^2=1\right)$ とおくと，$d'=-\dfrac{3a}{d}$ で

$$\begin{aligned}
F'(a)&=-\frac{3}{2\sqrt{1-a}}-\frac{d'}{2\sqrt{1-d}}-\frac{3}{2\sqrt{a}}-\frac{d'}{2\sqrt{d}}\\
&=-\frac{3}{2\sqrt{1-a}}+\frac{3a}{2d\sqrt{1-d}}-\frac{3}{2\sqrt{a}}+\frac{3a}{2d\sqrt{d}}\\
&=\frac{3}{2d\sqrt{1-a}\sqrt{1-d}}\left(a\sqrt{1-a}-d\sqrt{1-d}\right)+\frac{3}{2d\sqrt{a}\sqrt{d}}\left(a\sqrt{a}-d\sqrt{d}\right)\\
&=\frac{3\left\{a^2(1-a)-d^2(1-d)\right\}}{2d\sqrt{1-a}\sqrt{1-d}\left(a\sqrt{1-a}+d\sqrt{1-d}\right)}+\frac{3(a^3-d^3)}{2d\sqrt{a}\sqrt{d}\left(a\sqrt{a}+d\sqrt{d}\right)}\\
&=\frac{3(a-d)\left\{a+d-(a^2+ad+d^2)\right\}}{2d\sqrt{1-a}\sqrt{1-d}\left(a\sqrt{1-a}+d\sqrt{1-d}\right)}+\frac{3(a-d)(a^2+ad+d^2)}{2d\sqrt{a}\sqrt{d}\left(a\sqrt{a}+d\sqrt{d}\right)}
\end{aligned}$$

$a+d-(a^2+ad+d^2)>0$ を示せば，$F'(a)\leqq 0$ がいえる．

$$\begin{aligned}
&a+d-(a^2+ad+d^2)>0\longleftrightarrow a+d-(a^2+ad+1-3a^2)>0\\
\Longleftrightarrow\ & d(1-a)>1-a-2a^2\\
\Longleftrightarrow\ & d^2(1-a)^2>(1-a-2a^2)^2 \qquad \because\ 1-a-2a^2=(1+a)(1-2a)\geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ & -7a^4+2a^3+a^2>0\\
\Longleftrightarrow\ & a^2(-7a^2+2a+1)>0
\end{aligned}$$

ここで，$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ なので

$$7a^2=\frac{7}{4}(2a)^2\leqq\frac{7}{4}(2a)=2a+\frac{3}{4}(2a)\leqq 2a+\frac{3}{4}<2a+1$$

から，$a^2(-7a^2+2a+1)>0$ は成り立つ．

$F'(a)$ は減少関数で，$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$F(a)\geqq F\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ ■

問題 70 (Vasile Cîrtoaje)

a, b, c, d は非負の実数で，$a^2+b^2+c^2+d^2=4$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(abc)^3+(bcd)^3+(cda)^3+(dab)^3 \leqq 4$$

(解答) 一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

(i) $a=0$ のとき

$b^2+c^2+d^2=4$ のとき $(bcd)^3 \leqq 4$ を示せばよい．

$$4=b^2+c^2+d^2 \geqq 3\sqrt[3]{(bcd)^2} \quad \text{から} \quad bcd \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

よって

$$(bcd)^3 \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{9}{2}} < 4$$

(ii) $0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ の場合

$A=a^2, B=b^2, C=c^2, D=d^2$ とおくと，$0 < A \leqq B \leqq C \leqq D$, $A+B+C+D=4$ のとき

$$(ABC)^{\frac{3}{2}}+(BCD)^{\frac{3}{2}}+(CDA)^{\frac{3}{2}}+(DAB)^{\frac{3}{2}} \leqq 4$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}&(ABC)^{\frac{3}{2}}+(BCD)^{\frac{3}{2}}+(CDA)^{\frac{3}{2}}+(DAB)^{\frac{3}{2}} \leqq 4\\ \Longleftrightarrow\ &(ABCD)^{\frac{3}{2}}\left(A^{-\frac{3}{2}}+B^{-\frac{3}{2}}+C^{-\frac{3}{2}}+D^{-\frac{3}{2}}\right) \leqq 4\end{aligned}$$

系 2.8 $\left(p=0, q=-\dfrac{3}{2}\right)$ を適用する．

$$A+B+C+D=4,\ ABCD=constant$$

ならば，$A^{-\frac{3}{2}}+B^{-\frac{3}{2}}+C^{-\frac{3}{2}}+D^{-\frac{3}{2}}$ は $0 < A \leqq B = C = D$ のと最大となる．

したがって，$0 < a \leqq b = c = d$ のときを考えればよい．

$0 < a \leqq 1 \leqq b$, $a^2+3b^2=4$ のとき

$$3(ab^2)^3+b^9 \leqq 4$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
&3(ab^2)^3+b^9 \leqq 4\\
\iff& b^9 \leqq 4-3a^3b^6\\
\iff& b^{18} \leqq (4-3a^3b^6)^2\\
\iff& \left(\frac{4-a^2}{3}\right)^9 \leqq \left\{4-3a^3\left(\frac{4-a^2}{3}\right)^3\right\}^2\\
\iff& 244a^{18}-5868a^{16}+58896a^{14}-316416a^{12}+965376a^{10}\\
&\quad +17496a^9-1622016a^8-209952a^7+1339392a^6+839808a^5-589824a^4\\
&\quad\quad -1119744a^3+589824a^2+52784 \geqq 0\\
=& 4(a-1)^2(61a^{16}+122a^{15}-1284a^{14}-2690a^{13}+10628a^{12}\\
&\quad +23946a^{11}-41840a^{10}-107626a^9+67932a^8+247864a^7+22292a^6\\
&\quad\quad -255768a^5-198980a^4+67760a^3+187044a^2+26392a+13196) \geqq 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

$0<a \leqq 1$ だから $x=\dfrac{1}{a}-1 \geqq 0$ とおくと

$$\begin{aligned}
&61a^{16}+122a^{15}-1284a^{14}-2690a^{13}+10628a^{12}\\
&\quad +23946a^{11}-41840a^{10}-107626a^9+67932a^8+247864a^7+22292a^6\\
&\quad\quad -255768a^5-198980a^4+67760a^3+187044a^2+26392a+13196\\
=& 61+122(x+1)-1284(x+1)^2-2690(x+1)^3+10628(x+1)^4+23946(x+1)^5\\
&\quad -41840(x+1)^6-107626(x+1)^7+67932(x+1)^8+247864(x+1)^9\\
&\quad\quad +22292(x+1)^{10}-255768(x+1)^{11}-198980(x+1)^{12}+67760(x+1)^{13}\\
&\quad\quad\quad +187044(x+1)^{14}+26392(x+1)^{15}+13196(x+1)^{16}\\
=& 13196x^{16}+237528x^{15}+2166444x^{14}+12847296x^{13}+53727984x^{12}\\
&\quad +164390976x^{11}+375615312x^{10}+648592632x^9+851170320x^8\\
&\quad\quad +849044302x^7+640321254x^6+360972936x^5+149225976x^4\\
&\quad\quad\quad +43859556x^3+8695512x^2+1049760x+59049\\
>& 0
\end{aligned}$$

より, $(*)$ は成り立つ. ■

[注] $0<a \leqq 1 \leqq b$, $a^2+3b^2=4$ のとき

$$3(ab^2)^3+b^9 \leqq 4$$

の証明は次のように微分を利用することができる.

$f(a)=3a^3b^6+b^9\ (0<a\leqq 1\leqq b)$ とおくと，$b'=-\dfrac{a}{3b}$ で

$$\begin{aligned} f'(a) &= 9a^2b^6+18a^3b^5b'+9b^8b' \\ &= 9a^2b^6-6a^4b^4-3ab^7 \\ &= 3ab^4(3ab^2-2a^3-b^3) \\ &= 3ab^4(b-a)(2a^2+2ab-b^2) \end{aligned}$$

ここで $g(a)=2a^2+2ab-b^2$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(a) &= 4a+2b+2ab'-2bb' \\ &= 4a+2b-\frac{2a^2}{3b}+\frac{2}{3}a \\ &= \frac{14}{3}a+2b-\frac{2a^2}{3b} \\ &= \frac{14ab+\overbrace{(6b^2-2a^2)}^{>0}}{3}>0 \end{aligned}$$

これから，$g(a)$ は増加関数で

$$\lim_{a\to+0}g(a)=-\frac{4}{3}<0,\ g(1)=3>0$$

だから，$g(a)=0$ は $(0,1)$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．
これを α とおくと，$0<a<\alpha$ のとき $g(a)<0$，$\alpha<a\leqq 1$ のとき $g(a)>0$ である．

a	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$\lim_{a\to+0}f(a)=\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^9,\ f(1)=4$$

で，$\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)^9<4$ だから，増減表より $0<a\leqq 1$ のとき $f(a)\leqq 4$

問題 71　a, b, c は非負の実数で，$a+b \fallingdotseq 0$, $b+c \fallingdotseq 0$, $c+a \fallingdotseq 0$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{\frac{a}{4a+5b}}+\sqrt{\frac{b}{4b+5c}}+\sqrt{\frac{c}{4c+5a}} \leqq 1$$

(解答)　(i) $a=0$ のとき

$b, c>0$ で，このとき $\sqrt{\dfrac{b}{4b+5c}}+\sqrt{\dfrac{c}{4c}} \leqq 1$ すなわち $\sqrt{\dfrac{b}{4b+5c}} \leqq \dfrac{1}{2}$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{b}{4b+5c}} \leqq \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow \frac{b}{4b+5c} \leqq \frac{1}{4}\\ &\Longleftrightarrow 4b \leqq 4b+5c\\ &\Longleftrightarrow 0 \leqq c\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかになり立つ．他の場合も同様．

(ii) $a, b, c>0$ の場合

$p=\dfrac{b}{a}$, $q=\dfrac{c}{b}$, $r=\dfrac{a}{c}$ とおくと，$p, q, r>0$, $pqr=1$ で

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{a}{4a+5b}}+\sqrt{\frac{b}{4b+5c}}+\sqrt{\frac{c}{4c+5a}} \leqq 1\\ \Longleftrightarrow&\sqrt{\frac{1}{4+5\cdot\frac{b}{a}}}+\sqrt{\frac{1}{4+5\cdot\frac{c}{b}}}+\sqrt{\frac{1}{4+5\cdot\frac{a}{c}}} \leqq 1\\ \Longleftrightarrow&\sqrt{\frac{1}{4+5p}}+\sqrt{\frac{1}{4+5q}}+\sqrt{\frac{1}{4+5r}} \leqq 1\end{aligned}$$

$0<p \leqq q \leqq r$ と仮定できる．

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{4+5x}}\ (x>0)$$

とおくと，証明すべき方程式は

$$f(p)+f(q)+f(r) \leqq 3f\left(\sqrt[3]{pqr}\right)$$

である．

$$f_1(u)=f(e^u)=\sqrt{\frac{1}{4+5e^u}}$$

とおくと

$$f_1''(u) = \frac{5e^u(5e^u - 8)}{4(4 + 5e^u)^{\frac{5}{2}}}$$

$f_1(u)$ は $e^u \leqq \dfrac{8}{5}$ すなわち $u \leqq \log \dfrac{8}{5}$ で凹関数である．

$R = \sqrt[3]{pqr} = 1$ とおくと，$f_1(u)$ は $u \leqq \log R = 0 < \log \dfrac{8}{5}$ で凹関数だから，LCF-Corollary より，$0 < p = q \leqq 1 \leqq r$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$0 < p \leqq 1 \leqq r$, $p^2 r = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{\frac{1}{4+5p}} + \sqrt{\frac{1}{4+5r}} \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & 2\sqrt{\frac{1}{4+5p}} + \sqrt{\frac{p^2}{4p^2+5}} \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{p^2}{4p^2+5} \leqq \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{4+5p}}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 4\sqrt{\frac{1}{4+5p}} \leqq 1 + \frac{4}{4+5p} - \frac{p^2}{4p^2+5} \\
\Longleftrightarrow\ & \left(4\sqrt{\frac{1}{4+5p}}\right)^2 \leqq \left(1 + \frac{4}{4+5p} - \frac{p^2}{4p^2+5}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{16}{4+5p} \leqq \left\{\frac{15p^3 + 28p^2 + 25p + 40}{(5p+4)(4p^2+5)}\right\}^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{225p^6 - 440p^5 + 510p^4 - 600p^3 + 305p^2}{(5p+4)^2(4p^2+5)^2} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{5p^2(p-1)^2(45p^2 + 2p + 61)}{(5p+4)^2(4p^2+5)^2} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 72　a, b, c, d は正の実数で，$abcd=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}+\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3} \geqq 1$$

(解答)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}\ (x>0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geqq 4f(\sqrt[4]{abcd})$$

となる．

$$f_1(u)=f(e^u)=\frac{1}{1+e^u+e^{2u}+e^{3u}}$$

とおくと

$$f_1''(u)=\frac{e^u\left(9e^{5u}+11e^{4u}+6e^{3u}-6e^{2u}-3e^u-1\right)}{\left(1+e^u+e^{2u}+e^{3u}\right)^3}$$

$r=\sqrt[4]{abcd}=1$ とおくと，$u \geqq \log r=0$ すなわち $e^u \geqq 1$ で $f_1''(u)>0$ だから，$f_1(u)$ は凸関数である．RCF-Corollary より，$0<a \leqq b=c=d$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<a \leqq 1 \leqq b,\ ab^3=1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{3}{1+b+b^2+b^3} \geqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{1+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{b^6}+\dfrac{1}{b^9}}+\frac{3}{1+b+b^2+b^3} \geqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{b^9}{b^9+b^6+b^3+1}+\frac{3}{1+b+b^2+b^3} \geqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{2b^6-3b^5+2b^3-3b+2}{(b^6+1)(b^3+1)} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{(b-1)^2(2b^4+b^3+b+2)}{(b^6+1)(b^3+1)} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．■

問題 73　$1 < r \leqq 2$ は実数の定数，a, b, c は非負の実数で，$ab+bc+ca=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^r(b+c)+b^r(c+a)+c^r(a+b) \geqq 6$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

不等式を同次化すると

$$a^r(b+c)+b^r(c+a)+c^r(a+b) \geqq 6\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^{\frac{r+1}{2}}$$

同次化したことにより，$ab+bc+ca=3$ を取り除く．代わりに，$a+b+c=1$ と仮定できる．このとき証明すべき不等式は

$$a^r(1-a)+b^r(1-b)+c^r(1-r) \geqq 6\left(\frac{1-a^2-b^2-c^2}{6}\right)^{\frac{r+1}{2}}$$

となる．

この不等式を証明するために，系 2.4 を適用する．

$$f(u) = -u^r(1-u)\ (0 \leqq u)$$

とおくと

$$f'(u) = -ru^{r-1}+(r+1)u^r$$

ここで

$$g(x) = f'(x) = -rx^{r-1}+(r+1)x^r\ \ (x \geqq 0)$$

とおくと

$$\begin{aligned} g''(x) &= -r(r-1)(r-2)x^{r-3}+(r+1)r(r-1)x^{r-2} \\ &= r(r-1)x^{r-3}\left\{(r+1)x+2-r\right\} \end{aligned}$$

より，$x>0$ で $g''(x)>0$ だから $g(x)$ は $[0,\infty)$ で狭義の凸関数である．

系 2.4 より

$$0 \leqq a \leqq b \leqq c,\ a+b+c=1,\ a^2+b^2+c^2 = constant$$

ならば，$f(a)+f(b)+f(c)$ は $0 \leqq a=b \leqq c$ のとき最大となる．

ゆえに，$0 < x \leqq 1 \leqq y,\ x^2+2xy=3$ のとき

$$x^r(x+y)+xy^r \geqq 3$$

を示せばよい．（ $x=0$ のときは，$x^2+2xy=3$ を満たさない．）

$x^2+2xy=3$ の両辺を x で微分すると $2x+2(y+xy')=0$ から

$$y'=-\frac{x+y}{x}$$

となる．

$$F(x)=x^r(x+y)+xy^r-3\left(=x^{r+1}+x^ry+xy^r-3\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x)&=(r+1)x^r+rx^{r-1}y+x^ry'+y^r+rxy^{r-1}y'\\
&=(r+1)x^r+rx^{r-1}y+y^r+(x^r+rxy^{r-1})\left(-\frac{x+y}{x}\right)\\
&=rx^r+(1-r)y^r+(r-1)x^{r-1}y-rxy^{r-1}\\
&=rx\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)+(r-1)y\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)\\
&=\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)\{(r-1)y+rx\}\leqq 0
\end{aligned}$$

$F(x)$ は減少関数で，$0\leqq x\leqq 1$ のとき $F(x)\geqq F(1)=0$ ■

問題 74　(Gabriel Dospinescu , Călin Popa)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の実数で，$a_1a_2\cdots a_n = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \geqq \frac{2n\sqrt[n]{n-1}}{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n)$$

(解 1)　系 2.8 $(p = 0, q = 2)$ を適用する．$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ で

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = constant,\ a_1a_2\cdots a_n = 1$$

ならば，$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ は $0 < a_1 \leqq a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ のとき最小となる．

$0 < x \leqq 1 \leqq y$, $xy^{n-1} = 1$, $k = \dfrac{n\sqrt[n]{n-1}}{n-1}$ のとき

$$f(x) = x^2 - 2kx,\ F(x) = f(x) + (n-1)f(y)$$

とおき，$F(x) \geqq F(1)$ を証明する．

$xy^{n-1} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$y^{n-1} + (n-1)xy^{n-2}y' = 0 \quad \text{から} \quad y' = -\frac{y}{(n-1)x}$$

$F(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + (n-1)f'(y)y' \\ &= f'(x) + (n-1)f'(y)\left(-\frac{y}{(n-1)x}\right) \\ &= \frac{xf'(x) - yf'(y)}{x} \\ &= \frac{x(2x-2k) - y(2y-2k)}{x} \\ &= \frac{2(x-y)\{(x+y)-k\}}{x} \end{aligned}$$

となるから，$x + y \geqq k$ を示す．相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$x + y = x + \underbrace{\frac{y}{n-1} + \frac{y}{n-1} + \cdots + \frac{y}{n-1}}_{n-1} \geqq n\sqrt[n]{\frac{xy^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{n\sqrt[n]{n-1}}{n-1}$$

よって，$F'(x) \leqq 0$ となるから $F(x)$ は減少関数となる．

$0 < x \leqq 1$ のとき $F(x) \geqq F(1) = n - 2kn$ となるから与えられた不等式は成り立つ．■

(解 2) $k=\dfrac{n\sqrt[n]{n-1}}{n-1}$， $f(t)=t^2-2kt\,(t>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\geqq nf(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})$$

となる．$r=1$ として，RCF-Corollary を適用する．

$f_1(u)=f(e^u)=e^{2u}-2ke^u$ とおくと $f_1''(u)=2e^u(2e^u-k)$

$f_1(u)$ が $u\geqq\log r=0$ で凸であることをいうために

$$\frac{k}{2}=\frac{n\sqrt[n]{n-1}}{2(n-1)}\leqq 1$$

を示す．

$$\frac{n\sqrt[n]{n-1}}{2(n-1)}\leqq 1\iff\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\geqq\frac{n-1}{2^n}$$

このために，$g(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x\geqq 2)$ が増加関数であることを示し，$n\geqq 2$ のとき，$g(2)\geqq g(2)=\dfrac{1}{4}$ を導く．そして，$n\geqq 2$ のとき $\dfrac{1}{4}\geqq\dfrac{n-1}{2^n}$ を示す．

$\log g(x)=x\log\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\log\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}$$

$h(x)=\log\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x-1}$ とおくと

$$h'(x)=-\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}<0$$

$h(x)$ は減少関数で，$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0$ だから $h(x)>0$
したがって，$f'(x)>0$ より $f(x)$ は増加関数である．

次に，$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{4}\geqq\frac{n-1}{2^n}$$

を示す．

$n=2$ のときは $\dfrac{1}{4}=\dfrac{2-1}{2^2}$ で成り立つから，$n\geqq 3$ とする．すると

m が自然数，$x>0$ のとき，$(1+x)^m\geqq 1+mx$ が成り立つから，この不等式で $m=n-2, x=1$ とおけばよい．

RCF-Corollary より，$x\leqq 1\leqq y$, $xy^{n-1}=1$ のとき $xf'(x)\leqq yf'(y)$ を示せばよい．残りは，解 1 の解答参照． ■

問題 75 $m \geqq n-1$ は正の整数，$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ は正の実数で，$a_1a_2\cdots a_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m+(m-1)n \geqq m\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

(解 1) $n=2$ の場合

$m=1$ のときは明らかに成り立つから，$m \geqq 2$ とする．

$a_1a_2=1$ のとき

$$a_1^m+a_2^m+2(m-1) \geqq m\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)$$

を示せばよい．

$0<a_1 \leqq a_2$ として

$$a_1^m+\frac{1}{a_1^m}+2(m-1) \geqq m\left(\frac{1}{a_1}+a_1\right)$$

を示せばよい．

$f(x)=x^m+\dfrac{1}{x^m}+2(m-1)-m\left(\dfrac{1}{x}+x\right)$ $(0<x \leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(x)&=mx^{m-1}-\frac{m}{x^{m+1}}-m\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\\
&=m\left(\frac{x^{2m}-1}{x^{m+1}}-\frac{x^2-1}{x^2}\right)\\
&=m\left(\frac{(x^m-1)(x^m+1)}{x^{m+1}}-\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right)\\
&=\frac{m(x-1)}{x^{m+1}}\left\{\underbrace{(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)(x^m+1)-x^{m-1}(x+1)}_{\geqq 0}\right\} \leqq 0
\end{aligned}$$

$f(x)$ は減少関数で，$0<x \leqq 1$ のとき $f(x) \geqq f(1)=0$

$n \geqq 3$ のとき

$x_i=\dfrac{1}{a_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$ とおくと，証明すべき不等式は

$x_1x_2\cdots x_n=1$ のとき

$$\frac{1}{x_1^m}+\frac{1}{x_2^m}+\cdots+\frac{1}{x_n^m}+(m-1)n \geqq m(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

となる．

一般性を失うことなく $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = constant$$

ならば，$\dfrac{1}{x_1^m} + \dfrac{1}{x_2^m} + \cdots + \dfrac{1}{x_n^m}$ は $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最小となる．

$0 < x_1 \leqq 1 \leqq x_n,\ x_1^{n-1} x_n = 1$ のとき

$$\frac{n-1}{x_1^m} + \frac{1}{x_n^m} + (m-1)n \geqq m\left\{(n-1)x_1 + x_n\right\}$$

を示せばよい．$x = x_1,\ y = x_n$ とおく．

相加平均・相乗平均の不等式から

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{x^m} + (m-n+1) \\
&= \underbrace{\frac{1}{x^m} + \frac{1}{x^m} + \cdots + \frac{1}{x^m}}_{n-1} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m-n+1} \\
&\geqq m\sqrt[m]{\left(\frac{1}{x^m}\right)^{n-1}} = \frac{m}{x^{n-1}} = my
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\frac{1}{y^m} + (m-1)n - (m-n+1) \geqq m(n-1)x$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y^m} + (m-1)n - (m-n+1) \geqq m(n-1)x \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{y^m} - 1 \geqq m(n-1)(x-1) \\
\Longleftrightarrow\ &x^{m(n-1)} - 1 \geqq m(n-1)(x-1)
\end{aligned}$$

$k = m(n-1)\,(\geqq 4)$ とおくと

$$\begin{aligned}
x^k - 1 - k(x-1) &= (x-1)\left\{(x^{k-1} + x^{k-1} + \cdots + x + 1) - k\right\} \\
&= (x-1)\left\{(x^{k-1} - 1) + (x^{k-1} - 1) + \cdots + (x-1)\right\} \geqq 0
\end{aligned}$$

■

(解 2)　$f(x) = x^m - \dfrac{m}{x}\ (x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geqq nf(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n})$$

となる．

$f_1(u) = f(e^u) = e^{mu} - me^{-u}$ とおくと

$$f_1''(u) = \frac{m\left\{me^{(m+1)u} - 1\right\}}{e^u}$$

$u > 0$ で $f_1''(u) > 0$ だから $f_1(u)$ は $[0, \infty)$ で凸関数である.

$r = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$ とおくと, $f_1(u)$ は $[\log r, \infty)$ で凸関数である.

RCF-Corollary より

$$a_1 \leqq 1 \leqq a_2 = a_3 = \cdots = a_n$$

のとき不等式が成り立つことを示せばよい.

$0 < x \leqq 1 \leqq y,\ xy^{n-1} = 1$ のとき

$$x^m + (n-1)y^m + (m-1)n \geqq m\left(\frac{1}{x} + \frac{n-1}{y}\right)$$

を示す.

$$F(x) = x^m + (n-1)y^m + (m-1)n - m\left(\frac{1}{x} + \frac{n-1}{y}\right)$$

とおくと, $y' = -\dfrac{y}{(n-1)x}$ で

$$\begin{aligned}
F'(x) &= mx^{m-1} + (n-1)my^{m-1}y' - m\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{(n-1)y'}{y^2}\right) \\
&= m\left(\frac{x^m - y^m}{x}\right) + m\left(\frac{y-x}{x^2 y}\right) \\
&= \frac{m(x-y)}{x^2 y}\left\{xy(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + y^{m-1}) - 1\right\}
\end{aligned}$$

$xy(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + y^{m-1}) - 1 > 0$ を示す.

$$xy(x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + y^{m-1}) > xy^{m-1} = xy^m \geqq xy^{n-1} = 1$$

よって, $F'(x) \leqq 0$ となり $F(x)$ は減少関数で, $0 < x \leqq 1$ のとき $F(x) \geqq F(1) = 0$ ■

問題 76 (Vasile Cîrtoaje)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が非負の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\leqq n$$

(解答) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の中に 0 が含まれているときは，明らかに不等式は成立するので，以下においては，$x_1, x_2, \ldots, x_n (>0)$ とする．

一般性を失うことなく $0<x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ と仮定できる．

系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\ x_1x_2\cdots x_n=constant$$

ならば，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ は $0<x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\leqq x_n$ のとき最大となる．

$m=\sqrt{n-1}$, $x=x_1$, $y=x_n$ とおくと $0<x\leqq 1\leqq y$, $m^2x+y=m^2+1$

$$\begin{aligned}
&(x^{n-1}y)^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}\left\{(n-1)x^2+y^2\right\}\leqq n\\
\Longleftrightarrow\ &(x^{m^2}y)^{\frac{1}{m}}\left(m^2x^2+y^2\right)\leqq m^2+1\\
\Longleftrightarrow\ &m\log x+\frac{1}{m}\log y+\log(m^2x^2+y^2)\leqq\log(m^2+1)
\end{aligned}$$

$0<x\leqq 1\leqq y$, $m^2x+y=m^2+1$ のとき

$$F(x)=m\log x+\frac{1}{m}\log y+\log(m^2x^2+y^2)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x)&=\frac{m}{x}+\frac{1}{m}\cdot\frac{y'}{y}+\frac{2m^2x+2yy'}{m^2x^2+y^2}\\
&=\frac{m}{x}-\frac{m}{y}+\frac{2m^2(x-y)}{m^2x^2+y^2}\\
&=m(y-x)\left(\frac{1}{xy}-\frac{2m}{m^2x^2+y^2}\right)\\
&=\frac{m(y-x)(mx-y)^2}{xy(m^2x^2+y^2)}\geqq 0
\end{aligned}$$

$F(x)$ は増加関数で，$0<x\leqq 1$ のとき $F(x)\leqq F(1)=\log(m^2+1)$ ■

問題 77　(Romania TST 1998)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1x_2\cdots x_n = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leqq 1$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$n = 2$ のときは

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} = \frac{1}{1+x_1} + \frac{x_1}{x_1+x_1x_2} = \frac{1}{1+x_1} + \frac{x_1}{x_1+1} = 1$$

より不等式は成り立つので，以下においては，$n \geqq 3$ とする．

$$f(x) = \frac{1}{n-1+x}\ (x > 0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqq nf\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)$$

となる．

$$f_1(u) = f(e^u) = \frac{1}{n-1+e^u}$$

とおくと

$$f_1''(u) = \frac{e^u(e^u-n+1)}{(n-1+e^u)^3}$$

より，$(-\infty, \log(n-1)]$ で $f_1(u)$ は凹関数である．

$r = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = 1$ とおくと，$f_1(u)$ は $(-\infty, \log r]$ で凹関数であるから，LCF-Corollary より $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq 1 \leqq x_n$, $x_1^{n-1}x_n = 1$ に対して不等式が成り立つことを示せばよい．

$$F(x) = \frac{n-1}{n-1+x} + \frac{1}{n-1+y} \quad (0 < x \leqq 1 \leqq y,\ x^{n-1}y = 1)$$

とおくと，$y' = -\dfrac{(n-1)y}{x}$ で

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{n-1}{(n-1+x)^2} - \frac{y'}{(n-1+y)^2} \\
&= -\frac{n-1}{(n-1+x)^2} + \frac{(n-1)y}{x(n-1+y)^2} \\
&= \frac{(n-1)\left\{y(n-1+x)^2 - x(n-1+y)^2\right\}}{x(n-1+x)^2(n-1+y)^2} \\
&= \frac{(n-1)(y-x)\left\{(n-1)^2 - xy\right\}}{x(n-1+x)^2(n-1+y)^2} \\
&= \frac{(n-1)(y-x)\left\{(n-1)^2 - \dfrac{1}{x^{n-2}}\right\}}{x(n-1+x)^2(n-1+y)^2}
\end{aligned}$$

$n \geqq 3$ だから，$F(x)$ の増減表は次のようになる．ところで

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{(n-1)^{\frac{1}{n-2}}}$	$\cdots$	1
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$\lim_{x \to +0} F(x) = 1, \quad F(1) = 1$$

となるから，$F(x) \leqq F(1) = 1$ ■

問題 78　$a,\,b,\,c$ は正の実数で，$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2 \geqq a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}$$

(解答)　一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

$A=a^{\frac{2}{3}}, B=b^{\frac{2}{3}}, C=c^{\frac{2}{3}}$ とおくと，$0<A\leqq B\leqq C,\ A+B+C=3$ のとき

$$A^3+B^3+C^3 \geqq A^2+B^2+C^2 \tag{★}$$

を示せばよい．

$f(A,B,C)=A^3+B^3+C^3-(A^2+B^2+C^2)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)\\
&=B^3+C^3-2\left(\frac{B+C}{2}\right)^3-\left\{B^2+C^2-2\left(\frac{B+C}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{3(B-C)^2(B+C)}{4}-\frac{(B-C)^2}{2}\\
&=\frac{(B-C)^2}{4}\left\{3(B+C)-2\right\}
\end{aligned}$$

$3(B+C)-2>0$ を示す．

$C\geqq 1$ だから，$3(B+C)-2=3(C-1)+2B+1>0$

よって

$$f(A,B,C)\geqq f\left(A,t,t\right),\ t=\frac{B+C}{2}$$

したがって $A\leqq 1\leqq t,\ A+2t=3$ のとき，$f(A,t,t)\geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
f(A,t,t)&=A^3+2t^3-(A^2+2t^2)\\
&=A^3+2\left(\frac{3-A}{2}\right)^3-A^2-2\left(\frac{3-A}{2}\right)^2\\
&=\frac{3A^3+3A^2-15A+9}{4}\\
&=\frac{3(A-1)^2(A+3)}{4}\geqq 0
\end{aligned}$$

■

[注]　(★) は問題 79 で $k=3$ とおいたものである．

問題 79　$k\,(\geqq 2)$ は 正の整数，$x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k \geqq x_1^{k-1}+x_2^{k-1}+\cdots+x_n^{k-1}$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$k \geqq 3$ の場合

系 2.8 $(p=k-1, q=k)$ を適用する．

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\, x_1^{k-1}+x_2^{k-1}+\cdots+x_n^{k-1}=constant$$

ならば，$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$ は $0<x_1 \leqq x_2=\cdots=x_n$ のとき最小である．

したがって，$0<x_1 \leqq 1 \leqq x_2,\, x_1+(n-1)x_2=n$ のとき

$$x_1^k+(n-1)x_2^k \geqq x_1^{k-1}+(n-1)x_2^{k-1}$$

を示せばよい．

$f(x_1)=x_1^k+(n-1)x_2^k-x_1^{k-1}-(n-1)x_2^{k-1}\quad (0<x_1 \leqq 1 \leqq x_2,\, x_1+(n-1)x_2=n)$ とおくと，$x_2'=-\dfrac{1}{n-1}$ で

$$\begin{aligned}
&f'(x_1)\\
&=kx_1^{k-1}+(n-1)kx_2^{k-1}x_2'-(k-1)x_1^{k-2}-(n-1)(k-1)x_2^{k-2}x_2'\\
&=kx_1^{k-1}-kx_2^{k-1}-(k-1)x_1^{k-2}+(k-1)x_2^{k-2}\\
&=-k\left(x_2^{k-1}-x_1^{k-1}\right)+(k-1)\left(x_2^{k-2}-x_1^{k-2}\right)\\
&=(x_2-x_1)\left\{-k(x_1^{k-2}+x_1^{k-3}x_2+\cdots+x_2^{k-2})+(k-1)(x_1^{k-3}+x_1^{k-4}x_2+\cdots+x_2^{k-3})\right\}
\end{aligned}$$

ここで，$-k(x_1^{k-2}+x_1^{k-3}x_2+\cdots+x_2^{k-2})+(k-1)(x_1^{k-3}+x_1^{k-4}x_2+\cdots+x_2^{k-3})<0$ を示す．

$$\begin{gathered}
(k-1)x_1^{k-3} \leqq (k-1)x_1^{k-3}x_2 < kx_1^{k-3}x_2\\
(k-1)x_1^{k-4}x_2 \leqq (k-1)x_1^{k-4}x_2^2 < kx_1^{k-4}x_2^2\\
\cdots\cdots\\
(k-1)x_2^{k-3} \leqq (k-1)x_2^{k-2} < kx_2^{k-2}
\end{gathered}$$

これらの不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
(k-1)(x_1^{k-3}+x_1^{k-4}x_2+\cdots+x_2^{k-3}) &< k(x_1^{k-3}x_2+x_1^{k-4}x_2^2+\cdots+x_2^{k-2})\\
&< k(x_1^{k-2}+x_1^{k-3}x_2+\cdots+x_2^{k-2})
\end{aligned}$$

以上のことから，$f'(x_1) \leqq 0$ となり，$f(x_1)$ は減少関数で

$0 < x_1 \leqq 1$ のとき，$f(x_1) \geqq f(1) = 0$

$k = 2$ のとき

$$(1+1+\cdots+1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = n^2$$

から，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \geqq n = x_1+x_2+\cdots+x_n$

よって，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \geqq x_1+x_2+\cdots+x_n$ ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$f(x) = x^k - x^{k-1}$ $(x \geqq 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

となる．

$f''(x) = k(k-1)x^{k-2} - (k-1)(k-2)x^{k-3}$ より $f(x)$ は $\left[\dfrac{k-2}{k}, \infty\right)$ で凸関数である．

$s = \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = 1 > \dfrac{k-2}{k}$ となる s に対して，$f(x)$ は $[s, \infty)$ で凸関数である．

RCF-Theorem より $0 < x_1 \leqq x_2 = \cdots = x_n$, $x_1 + (n-1)x_2 = n$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照． ■

(解 3)　$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ とおくと，$S_m \leqq S_{m+1}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $m = 1$ のとき，$S_1 \leqq S_2$ を示す．

$$(1+1+\cdots+1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = n^2$$

から，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \geqq n = x_1+x_2+\cdots+x_n$

よって，$S_1 \leqq S_2$

(ii) $m = k$ のとき成り立つと仮定すると，$S_{k+1} \geqq S_k$．

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k)(x_1^{k+2}+x_2^{k+2}+\cdots+x_n^{k+2}) \geqq (x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_n^{k+1})^2$$

よって

$$S_{k+2} \geqq \frac{S_{k+1}^2}{S_k} = S_{k+1} \cdot \frac{S_{k+1}}{S_k} \geqq S_{k+1}$$

となり，$m = k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) からすべての正の整数 m について成り立つ． ■

問題 80　(Vasile Cîrtoaje and Pham Kim Hung)

a, b, c, d は非負の実数で，$a^2+b^2+c^2+d^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab \leqq 1$$

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

系 2.10 を適用する．

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = constant,\ a^3+b^3+c^3+d^3 = constant$$

ならば，$abc+bcd+cda+dab$ は $0 \leqq a = b = c \leqq d$ のとき最大となる．

したがって，$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2} \leqq d,\ 3a^2+d^2=1$ のとき

$$4a^3+d^3+3a^2d \leqq 1$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&4a^3+d^3+3a^2d \leqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &4a^3+d(d^2+3a^2) \leqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &4a^3+d \leqq 1\\
\Longleftrightarrow\ &d \leqq 1-4a^3\\
\Longleftrightarrow\ &d^2 \leqq (1-4a^3)^2\\
\Longleftrightarrow\ &1-3a^2 \leqq (1-4a^3)^2\\
\Longleftrightarrow\ &16a^6-8a^3+3a^2 \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &a^2(16a^4-8a+3) \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &a^2(2a-1)^2(4a^2+4a+3) \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかになり立つ．■

問題 81 (Vasile Cîrtoaje)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は非負の実数で，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)} \sum_{1 \leqq i<j<k \leqq n} x_i x_j x_k \leqq 1$$

(解答) 一般性を失うことなく $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

系 2.10 を適用する．

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = constant, \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = constant$$

ならば $\displaystyle\sum_{1 \leqq i<j<k \leqq n} x_i x_j x_k$ は $0 \leqq x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となる．

このとき，$x_1 = x, x_n = t, \sqrt{n} = m$ とおくと

$$(m^2-1)x^2 + t^2 = 1,\ 0 \leqq x \leqq \frac{1}{m} \leqq t$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)} \sum_{1 \leqq i<j<k \leqq n} x_i x_j x_k \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & (n-1)x_1^3 + x_n^3 + \frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)} \left(\binom{n-1}{3} x_1^3 + \binom{n-1}{2} x_1^2 x_n \right) \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & (n-1)x_1^3 + x_n^3 \\
& \qquad + \frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)} \left\{ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} x_1^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} x_1^2 x_n \right\} \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & (m^2-1)x^3 + t^3 + (m-1)(m^2-3)x^3 + 3(m-1)x^2 t \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & (m^2-1)x^3 + t\left\{1-(m^2-1)x^2\right\} + (m-1)(m^2-3)x^3 + 3(m-1)x^2 t \leqq 1 \\
\Longleftrightarrow\ & t\left\{1-(m^2-3m+2)x^2\right\} \leqq 1-(m^3-3m+2)x^3 \\
\Longleftrightarrow\ & t^2\left\{1-(m^2-3m+2)x^2\right\}^2 \leqq \left\{1-(m^3-3m+2)x^3\right\}^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{1-(m^2-1)x^2\right\}\left\{1-(m^2-3m+2)x^2\right\}^2 \leqq \left\{1-(m^3-3m+2)x^3\right\}^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (2m^6-6m^5+6m^4-2m^3)x^6 - (3m^4-12m^3+15m^2-6m)x^4 \\
& \qquad - (2m^3-6m+4)x^3 + (3m^2-6m+3)x^2 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (m-1)^2 x^2 (mx-1)^2 \left\{2(m^2-m)x^2 + 4(m-1)x + 3\right\} \geqq 0
\end{aligned}$$

ここで，$2(m^2-m)x^2+4(m-1)x+3$ の判別式 D は

$$\frac{D}{4}=4(m-1)^2-6(m^2-m)=-2(m-1)(m+2)<0$$

より

$$(m-1)^2x^2(mx-1)^2\left\{2(m^2-m)x^2+4(m-1)x+3\right\}\geqq 0$$

は成り立つ． ■

問題 82　$x_1, x_2, \dots, x_n$ は非負の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$2(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)+n^2 \leqq (2n+1)\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(2n+1)\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)-2(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)-n^2$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f\left(\frac{x_1+x_{n-1}}{2},x_2,\dots,\frac{x_1+x_{n-1}}{2},x_n\right)\\
&=(2n+1)\left\{x_1^2+x_{n-1}^2-2\left(\frac{x_1+x_{n-1}}{2}\right)^2\right\}-2\left\{x_1^3+x_{n-1}^3-2\left(\frac{x_1+x_{n-1}}{2}\right)^3\right\}\\
&=\frac{(2n+1)(x_1-x_{n-1})^2}{2}-2\left\{\frac{3(x_1+x_{n-1})(x_1-x_{n-1})^2}{4}\right\}\\
&=\frac{(x_1-x_{n-1})^2}{2}\left\{(2n+1)-3(x_1+x_{n-1})\right\}
\end{aligned}$$

$(2n+1)-3(x_1+x_{n-1}) \geqq 0$ を示す．

$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ から $0 \leqq x_1 \leqq 1$ なので

$3x_1 \leqq 2x_1+1$ が成り立つ．

また $3x_{n-1} \leqq 4x_{n-1} \leqq 2(x_{n-1}+x_n)$ が成り立つから

$$\begin{aligned}
3(x_1+x_{n-1}) &\leqq 2x_1+1+2(x_{n-1}+x_n)\\
&\leqq 2(x_1+x_2+\cdots+x_n)+1=2n+1
\end{aligned}$$

よって

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) \geqq f\left(\frac{x_1+x_{n-1}}{2},x_2,\dots,\frac{x_1+x_{n-1}}{2},x_n\right)$$

が成り立つ．

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ は $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}$ に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) \geqq f(t,t,\dots,t,x_n),\ t=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$$

したがって，$0 \leqq t \leqq 1 \leqq x_n$, $(n-1)t+x_n=n$ のとき

$f(t,t,\ldots,t,x_n) \geqq n^2$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&f(t,t,\ldots,t,x_n) \geqq n^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 2\left\{(n-1)t^3+x_n^3\right\}+n^2 \leqq (2n+1)\left\{(n-1)t^2+x_n^2\right\} \\
\Longleftrightarrow\ & 2\left[(n-1)t^3+\{n-(n-1)t\}^3\right]+n^2 \leqq (2n+1)\left[(n-1)t^2+\{n-(n-1)t\}^2\right] \\
\Longleftrightarrow\ & (2n^3-6n^2+4n)t^3-(4n^3-11n^2+7n)t^2+(2n^3-4n^2+2n)t \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (n-1)nt\left\{(2n-4)t^2-(4n-7)t+2n-2\right\} \geqq 0 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

$n \geqq 3$ のとき，$(2n-4)t^2-(4n-7)t+2n-2$　の判別式 D は

$$D=(4n-7)^2-4(2n-4)(2n-2)=-8n+17<0$$

だから，$(*)$ は成り立つ．

$n=2$ のとき，$(*)$ は $2t(-t+2) \geqq 0$ となるが，$0 \leqq t \leqq 1$ だから，この不等式は明らかに成り立つ． ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

系 2.8 $(p=2, q=3)$ を適用する．

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=constant$$

ならば，$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$ は $0 \leqq x_1=x_2=\cdots=x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となる．

したがって，$0 \leqq t \leqq 1 \leqq x_n$，$(n-1)t+x_n=n$ のとき

$$2\left\{(n-1)t^3+x_n^3\right\}+n^2 \leqq (2n+1)\left\{(n-1)t^2+x_n^2\right\}$$

を示せばよい．

$$f(t)=(2n+1)\left\{(n-1)t^2+x_n^2\right\}-2\left\{(n-1)t^3+x_n^3\right\}-n^2$$

とおくと，$(x_n)'=-(n-1)$ で

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= (2n+1)\left\{2(n-1)t+2x_n(x_n)'\right\}-2\left\{3(n-1)t^2+3x_n^2(x_n)'\right\} \\
&= (2n+1)\left\{2(n-1)t-2(n-1)x_n\right\}-2\left\{3(n-1)t^2-3(n-1)x_n^2\right\} \\
&= 2(n-1)(2n+1)(t-x_n)-6(n-1)(t^2-x_n^2) \\
&= 2(n-1)(t-x_n)\left\{(2n+1)-3(t+x_n)\right\}
\end{aligned}
$$

$$(2n+1)-3(t+x_n)=2n+1-3\{t+n-(n-1)t\}=3(n-2)t-(n-1)$$

$n=2$ のとき $f'(t)=-2(t-x_2) \geqq 0$

$f(t)$ は増加関数で，$f(t) \geqq f(0)=0$

$n \geqq 3$ の場合

$0 < \dfrac{n-1}{3(n-2)} < 1$ で増減表は次のようになる.

t	0	$\cdots$	$\dfrac{n-1}{3(n-2)}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

増減表から

$$f(t) \geqq \min\{f(0), f(1)\} = 0 \qquad \blacksquare$$

問題 83　(Vasile Cîrtoaje)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は非負の実数で，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 + n^2 \leqq (n+1)\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (n+1)\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) - (x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) - n^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f\left(\frac{x_1 + x_{n-1}}{2}, x_2, \ldots, \frac{x_1 + x_{n-1}}{2}, x_n\right) \\
&= (n+1)\left\{x_1^2 + x_{n-1}^2 - 2\left(\frac{x_1 + x_{n-1}}{2}\right)^2\right\} - \left\{x_1^3 + x_{n-1}^3 - 2\left(\frac{x_1 + x_{n-1}}{2}\right)^3\right\} \\
&= (n+1)\cdot\frac{(x_1 - x_{n-1})^2}{2} - \frac{3(x_1 - x_{n-1})^2(x_1 + x_{n-1})}{4} \\
&= \frac{(x_1 - x_{n-1})^2}{4}\left\{2(n+1) - 3(x_1 + x_{n-1})\right\}
\end{aligned}$$

$2(n+1) - 3(x_1 + x_{n-1}) > 0$ を示す．

$$\begin{aligned}
&2(n+1) - 3(x_1 + x_{n-1}) \\
&= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - 3(x_1 + x_{n-1}) + 2 \\
&= 2(x_3 + \cdots + x_{n-2}) + (x_2 - x_1) + (x_n - x_{n-1}) + x_2 + x_n + 2 > 0
\end{aligned}$$

より $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq f\left(\dfrac{x_1 + x_{n-1}}{2}, x_2, \ldots, \dfrac{x_1 + x_{n-1}}{2}, x_n\right)$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq f(t, t, \ldots, t, x_n), \quad t = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

が成り立つ．したがって，$0 \leqq t \leqq 1 \leqq x_n$, $(n-1)t + x_n = n$ のとき

$$f(t, t, \ldots, t, x_n) \geqq 0$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&f(t, t, \ldots, t, x_n) \\
&= (n+1)\left\{(n-1)t^2 + x_n^2\right\} - (n-1)t^3 - x_n^3 - n^2 \\
&= (n^2-1)t^2 + (n+1)\left\{n - (n-1)t\right\}^2 - (n-1)t^3 - \left\{n - (n-1)t\right\}^3 - n^2 \\
&= (n^3 - 3n^2 + 2n)t^3 - (2n^3 - 6n^2 + 4n)t^2 + (n^3 - 3n^2 + 2n)t \\
&= (n-2)(n-1)nt(t-1)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

■

(解 2)　系 2.8 ($p=2,\ q=3$) を適用する．

一般性を失うことなく $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=constant$$

ならば，$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$ は $0<x_1=x_2=\cdots=x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となる．したがって，$0 \leqq x_1 \leqq 1 \leqq x_n$, $(n-1)x_1+x_n=n$ のとき

$$(n-1)x_1^3+x_n^3+n^2 \leqq (n+1)\left\{(n-1)x_1^2+x_n^2\right\}$$

を示せばよい．後は解 1 参照．■

(解 3)　一般性を失うことなく $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$f(x)=x^3-(n+1)x^2$ $(x \geqq 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

となる．

$f''(x)=6x-2(n+1)$ より $f(x)$ は $\left[0,\dfrac{n+1}{3}\right]$ で凹関数である．

$s=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=1 \leqq \dfrac{n+1}{3}$ となる s に対して，$f(x)$ は $[0,1]$ で凹関数である．

LCF-Theorem より $0 \leqq x_1=x_2=\cdots=x_{n-1} \leqq x_n$, $(n-1)x_1+x_n=n$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$0 \leqq x \leqq 1 \leqq y$, $(n-1)x+y=n$ のとき

$$g(t)=\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=t^2-nt-n$$

とおくと，$g(x) \geqq g(y)$ が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned}g(x)-g(y)&=x^2-y^2-n(x-y)\\&=(x-y)(x+y-n)\\&=(x-y)\left[x+y-\{(n-1)x+y\}\right]\\&=(n-2)x(y-x) \geqq 0\end{aligned}$$

■

問題 84 (Vasile Cîrtoaje)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は非負の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$(n-1)\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3\right)+n^2 \geqq (2n-1)\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)$$

(初等的な不等式 I 問題 191)

(解答) 一般性を失うことなく $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる.

$$f(x)=(n-1)x^3-(2n-1)x^2 \ (x \geqq 0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

となる.

$f''(x)=6(n-1)x-2(2n-1)$ より $f(x)$ は $\left[\dfrac{2n-1}{3(n-1)},\infty\right)$ で凸関数である.

$s=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=1 \geqq \dfrac{2n-1}{3(n-1)}$ となる s に対して，$f(x)$ は $\left[s,\infty\right)$ で凸関数である.

RCF-Theorem より $0 \leqq x_1 \leqq 1 \leqq x_2=x_3=\cdots=x_n$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい.

$x=x_1, y=x_2=x_3=\cdots=x_n$ とおくと $0 \leqq x \leqq 1 \leqq y$, $x+(n-1)y=n$ で

$$\begin{aligned}
&(n-1)x^3+(n-1)^2y^3+n^2 \geqq (2n-1)x^2+(2n-1)(n-1)y^2 \\
\iff &(n-1)x^3+(n-1)^2\frac{(n-x)^3}{(n-1)^3}+n^2 \geqq (2n-1)x^2+(2n-1)(n-1)\frac{(n-x)^2}{(n-1)^2} \\
\iff &(n-1)^2x^3+(n-x)^3+n^2(n-1) \geqq (2n-1)(n-1)x^2+(2n-1)(n-x)^2 \\
\iff &(n^2-2n)x^3-2(n^2-2n)x^2+(n^2-2n)x \geqq 0 \\
\iff &n(n-2)x(x-1)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は $n \geqq 2$ のとき成り立つ. ■

問題 85　(Vasile Cîrtoaje)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geqq (n-2)^2 + 4n(n-1)\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)$$

(解 1)　系 2.8 $(p=-1,\ q=2)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1,\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = constant$$

ならば，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ は $0 < x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \leqq x_n$ のとき最大となる．
したがって，$x_1 \leqq \dfrac{1}{n} \leqq x_n,\ (n-1)x_1 + x_n = 1$ のとき

$$\frac{n-1}{x_1} + \frac{1}{x_n} \geqq (n-2)^2 + 4n(n-1)\left\{(n-1)x_1^2 + x_n^2\right\}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{x_1} + \frac{1}{x_n} \geqq (n-2)^2 + 4n(n-1)\left\{(n-1)x_1^2 + x_n^2\right\} \\
\iff &\frac{(n-1)^2}{1-x_n} + \frac{1}{x_n} \geqq (n-2)^2 + 4n\left\{(1-x_n)^2 + (n-1)x_n^2\right\} \\
\iff &\frac{4n^2x_n^4 - (4n^2+8n)x_n^3 + (n^2+8n+4)x_n^2 - (2n+4)x_n + 1}{x_n(1-x_n)} \geqq 0 \\
\iff &\frac{(2x_n-1)^2(nx_n-1)^2}{x_n(1-x_n)} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$$f(x) = 4n(n-1)x^2 - \frac{1}{x}\ (x > 0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

となる．

$f''(x) = 8n(n-1) - \dfrac{2}{x^3}$ より，$f(x)$ は $\left(0,\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{4n(n-1)}}\right]$ で凹関数である．

$s = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n} \leqq \sqrt[3]{\dfrac{1}{4n(n-1)}}$ とおくと，$f(x)$ は $\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right]$ で凹関数だから，LCF-Corollary より

$0 < x \leqq \dfrac{1}{n} \leqq y,\ (n-1)x + y = 1$ に対して

$$g(t) = \frac{f(t) - f(\frac{1}{n})}{t - \frac{1}{n}} = 4n(n-1)\left(t + \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{t}$$

とおくと，$g(x) \geqq g(y)$ が成り立つことを示せばよい.

$$\begin{aligned}
g(x) - g(y) &= 4n(n-1)(x-y) + n\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \\
&= \frac{n(y-x)}{xy}\{1 - 4(n-1)xy\} \\
&= \frac{n(y-x)}{xy}[1 - 4(n-1)x\{1 - (n-1)x\}] \\
&= \frac{n(y-x)}{xy}\{2(n-1)x - 1\}^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

より $g(x) \geqq g(y)$ が成り立つ. ■

問題 86 (Vasile Cîrtoaje)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}-n+3\right)\leqq 3$$

(解答) 系 2.8 $(p=0, q=-1)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0<x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ と仮定できる．

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\ x_1x_2\cdots x_n=constant$$

ならば，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ は $0<x_1\leqq x_2=x_3=\cdots=x_n$ のとき最大となる．

$0<x_1\leqq 1\leqq x_2,\ x_1+(n-1)x_2=n$ のとき

$$x_1x_2^{n-1}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{n-1}{x_2}-n+3\right)\leqq 3$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&x_1x_2^{n-1}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{n-1}{x_2}-n+3\right)\leqq 3\\
\iff& x_2^{n-1}+(n-1)x_1x_2^{n-2}-(n-3)x_1x_2^{n-1}\leqq 3\\
\iff& x_2^{n-1}+(n-1)\left\{n-(n-1)x_2\right\}x_2^{n-2}-(n-3)\left\{n-(n-1)x_2\right\}x_2^{n-1}\leqq 3\\
\iff& (n-1)(n-3)x_2^n-(2n^2-5n)x_2^{n-1}+(n-1)nx_2^{n-2}\leqq 3
\end{aligned}$$

$f(x)=(n-1)(n-3)x^n-(2n^2-5n)x^{n-1}+(n-1)nx^{n-2}\quad\left(1\leqq x<\dfrac{n}{n-1}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(x)&=n(n-1)(n-3)x^{n-1}-(n-1)(2n^2-5n)x^{n-2}+(n-2)(n-1)nx^{n-3}\\
&=(n-1)nx^{n-3}\left\{(n-3)x^2-(2n-5)x+n-2\right\}\\
&=(n-1)nx^{n-3}(x-1)\left\{(n-3)x-(n-2)\right\}
\end{aligned}$$

$n=2$ のとき，$f'(x)=-2(x-1)\leqq 0$

$n=3$ のとき，$f'(x)=-6(x-1)\leqq 0$

$n\geqq 4$ のとき，$\dfrac{n}{n-1}<\dfrac{n-2}{n-3}$ より $f'(x)\leqq 0$

$f(x)$ は減少関数で，$1\leqq x<\dfrac{n}{n-1}$ のとき，$f(x)\leqq f(1)=3$ ■

問題 87　(F.Shleifer,Kvant ,No.3,1979)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+n\sqrt[n]{x_1^2x_2^2\cdots x_n^2} \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$$

(解答)　系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

一般性を失うことなく $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$$x_1+x_2+\cdots+x_n = constant,\ x_1x_2\cdots x_n = constant$$

ならば，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ は $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最小となる．

$$(n-1)\left\{x_1^2+(n-1)x_2^2\right\}+n\sqrt[n]{x_1^2x_2^{2(n-1)}} \geqq \left\{x_1+(n-1)x_2\right\}^2$$

を証明すればよい．

$\sqrt[n]{x_1}=x,\ \sqrt[n]{x_2}=y,\ t=\dfrac{x}{y}\ (0<t\leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&(n-1)\left\{x_1^2+(n-1)x_2^2\right\}+n\sqrt[n]{x_1^2x_2^{2(n-1)}} \geqq \left\{x_1+(n-1)x_2\right\}^2\\
\iff &(n-1)\left\{x^{2n}+(n-1)y^{2n}\right\}+nx^2y^{2(n-1)} \geqq \left\{x^n+(n-1)y^n\right\}^2\\
\iff &(n-1)(t^{2n}+n-1)+nt^2 \geqq (t^n+n-1)^2\\
\iff &(n-2)t^{2n}-2(n-1)t^n+nt^2 \geqq 0\\
\iff &(n-2)t^{2n-2}-2(n-1)t^{n-2}+n \geqq 0
\end{aligned}$$

$f(t)=(n-2)t^{2n-2}-2(n-1)t^{n-2}+n \quad (0<t\leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(t) &= (2n-2)(n-2)t^{2n-3}-2(n-1)(n-2)t^{n-3}\\
&= 2(n-1)(n-2)t^{n-3}(t^n-1) \leqq 0
\end{aligned}$$

$f(t)$ は減少関数で，$0<t\leqq 1$ のとき，$f(t) \geqq f(1)=0$ ■

問題 88　$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ は正の実数で，$x_1x_2\cdots x_n=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ.

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \leqq x_1+x_2+\cdots+x_n$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる.

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n-(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})$ とおくと

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(x_1,\sqrt{x_2x_n},x_3,\ldots,x_{n-1},\sqrt{x_2x_n}) \\
&=x_2+x_n-2\sqrt{x_2x_n}-(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_n}-2\sqrt[4]{x_2x_n}) \\
&=\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_n}\right)^2-\left(\sqrt[4]{x_2}-\sqrt[4]{x_n}\right)^2 \\
&=\left(\sqrt[4]{x_2}-\sqrt[4]{x_n}\right)^2\left\{\left(\sqrt[4]{x_2}+\sqrt[4]{x_n}\right)^2-1\right\} \\
&=\left(\sqrt[4]{x_2}-\sqrt[4]{x_n}\right)^2\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_n}+2\sqrt[4]{x_2x_n}-1\right) \geqq 0
\end{aligned}$$

より $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geqq f(x_1,\sqrt{x_2x_n},x_3,\ldots,x_{n-1},\sqrt{x_2x_n})$

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は $x_2,x_3,\ldots,x_n$ に関する対称式だから，SMV-Theorem より

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geqq f(x_1,t,\ldots,t)\,,\quad t=\sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_n}$$

$s=\sqrt{t}\,(\geqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(x_1,t,\ldots,t)&=x_1+(n-1)t+\left\{\sqrt{x_1}+(n-1)\sqrt{t}\right\} \\
&=\frac{1}{t^{n-1}}+(n-1)t-\left\{\frac{1}{(\sqrt{t})^{n-1}}+(n-1)\sqrt{t}\right\} \\
&=\frac{1}{s^{2n-2}}+(n-1)s^2-\left\{\frac{1}{s^{n-1}}+(n-1)s\right\}
\end{aligned}$$

$g(s)=\dfrac{1}{s^{2n-2}}+(n-1)s^2-\left\{\dfrac{1}{s^{n-1}}+(n-1)s\right\}\ (s \geqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
g'(s)&=-\frac{(2n-2)}{s^{2n-1}}+2(n-1)s+\frac{n-1}{s^n}-(n-1) \\
&=\frac{n-1}{s^{2n-1}}(2s^{2n}-s^{2n-1}+s^{n-1}-2) \\
&=\frac{n-1}{s^{2n-1}}\left\{2(s^{2n}-1)-s^{n-1}(s^n-1)\right\} \\
&=\frac{n-1}{s^{2n-1}}(s^n-1)\left\{2(s^n+1)-s^{n-1}\right\} \geqq 0
\end{aligned}$$

$g(s)$ は増加関数で，$s \geqq 1$ のとき，$g(s) \geqq g(1)=0$

よって，$f(x_1,t,\ldots,t) \geqq 0$ ■

(解 2)　系 2.8 $\left(p=0, q=\dfrac{1}{2}\right)$ を適用する．
一般性を失うことなく $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = constant,\ x_1 x_2 \cdots x_n = 1$$

ならば，$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}$ は $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最大となる．
後は解 1 参照．■

(解 3)　一般性を失うことなく $0 < x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．
$f(x) = x - \sqrt{x}\,(x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqq nf(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})$$

となる．
$f_1(u) = f(e^u) = e^u - e^{\frac{u}{2}}$ とおくと

$$f_1''(u) = e^u - \frac{1}{4}e^{\frac{u}{2}} = e^{\frac{u}{2}}\left(e^{\frac{u}{2}} - \frac{1}{4}\right)$$

$f_1(u)$ は $u \geqq -4\log 2$ で凸関数である．
$r = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = 1$ とおくと，$f_1(u)$ は $u \geqq \log r = 0$ で凸関数だから，RCF-Corollary により，$0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照．■

問題 89　$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (n>2)$ が非負の実数で，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ のすべてが等しくはないものとする．このとき，次の不等式を証明せよ．

$$(n-2)\sum_i x_i + n(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}} - 2\sum_{1\leqq i<j\leqq j\leqq n}(x_ix_j)^{\frac{1}{2}} \geqq 0$$

0 に等しくなるのは，ある番号 i に対して

$$x_i = 0, \quad x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n > 0$$

のときのみに限る．　(不等式への招待 P.90)

(解答)　一般性を失うことなく $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる．

$$\begin{aligned}
&(n-2)\sum_i x_i + n(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}} - 2\sum_{1\leqq i<j\leqq j\leqq n}(x_ix_j)^{\frac{1}{2}} \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &(n-2)\sum_i x_i + n(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \\
&\quad - \left\{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})^2 - (x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\} \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &(n-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n) + n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} - (\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

$x_1 = 0$ の場合

$$(n-1)(x_2+\cdots+x_n) \geqq (\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})^2$$

を示せばよく，これは，コーシーシュワルツの不等式を使えば証明できる．

$$(1+1+\cdots+1)(x_2+\cdots+x_n) \geqq (\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n})^2$$

等号は $x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のときに限り成り立つ．

$x_1 > 0$ の場合

$$x_1+x_2+\cdots+x_n = constant,\ x_1x_2\cdots x_n = constant$$

ならば，$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}$ は $0 < x_1 \leqq x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ のとき最大となる．

したがって，$0 < x_1 \leqq x_2$ のとき

$$(n-1)x_1 + (n-1)^2x_2 + n\sqrt[n]{x_1x_2^{n-1}} - \{\sqrt{x_1}+(n-1)\sqrt{x_2}\}^2 \geqq 0$$

を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&(n-1)x_1+(n-1)^2x_2+n\sqrt[n]{x_1x_2^{n-1}}-\{\sqrt{x_1}+(n-1)\sqrt{x_2}\}^2 \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &(n-2)x_1+n\sqrt[n]{x_1x_2^{n-1}}-2(n-1)\sqrt{x_1x_2} \geqq 0
\end{aligned}
$$

$s=\sqrt[2n]{x_1},\ t=\sqrt[2n]{x_2}$ とおくと，$0<s\leqq t$ で

$$
\begin{aligned}
&(n-2)x_1+n\sqrt[n]{x_1x_2^{n-1}}-2(n-1)\sqrt{x_1x_2}\\
\Longleftrightarrow\ &(n-2)s^{2n}+ns^2t^{2(n-1)}-2(n-1)s^nt^n \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &s^2\left\{(n-2)s^{2n-2}+nt^{2(n-1)}-2(n-1)s^{n-2}t^n\right\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

$f(t)=(n-2)s^{2n-2}+nt^{2(n-1)}-2(n-1)s^{n-2}t^n\ (0<s\leqq t)$ とおくと

$$f'(t)=2(n-1)nt^{n-1}(t^{n-2}-s^{n-2}) \geqq 0$$

だから，$f(t)$ は増加関数で，$0<s\leqq t$ のとき，$f(t)\geqq f(s)=0$ ■

問題 90　(Lithuania 2006)

a, b, c が正の実数であるとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

(初等的な不等式 I　問題 151)

(解 1)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

不等式は同次式であるから，$abc = 1$ と仮定できる．このとき

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{1}{a^2+\frac{1}{a}}+\frac{1}{b^2+\frac{1}{b}}+\frac{1}{c^2+\frac{1}{c}} \leqq \frac{1}{2}(a+b+c) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1} \leqq \frac{1}{2}(a+b+c) \end{aligned}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x}{x^3+1}$ $(x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 3f(\sqrt[3]{abc})$$

となる．

$f_1(u) = f(e^u) = \dfrac{1}{2}e^u - \dfrac{e^u}{e^{3u}+1}$ とおくと

$$f_1''(u) = \frac{e^u(e^{9u}-5e^{6u}+29e^{3u}-1)}{2(e^{3u}+1)^3}$$

$g(t) = t^3-5t^2+29t-1$ $(t > 0)$ を考える．

$t > 0$ で $g'(t) = 3t^2-10t+29 > 0$ だから $g(t)$ は増加関数である．

$\displaystyle\lim_{t\to+0} g(t) = -1 < 0,\ g(1) = 24 > 0$ より，$g(t) = 0$ はただ 1 つの正の解を $(0, 1)$ でもつ．

これを $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ とおくと

$0 < t < \alpha$ で $g(t) < 0$，$\alpha < t$ で $g(t) > 0$ となるから，$e^{3u} \geqq \alpha$ すなわち $u \geqq \dfrac{1}{3}\log\alpha$ で $f_1(u)$ は凸関数である．

$r = \sqrt[3]{abc} = 1$ とおくと，$u \geqq \log r = 0 > \dfrac{1}{3}\log\alpha$ で $f_1(u)$ は凸関数だから，$0 < a \leqq 1 \leqq b = c$ で不等式が成り立つことをいえばよい．

$0 < a \leqq 1 \leqq b,\ ab^2 = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a^3+1} + \frac{2b}{b^3+1} \leqq \frac{1}{2}(a+2b) \\
\iff &\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^6}+1} + \frac{2b}{b^3+1} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}+2b\right) \\
\iff &\frac{b^4}{b^6+1} + \frac{2b}{b^3+1} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}+2b\right) \\
\iff &\frac{2b^{12}-3b^9+b^6-b^3+1}{2b^2(b^3+1)(b^6+1)} \geqq 0 \\
\iff &\frac{(b-1)^2(b^2+b+1)^2(2b^6+b^3+1)}{2b^2(b^3+1)(b^6+1)} \geqq 0
\end{aligned}$$

■

(解 2)　不等式は同次式であるから，$abc = 1$ と仮定できる．このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \\
\iff &\frac{1}{a^2+\frac{1}{a}} + \frac{1}{b^2+\frac{1}{b}} + \frac{1}{c^2+\frac{1}{c}} \leqq \frac{1}{2}(a+b+c) \\
\iff &\frac{a}{a^3+1} + \frac{b}{b^3+1} + \frac{c}{c^3+1} \leqq \frac{1}{2}(a+b+c)
\end{aligned}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x}{x^3+1} - \dfrac{3}{4}\log x\ (x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a) + f(b) + f(c) \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる．

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x^7-3x^6+12x^4-6x^3-2x-3}{4x(x^3+1)^2} \\
&= \frac{(x-1)(2x^6-x^5-x^4+11x^3+5x^2+5x+3)}{4x(x^3+1)^2}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&2x^6-x^5-x^4+11x^3+5x^2+5x+3 \\
&= \underbrace{(x^6-x^5+x^4)}_{>0} + \underbrace{(x^6-2x^4+5x^2)}_{>0} + 11x^3+5x+3 > 0
\end{aligned}$$

だから，$0 < x < 1$ で $f'(x) < 0$，$1 < x$ で $f'(x) > 0$

したがって，$f(x) \geqq f(1) = 0$ となり，$(*)$ は成り立つ．■

問題 91 (Romania 2008)

a, b, c は正の実数で，$abc=8$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leqq 0$$

(初等的な不等式 I 問題 154)

(解答) 一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

$$f(x)=-\frac{x-2}{x+1}\ (x>0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)\geqq 3f(\sqrt[3]{abc})$$

となる．

$$f_1(u)=f(e^u)=-\frac{e^u-2}{e^u+1}$$

とおくと

$$f_1''(u)=\frac{3e^u(e^u-1)}{(e^u+1)^3}$$

$u\geqq 0$ で $f_1(u)$ は凸関数である．

$r=\sqrt[3]{abc}=2$ とおくと, $u\geqq \log r=\log 2$ で $f_1(u)$ は凸関数だから, $0<a\leqq 2\leqq b=c$ で不等式が成り立つことをいえばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{a-2}{a+1}+\frac{2(b-2)}{b+1}\leqq 0\\
\iff&\frac{\dfrac{8}{b^2}-2}{\dfrac{8}{b^2}+1}+\frac{2(b-2)}{b+1}\leqq 0\\
\iff&-\frac{2(b-2)(b+2)}{8+b^2}+\frac{2(b-2)}{b+1}\leqq 0\\
\iff&\frac{-6(b-2)^2}{(b+1)(b^2+8)}\leqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 92　a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$$

(初等的な不等式 I 問題 160)

(解答)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

不等式は同次式だから，$a+b+c=3$ と仮定できる．

このとき，証明すべき不等式を変形する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} \\
\iff &\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3-b}+\frac{1}{3-c} \leqq \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}
\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{2x}\ (x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c) \leqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

となる．

$$f''(x)=-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{(x-3)^3}=\frac{3(x^3-3x^2+9x-9)}{x^3(3-x)^3}$$

$g(x)=x^3-3x^2+9x-9$ とおくと，$g'(x)=3(x^2-2x+3)>0$ で $g(x)$ は増加関数である．

$g(1)=-2<0,\ g(2)=5>0$ より $g(x)=0$ はただ 1 つの実数解を $(1,2)$ でもつ．これを $\alpha\,(1<\alpha<2)$ とおくと

$0<x<\alpha$ で $g(x)<0$，$\alpha<x<3$ で $g(x)>0$ であるから，$0<x \leqq \alpha$ で $f(x)$ は凹関数である．

$r=\dfrac{a+b+c}{3}=1<\alpha$ とおくと，$0<x \leqq r$ で $f(x)$ は凹関数だから，

$0<a=b \leqq 1 \leqq c$ で不等式が成り立つことをいえばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3-a}+\frac{1}{3-c} \leqq \frac{2}{2a}+\frac{1}{2c} \\
\iff &\frac{2}{3-a}+\frac{1}{2a} \leqq \frac{2}{2a}+\frac{1}{2(3-2a)} \\
\iff &\frac{9(a-1)^2}{2a(3-a)(3-2a)} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

問題 93 (Romanian Regional Mathematic Olympiad 2006)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{4a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{4c}{a^2+b^2+2c^2}$$

(初等的な不等式 I 問題 203)

(解答) 一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

不等式は同次式だから，$a^2+b^2+c^2=3$ と仮定できる．

このとき，証明すべき不等式は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{4a}{a^2+3}+\frac{4b}{b^2+3}+\frac{4c}{c^2+3}$$

となる．

$A=a^2, B=b^2, C=c^2$ とおくと，$0<A \leqq B \leqq C$, $A+B+C=3$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{A}}+\frac{1}{\sqrt{B}}+\frac{1}{\sqrt{C}} \geqq \frac{4\sqrt{A}}{A+3}+\frac{4\sqrt{B}}{B+3}+\frac{4\sqrt{C}}{C+3}$$

を示せばよい．

$f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ とおくと

$$f(A)+f(B)+f(C) \leqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

を示せばよい．

$$f''(x)=\frac{9(x^3-11x^2-13x-9)}{4x^{\frac{5}{2}}(x+3)^3}$$

$g(x)=x^3-11x^2-13x-9$ $(x>0)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3-11x^2-13x-9 \\ &= (x^3-11x^2-12x)-x-9 \\ &= x(x+1)(x-12)-x-9 \end{aligned}$$

より，$0<x<12$ のとき $g(x)<0$ がなるから，$f(x)$ は $(0,12]$ で凹関数である．

$s=\dfrac{A+B+C}{3}=1<12$ とおくと，$f(x)$ は $(0,1]$ で凹関数だから，LCF-Theorem より $0<A=B \leqq 1 \leqq C$, $2A+C=3$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

よって，$0<a=b \leqq 1 \leqq c$, $2a^2+c^2=3$ のとき

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{8a}{a^2+3}+\frac{4c}{c^2+3}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{8a}{a^2+3}+\frac{4c}{c^2+3} \\
\iff &\frac{2}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{8a}{3a^2+c^2}+\frac{2c}{a^2+c^2} \\
\iff &\frac{2c^5-ac^4-2a^3c^2-2a^4c+3a^5}{ac(c^2+3a^2)(c^2+a^2)} \geqq 0 \\
\iff &\frac{(c-a)^2(c+a)(2c^2+ca+3a^2)}{ac(c^2+3a^2)(c^2+a^2)} \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 94　(Pham Kim Hung)

$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$a^2+b^2+c^2=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geqq 1$$

(初等的な不等式 I 問題 188)

(解答)　一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

$A=a^2, B=b^2, C=c^2$ とおくと，$0<A\leqq B\leqq C,\ A+B+C=3$

$$f(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+3}\ (x>0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(A)+f(B)+f(C)\geqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

となる．

$$f''(x)=\frac{9x}{2\left(x^{\frac{3}{2}}+2\right)^3}-\frac{3}{4\sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}}+2\right)^2}$$

$u=\sqrt{x}$ とおくと

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{9u^2}{2(u^3+2)^3}-\frac{3}{4u(u^3+2)^2}\\&=\frac{3(5u^3-2)}{4u(u^3+2)^3}\end{aligned}$$

より，$u\geqq\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ すなわち $x\geqq\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$ で $f(x)$ は凸関数である．

$r=\dfrac{A+B+C}{3}=1>\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$ とおくと，$f(x)$ は $[1,\infty)$ で凸関数だから，

RCF-Theorem より $0<A\leqq 1\leqq B=C,\ A+2C=3$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

よって，$0<a\leqq b=c,\ a^2+2b^2=3$ のとき

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{2}{b^3+2}\geqq 1$$

を示せばよい．

$0 < a \leqq 1 \leqq b,\ a^2 + 2b^2 = 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^3+2} + \frac{2}{b^3+2} \geqq 1 \\
\iff\ & 2 \geqq (a^3+1)b^3 \\
\iff\ & 4 \geqq (a^3+1)^2 b^6 \\
\iff\ & 4 \geqq (a^3+1)^2 \left(\frac{3-a^2}{2}\right)^3 \\
\iff\ & a^{12} - 9a^{10} + 2a^9 + 27a^8 - 18a^7 - 26a^6 + 54a^5 - 9a^4 - 54a^3 + 27a^2 + 5 \geqq 0 \\
\iff\ & (a-1)^2 \\
& \times (a^{10} + 2a^9 - 6a^8 - 12a^7 + 9a^6 + 12a^5 - 11a^4 + 20a^3 + 42a^2 + 10a + 5) \\
& \geqq 0 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&a^{10} + 2a^9 - 6a^8 - 12a^7 + 9a^6 + 12a^5 - 11a^4 + 20a^3 + 42a^2 + 10a + 5 \\
&= (-6a^8 + 6a^2) + (-12a^7 + 12a^2) + (-11a^4 + 11a^2) \\
&\quad + a^{10} + 2a^9 + 9a^6 + 12a^5 + 20a^3 + 13a^2 + 10a + 5 > 0
\end{aligned}
$$

となり，不等式 $(*)$ は成り立つ． ■

問題 95　(Baltic Way 2011)

a, b, c, d は正の実数で $a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \leqq \frac{4}{9}$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．

$f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ $(x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \leqq 4f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) \tag{$*$}$$

となる．

$$f''(x)=\frac{6x^2(x^3-16)}{(x^3+8)^3}$$

より $0<x \leqq \sqrt[3]{16}$ で $f(x)$ は凹関数である．

$s=\dfrac{a+b+c+d}{4}=1<\sqrt[3]{16}$ とおくと $f(x)$ は $x \leqq s$ で凹関数だから，LCF-Theorem より，$0<a=b=c \leqq d$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$0<a \leqq 1 \leqq d$, $3a+d=4$ のとき

$$\frac{3a}{a^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \leqq \frac{4}{9}$$

を示す．

$$\begin{aligned}
&\frac{3a}{a^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \leqq \frac{4}{9}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{3a}{a^3+8}+\frac{4-3a}{(4-3a)^3+8} \leqq \frac{4}{9}\\
\Longleftrightarrow\ &-\frac{12a^6-48a^5-20a^4+392a^3-816a^2+704a-224}{(a^3+8)\left\{(4-3a)^3+8\right\}} \geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{4(a-1)^2(-3a^4+6a^3+20a^2-64a+56)}{(a^3+8)(d^3+8)} \geqq 0
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&-3a^4+6a^3+20a^2-64a+56\\
&=\underbrace{(-3a^4+3a^3)}_{\geqq 0}+3a^3+\underbrace{(20a^2-64a+56)}_{>0}>0
\end{aligned}$$

だから

$$\frac{4(a-1)^2(-3a^4+6a^3+20a^2-64a+56)}{(a^3+8)(d^3+8)} \geqq 0$$

は成り立つ. ■

(解 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}-\dfrac{2}{27}(x-1)\ (x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \leqq \frac{4}{9}$$

となる.

$$f'(x)=-\frac{2(x-1)(x^2+x+1)(x^3+44)}{27(x^3+8)^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

増減表から，$f(x)$ は $x=1$ で最大値 $f(1)=\dfrac{1}{9}$ をとる.
よって

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \leqq \frac{4}{9}$$ ■

(解 3) $x>0$ のとき

$$x^3+2=x^3+1+1 \geqq 3\sqrt[3]{x^3\cdot 1\cdot 1}=3x$$

より，$x^3+8 \geqq 3(x+2)$ が成り立つから

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8} \leqq \frac{a}{3(a+2)}+\frac{b}{3(b+2)}+\frac{c}{3(c+2)}+\frac{d}{3(d+2)}$$

よって

$$\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}+\frac{d}{d+2} \leqq \frac{4}{3}$$

を示せばよい.

$f(x)=\dfrac{x}{x+2}\ (x>0)$ とおくと $f''(x)=-\dfrac{4}{(x+2)^3}<0$

$f(x)$ は $x>0$ で凹関数だから

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \leqq 4f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)=4f(1)=\frac{4}{3}$$ ■

問題 96　(Romania 2005)

$a,\ b,\ c$ は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^3} \geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(初等的な不等式 I 問題 182)

(解答)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^3} \geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\iff (a+b+c)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geqq 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

証明すべき不等式は同次式だから，$a+b+c=3$ と仮定すると

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqq \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

を示せばよい．

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+(x-1)\ (x>0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 0$$

となる．

$$f'(x)=\frac{x^3+x-2}{x^3}=\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$f(x)$ は $x=1$ で最小値 $f(1)=0$ をとるから，$f(x) \geqq 0$
よって，$f(a)+f(b)+f(c) \geqq 0$ は成り立つ．■

問題 97　(IMO 1984)

a, b, c は非負の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$0 \leqq ab+bc+ca-2abc \leqq \frac{7}{27}$$

(初等的な不等式 I 問題 97)

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

右側の不等式

$f(a,b,c) = ab+bc+ca-2abc = a(b+c)-2abc$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a,b,c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) &= bc - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - 2a\left\{bc - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right\} \\ &= -\frac{(b-c)^2}{4} + 2a \cdot \frac{(b-c)^2}{4} \\ &= -\frac{(b-c)^2(1-2a)}{4} \end{aligned}$$

$0 \leqq a \leqq b \leqq c$, $a+b+c=1$ より $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$ だから，　$1-2a > 0$

よって，$-\dfrac{(b-c)^2(1-2a)}{4} \leqq 0$ だから

$$f(a,b,c) \geqq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$

が成り立つ．

$t = \dfrac{b+c}{2}$ とおくと，$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$, $a+2t=1$ のとき

$$f(a,t,t) = t^2 + 2at - 2at^2 \leqq \frac{7}{27}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} & t^2 + 2at - 2at^2 \leqq \frac{7}{27} \\ \iff & t^2 + 2(1-2t)t - 2(1-2t)t^2 \leqq \frac{7}{27} \\ \iff & -\frac{108t^3 - 135t^2 + 54t - 7}{27} \geqq 0 \\ \iff & \frac{(3t-1)^2(7-12t)}{27} \geqq 0 \end{aligned}$$

最後の不等式は $\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} < \dfrac{7}{12}$ だから成り立つ．

左側の不等式

$ab+bc+ca-2abc \geqq 0$ の代わりに $ab+bc+ca-9abc \geqq 0$ を示す.

$g(a,b,c)=ab+bc+ca-9abc=ab+c(a+b)-9abc$ とおくと

$$\begin{aligned} g(a,b,c)-g\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right) &= ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-9c\left\{ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\} \\ &= -\frac{(a-b)^2}{4}+9c\cdot\frac{(a-b)^2}{4} \\ &= \frac{(a-b)^2(9c-1)}{4} \end{aligned}$$

$0 \leqq a \leqq b \leqq c,\ a+b+c=1$ より $c \geqq \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{9}$ だから, $9c-1>0$

よって, $\dfrac{(a-b)^2(9c-1)}{4} \leqq 0$ だから $g(a,b,c) \geqq g\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2},c\right)$ が成り立つ.

$s=\dfrac{a+b}{2}$ とおくと, $0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{3} \leqq c \leqq \dfrac{1}{2},\ 2s+c=1$ のとき

$$g(s,s,c)=s^2+2cs-9cs^2 \geqq 0$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned} &s^2+2cs-9cs^2 \geqq 0 \\ \iff &s^2+2(1-2s)s-9(1-2s)s^2 \geqq 0 \\ \iff &18s^3-12s^2+2s \geqq 0 \\ \iff &2s(3s-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

最後の不等式は明らかになり立つ. ■

(解 2) 一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる.

右側の不等式

(i) $a=0$ のとき

$0 \leqq b \leqq c,\ b+c=1$ のとき, $bc \leqq \dfrac{7}{27}$ を示せばよい.

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$1=b+c \geqq 2\sqrt{bc} \quad \text{から} \quad bc \leqq \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$$

(ii) $0<a \leqq b \leqq c$ の場合

$$\begin{aligned} &ab+bc+ca-2abc \leqq \frac{7}{27} \\ \iff &\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}-2abc \leqq \frac{7}{27} \end{aligned}$$

と変形できる．

系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

$$a+b+c=1,\ abc=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小となる．
したがって，$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3} \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}$, $a+2b=1$ のとき

$$b^2+2ab-2ab^2 \leqq \frac{7}{27}$$

を示せばよい．後は解 1 参照．

左側の不等式

(i) $a=0$ のとき

$0 \leqq b \leqq c$, $b+c=1$ のとき，$bc \geqq 0$ を示せばよいが，これは明らかに成り立つ．

(ii) $0<a \leqq b \leqq c$ の場合

$$\begin{aligned} & ab+bc+ca-2abc \geqq 0 \\ \iff & \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}-2abc \geqq 0 \end{aligned}$$

と変形できる．

系 2.8 $(p=0, q=2)$ を適用する．

$$a+b+c=1,\ abc=constant$$

ならば，$a^2+b^2+c^2$ は $0<a=b \leqq c$ のとき最大となる．
したがって，$0<a \leqq \dfrac{1}{3} \leqq c$, $2a+c=1$ のとき

$$a^2+2ac-2a^2c \geqq 0$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} & a^2+2ac-2a^2c \geqq 0 \\ \iff & a^2+2a(1-2a)-2a^2(1-2a) \geqq 0 \\ \iff & a(4a^2-5a+2) \geqq 0 \end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ． ■

問題 98　(IMO 2001)

a, b, c が正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq 1$$

(初等的な不等式 I 問題 37)

(解 1)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

また，証明すべき不等式は，同次式だから，$abc = 1$ とおける．このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq 1\\
\iff &\frac{a}{\sqrt{a^2+\dfrac{8}{a}}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\dfrac{8}{b}}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\dfrac{8}{c}}} \geqq 1\\
\iff &\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a^3+8}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b^3+8}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c^3+8}} \geqq 1
\end{aligned}$$

$s = a^3, t = b^3, u = c^3$ とおくと，$s, t, u > 0$, $stu = 1$ となる．

ここで，$f(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}}$ $(x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(s)+f(t)+f(u) \leqq 3f(\sqrt[3]{stu})$$

となる．

$f_1(u) = f(e^u) = -\dfrac{\sqrt{e^u}}{\sqrt{e^u+8}}$ とおくと

$$f_1''(u) = \frac{4\sqrt{e^u}(e^u-4)}{(e^u+8)^{\frac{5}{2}}}$$

だから，$f_1(u)$ は $u \leqq \log 4$ で凹関数である．

$v = \sqrt[3]{stu} = 1$ とおくと，$f_1(u)$ は $u \leqq \log v = 0$ で凹関数であるから，LCF-Corollary より，$0 < s = t \leqq u$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．

$0 < s \leqq 1 \leqq u$, $s^2u = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s+8}}+\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u+8}} \geqq 1 &\iff \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s+8}}+\frac{\sqrt{\dfrac{1}{s^2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{s^2}+8}} \geqq 1\\
&\iff \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s+8}}+\frac{1}{\sqrt{8s^2+1}} \geqq 1
\end{aligned}$$

$F(s)=\dfrac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s+8}}+\dfrac{1}{\sqrt{8s^2+1}}-1\ (s\geqq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(s)&=\frac{8\left\{\sqrt{s+8}(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}-s^{\frac{7}{2}}-16s^{\frac{5}{2}}-64s^{\frac{3}{2}}\right\}}{\sqrt{s}(s+8)^2(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\frac{8\left[\left\{\sqrt{s+8}(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}\right\}^2-\left(s^{\frac{7}{2}}+16s^{\frac{5}{2}}+64s^{\frac{3}{2}}\right)^2\right]}{\sqrt{s}(s+8)^2(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{s+8}(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{7}{2}}+16s^{\frac{5}{2}}+64s^{\frac{3}{2}}\right)}\\
&=\frac{8\left(511s^7+4064s^6-192s^5-512s^4-4072s^3+192s^2+s+8\right)}{\sqrt{s}(s+8)^2(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{s+8}(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{7}{2}}+16s^{\frac{5}{2}}+64s^{\frac{3}{2}}\right)}\\
&=\frac{8(s-1)(7s-1)(s+8)(s^2+s+1)(73s^2+7s+1)}{\sqrt{s}(s+8)^2(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{s+8}(8s^2+1)^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{7}{2}}+16s^{\frac{5}{2}}+64s^{\frac{3}{2}}\right)}
\end{aligned}$$

したがって，$F(s)$ の増減は次のようになる．

s	0	$\cdots$	$\frac{1}{7}$	$\cdots$	1
$F'(s)$		$+$	0	$-$	
$F(s)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

増減表から，$0<s\leqq 1$ のとき，$F(s)\geqq 0$ ■

(解 2)　証明すべき不等式は，同次式だから，$abc=1$ とおける．このとき

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqq 1\\
\iff&\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{8}{a}}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{8}{b}}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\frac{8}{c}}}\geqq 1\\
\iff&\sqrt{\frac{a^3}{a^3+8}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+8}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+8}}\geqq 1\\
\iff&\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{2}{a}\right)^3}}+\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{2}{b}\right)^3}}+\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{2}{c}\right)^3}}\geqq 1
\end{aligned}$$

$s=\dfrac{2}{a},t=\dfrac{2}{b},u=\dfrac{2}{c}$ とおくと，$s,t,u>0,\ stu=8$ となる．

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}\ (x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(s)+f(t)+f(u)\geqq 1$$

となる．

相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$x^2+2=(x^2-x+1)+(x+1) \geqq 2\sqrt{(x^2-x+1)(x+1)}=2\sqrt{x^3+1}$$

から

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \geqq \frac{2}{x^2+2}$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{s^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{t^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{u^3+1}} \geqq \frac{2}{s^2+2}+\frac{2}{t^2+2}+\frac{2}{u^2+2}$$

が成り立つから，$s,t,u>0$，$stu=8$ のとき

$$\frac{2}{s^2+2}+\frac{2}{t^2+2}+\frac{2}{u^2+2} \geqq 1$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{s^2+2}+\frac{2}{t^2+2}+\frac{2}{u^2+2} \geqq 1\\
\iff &\frac{4(s^2+t^2+u^2)+16-s^2t^2u^2}{(s^2+2)(t^2+2)(u^2+2)} \geqq 0\\
\iff &\frac{4(s^2+t^2+u^2-12)}{(s^2+2)(t^2+2)(u^2+2)} \geqq 0
\end{aligned}$$

$s^2+t^2+u^2-12 \geqq 0$ は相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$s^2+t^2+u^2 \geqq 3\sqrt[3]{(stu)^2}=3\sqrt[3]{8^2}=12$$

から得られるので

$$\frac{4(s^2+t^2+u^2-12)}{(s^2+2)(t^2+2)(u^2+2)} \geqq 0$$

は成り立つ． ■

問題 99 (Art of Problem Solving)

a, b, c は正の実数で，$a+b+c=3$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \geqq ab+bc+ca$$

(解 1) 一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．
証明すべき不等式は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \geqq ab+bc+ca \\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \geqq \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2} \\
\Longleftrightarrow\ &2\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right) \geqq 9-(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}$$

系 2.8 $\left(p=2, q=\dfrac{1}{3}\right)$ を適用する．

$$a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=constant$$

ならば，$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小となる．
したがって，$0<a \leqq 1 \leqq b$, $a+2b=3$ のとき

$$2\left(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b}\right) \geqq 9-(a^2+2b^2)$$

を示せばよい．

$A=\sqrt[3]{a}$, $B=\sqrt[3]{b}$ とおくと，$0<A \leqq B$, $A^3+2B^3=3$ のとき
$2(A+2B)+A^6+2B^6 \geqq 9$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&2(A+2B)+A^6+2B^6 \geqq 9 \\
\Longleftrightarrow\ &4B \geqq 9-A^4-2B^4-2A \\
\Longleftrightarrow\ &64B^3 \geqq (9-A^6-2B^6-2A)^2 \\
\Longleftrightarrow\ &64 \cdot \frac{3-A^3}{2} \geqq \left\{9-A^6-2\left(\frac{3-A^3}{2}\right)^2-2A\right\}^3 \\
\Longleftrightarrow\ &27A^{18}-162A^{15}+108A^{13}+81A^{12}-432A^{10}+756A^9+144A^8-216A^7 \\
&\quad -243A^6-288A^5+1296A^4-1650A^3-432A^2+972A+39 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &3(A-1)^2(9A^{16}+18A^{15}+27A^{14}-18A^{13}-63A^{12}-72A^{11}-54A^{10}-36A^9 \\
&\quad -162A^8-36A^7+138A^6+240A^5+261A^4+186A^3+543A^2+350A+13) \\
&\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

ここで，$0 < A \leqq 1$ より

$$\begin{aligned}
&18A^{13} + 63A^{12} + 72A^{11} + 54A^{10} + 36A^9 + 162A^8 + 36A^7 \\
&\leqq (18 + 63 + 72 + 54 + 36 + 162 + 36)A^7 \\
&= 441A^7 \\
&< 543A^2
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
&9A^{16} + 18A^{15} + 27A^{14} - 18A^{13} - 63A^{12} - 72A^{11} - 54A^{10} - 36A^9 - 162A^8 \\
&\qquad - 36A^7 + 138A^6 + 240A^5 + 261A^4 + 186A^3 + 543A^2 + 350A + 13 \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

すなわち $(*)$ は成り立つ． ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．
証明すべき不等式は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \geqq ab + bc + ca \\
\iff &\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \geqq \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} \\
\iff &2\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right) \geqq 9 - (a^2 + b^2 + c^2)
\end{aligned}$$

$f(x) = 2\sqrt[3]{x} + x^2 \ (x > 0)$ とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a) + f(b) + f(c) \geqq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

となる．

$f''(x)$ を求めると $f''(x) = \dfrac{18x^{\frac{5}{3}} - 4}{9x^{\frac{5}{3}}}$

$x^{\frac{5}{3}} \geqq \dfrac{2}{9}$ すなわち $x \geqq \left(\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{3}{5}}$ で $f(x)$ は凸関数である．

$s = \dfrac{a+b+c}{3} = 1 > \left(\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{3}{5}}$ とおくと，$x \geqq s$ で $f(x)$ は凸関数だから，RCF-Theorem より $0 < a \leqq 1 \leqq b = c$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．後は解 1 参照．

■

問題 100　(Vasile Cîrtoaje)

a, b, c は非負の実数で，$a+b+c=3$ を満たし，$p \geqq \dfrac{\log 9-\log 8}{\log 3-\log 2} \fallingdotseq 0.2905$ とするとき，次の不等式を証明せよ.

$$a^p+b^p+c^p \geqq ab+bc+ca$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる.

$$\begin{aligned}
&a^p+b^p+c^p \geqq ab+bc+ca\\
\iff &a^p+b^p+c^p \geqq \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\\
\iff &a^p+b^p+c^p \geqq \frac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2}
\end{aligned}$$

$f_1(x)=x^p+\dfrac{x^2}{2}$ $(x \geqq 0)$ とおくと証明すべき不等式は

$$f_1(a)+f_1(b)+f_1(c) \geqq 3f_1\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる.

$$f_1''(x)=p(p-1)x^{p-2}+1$$

$p \geqq 1$ のとき，$x>0$ において $f_1''(x)>0$ だから $f_1(x)$ は $[0,\infty)$ において凸関数である.

よって，Jensen の不等式より $(*)$ は成り立つ.

$\dfrac{\log 9-\log 8}{\log 3-\log 2} \leqq p<1$ のとき，$r=\dfrac{\log 9-\log 8}{\log 3-\log 2}$ とおく.

$f_1''(x)=\dfrac{x^{2-p}-(1-p)p}{x^{2-p}}$ と変形できる.

$x>[p(1-p)]^{\frac{1}{2-p}}$ のとき $f_1''(x)>0$ だから，$x \geqq [p(1-p)]^{\frac{1}{2-p}}$ において $f_1(x)$ は凸関数である.

$s=\dfrac{a+b+c}{3}=1>[p(1-p)]^{\frac{1}{2-p}}$ とおくと $x \geqq 1$ において $f_1(x)$ は凸関数である.
RCF-Theorem より $0 \leqq a \leqq 1 \leqq b=c$ のとき，不等式 $(*)$ が成り立つことを示せばよい.

したがって，$0 \leqq a \leqq 1 \leqq b$, $a+2b=3$ のとき，$a^p+2b^p \geqq 2ab+b^2$ を示せばよい.
不等式を同次化した

$$(a^p+2b^p)\left(\frac{a+2b}{3}\right)^{2-p} \geqq 2ab+b^2$$

を示す．$x=\dfrac{a}{b}$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$(x^p+2)\left(\frac{x+2}{3}\right)^{2-p} \geqq 2x+1$$

を示せばよい．

$f(x)=\log(x^p+2)+(2-p)\log\dfrac{x+2}{3}-\log(2x+1)\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{2\left\{x^{p+1}+(2p-1)x^p+px^{p-1}-2(p-1)x-(p+2)\right\}}{(x+2)(2x+1)(x^p+2)}$$

$g(x)=x^{p+1}+(2p-1)x^p+px^{p-1}-2(p-1)x-(p+2)\ \ (0<x \leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
g'(x)&=(p+1)x^p+p(2p-1)x^{p-1}+p(p-1)x^{p-2}-2(p-1)\\
g''(x)&=p(p+1)x^{p-1}+p(p-1)(2p-1)x^{p-2}+p(p-1)(p-2)x^{p-3}\\
&=px^{p-3}\left\{(p+1)x^2+(p-1)(2p-1)x+(p-1)(p-2)\right\}
\end{aligned}$$

ここで，$(p+1)x^2+(p-1)(2p-1)x+(p-1)(p-2)$ の判別式

$$\begin{aligned}
D&=(p-1)^2(2p-1)^2-4(p+1)(p-1)(p-2)\\
&=(p-1)(4p^3-12p^2+9p+7)\\
&=(p-1)\left\{\underbrace{4p^3+9p(1-p)+3(1-p^2)+9p+4}_{>0}\right\}<0
\end{aligned}$$

より $(p+1)x^2+(p-1)(2p-1)x+(p-1)(p-2)>0$

よって，$g''(x)>0$

$$g'(x)=(p+1)x^p+\frac{p(2p-1)x-p(1-p)}{x^{2-p}}-2(p-1)$$

より

$$\lim_{x\to+0}g'(x)=-\infty,\ g'(1)=3(p^2-p+1)>0$$

$g'(x)$ は増加関数だから，$g'(x)=0$ は $(0,1)$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．これを x_1 とおくと

$0<x<x_1$ で $g'(x)<0$，$x_1<x<1$ で $g'(x)>0$

また

$$\lim_{x\to+0}g(x)=\infty,\ g(1)=0$$

$g(x)=0$ は $(0,1)$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．これを x_2 とおくと

$0<x<x_2$ で $g(x)>0$，$x_2<x<1$ で $g(x)<0$

したがって，$0 < x < x_2$ で $f'(x) > 0$，$x_2 < x < 1$ で $f'(x) < 0$

x	0	$\cdots$	x_2	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$
\begin{aligned}
&f(0) = \log 2 + (2-p)\log\frac{2}{3} \geqq \log 2 + (2-r)\log\frac{2}{3} = 0 \\
&f(1) = 0
\end{aligned}
$$

よって，$f(x) \geqq 0$ ■

(解 2)　一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

$p \geqq 1$ の場合

$f_1(x) = x^p$ $(x \geqq 0)$ は凸関数だから

$$
a^p + b^p + c^p \geqq 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^p = 3
$$

が成り立つ．ところで

$$
9 = (a+b+c)^2 \geqq 3(ab+bc+ca)
$$

から，$3 \geqq ab+bc+ca$ となるので

$$
a^p + b^p + c^p \geqq ab+bc+ca
$$

は成り立つ．

$\dfrac{\log 9 - \log 8}{\log 3 - \log 2} \leqq p < 1$ のとき，$r = \dfrac{\log 9 - \log 8}{\log 3 - \log 2}$ とおく．

不等式を同次化すると

$$
2(a^p + b^p + c^p)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{2-p} + a^2 + b^2 + c^2 \geqq (a+b+c)^2
$$

系 2.8 $(0 < p < 1,\ q = 2)$ を適用する．

$$
a+b+c = constant,\ a^p + b^p + c^p = constant
$$

ならば，$a^2 + b^2 + c^2$ は $a = 0$ か $0 < a \leqq b = c$ のとき最小となる．

　$0 < a \leqq b = c$ の場合

　条件 $a+b+c=3$ を取り除いて考える．$x = \dfrac{a}{b}$ とおくと $0 < x \leqq 1$ で

$$
\begin{aligned}
&(a^p + 2b^p)\left(\frac{a+2b}{3}\right)^{2-p} \geqq 2ab + b^2 \\
\Longleftrightarrow\ &(x^p + 2)\left(\frac{x+2}{3}\right)^{2-p} \geqq 2x + 1
\end{aligned}
$$

$f(x) = \log(x^p+2) + (2-p)\log\dfrac{x+2}{3} - \log(2x+1)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおいて，$0 < x \leqq 1$ のとき，$f(x) \geqq 0$ を示す．

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\left\{x^{p+1} + (2p-1)x^p + px^{p-1} - 2(p-1)x - (p+2)\right\}}{(x+2)(2x+1)(x^p+1)} \\
&= \frac{2\left\{x^2 + (2p-1)x^p + p + 2(1-p)x^{2-p} - (p+2)x^{1-p}\right\}}{x^{1-p}(x+2)(2x+1)(x^p+1)}
\end{aligned}
$$

　$g(x) = x^2 + (2p-1)x^p + p + 2(1-p)x^{2-p} - (p+2)x^{1-p}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 2x + 2p - 1 + 2(1-p)(2-p)x^{1-p} - (p+2)(1-p)x^{-p} \\
g''(x) &= 2 + 2(1-p)^2(2-p)x^{-p} + p(p+2)(1-p)x^{-p-1}
\end{aligned}
$$

　$0 < x \leqq 1$ で $g''(x) > 0$ だから，$g'(x)$ は $0 < x \leqq 1$ で増加関数で

$$
\lim_{x \to +0} g'(x) = -\infty,\ g'(1) = 3(p^2 - p + 1) > 0
$$

よって，$g'(x) = 0$ は $(0,1)$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．これを x_1 とおくと

　$0 < x < x_1$ で $g'(x) < 0$，$x_1 < x \leqq 1$ で $g'(x) > 0$

また

$$
g(0) = p > 0,\ g(1) = 0
$$

が成り立つから，$g(x) = 0$ は $(0,1)$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．これを x_2 とおくと

　$0 \leqq x < x_2$ で $g(x) > 0$，$x_2 < x < 1$ で $g(x) < 0$

したがって，$0 \leqq x < x_2$ で $f'(x) > 0$，$x_2 < x < 1$ で $f'(x) < 0$

増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	x_2	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$\begin{aligned}&f(0)=\log 2+(2-p)\log\frac{2}{3}\geqq \log 2+(2-r)\log\frac{2}{3}=0\,,\\&f(1)=0\end{aligned}$$

よって，$0<x\leqq 1$ のとき $f(x)\geqq 0$

$a=0$ の場合

条件 $a+b+c=3$ を取り除いて考える．$0\leqq b\leqq c$ のとき

$$(b^p+c^p)\left(\frac{b+c}{3}\right)^{2-p}\geqq bc$$

を示せばよい．

$b=0$ のときは明らかになり立つから，$0<b\leqq c$ としてよい．$t=\dfrac{b}{c}$ とおくと $0<t\leqq 1$ で

$$\begin{aligned}&(b^p+c^p)\left(\frac{b+c}{3}\right)^{2-p}\geqq bc\\\Longleftrightarrow\ &(t^p+1)\left(\frac{t+1}{3}\right)^{2-p}\geqq t\end{aligned}$$

$F(t)=\log(t^p+1)+(2-p)\log\dfrac{t+1}{3}-\log t\ (0<t\leqq 1)$ とおいて，$0<t\leqq 1$ のとき $F(t)\geqq 0$ を示す．

$$F'(t)=\frac{\left\{t^{p+1}-(1-p)t^p+(1-p)t-1\right\}}{t(t+1)(t^p+1)}$$

$G(t)=t^{p+1}-(1-p)t^p+(1-p)t-1\ (0<t\leqq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}G'(t)&=(p+1)t^p-p(1-p)t^{p-1}+1-p\\G''(t)&=p(p+1)t^{p-1}+p(1-p)^2t^{p-2}\end{aligned}$$

$0<t\leqq 1$ で $G''(t)>0$ だから，$G'(t)$ は $(0,1]$ において増加関数で

$$\lim_{t\to+0}G'(t)=-\infty,\ G'(1)=p^2-p+2>0$$

よって，$G'(t)=0$ は $(0,1)$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．これを t_1 とおくと

$0<t<t_1$ で $G'(t)<0$，$t_1<t\leqq 1$ で $G'(t)>0$

また

$$\lim_{t\to+0} G(t)=-1>0,\ G(1)=0$$

が成り立つから，$(0,1)$ の範囲で $G(t)<0$ だから，$F'(t)<0$

$F(t)$ は $(0,1]$ において減少関数で，$0<t\leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(t) &\geqq F(1) \\ &= \log 2+(2-p)\log\frac{2}{3} \\ &\geqq \log 2+(2-r)\log\frac{2}{3}=0 \qquad \left(\because\quad 1>p\geqq r=\frac{\log 9-\log 8}{\log 3-\log 2}\right) \end{aligned}$$

よって，$0<t\leqq 1$ のとき $F(t)\geqq 0$ ■

[注]　問題 100 で $p=\dfrac{1}{3}$ とおいたものが問題 99 である．

問題 101　(Bosnia Herzegovina Regional Olympiad 2008 Third Grades)

a, b, c は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\left(1+\frac{4c}{a+b}\right)>25$$

(解答)　一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

$$f(a,b,c)=\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\left(1+\frac{4c}{a+b}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\\
&=\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left\{\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\left(1+\frac{4c}{a+b}\right)-\left(1+\frac{4(b+c)}{2a+b+c}\right)^2\right\}\\
&=\frac{4(b^4+c^4-ab^3-ac^3+ab^2c+abc^2-2a^2b^2-a^2c^2-2b^2c^2+4a^2bc)}{(a+b)(c+a)(2a+b+c)}\\
&=\frac{4(b-c)^2(a+b+c)(b+c-2a)}{(a+b)(c+a)(2a+b+c)}\geqq 0
\end{aligned}$$

より

$$f(a,b,c)\geqq f(a,t,t)\,,\ t=\frac{b+c}{2}$$

$0<a\leqq t$ のとき，$f(a,t,t)>25$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&f(a,t,t)>25\\
\iff&\left(1+\frac{2a}{t}\right)\left(1+\frac{4t}{a+t}\right)^2>25\\
\iff&\frac{10at^2-4a^2t+2a^3}{t(t+a)^2}>0\\
\iff&\frac{2a(5t^2-2at+a^2)}{t(t+a)^2}>0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．■

問題 102　(Rioplatense Mathematical Olympiad , Level 3 2013)

a, b, c, d は正の実数で，$a^2+b^2+c^2+d^2=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ．

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geqq abcd$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる．
このとき，$a^2+b^2+c^2+d^2=1$ から $0<a \leqq b \leqq c \leqq d<1$ がわかる．

$$\begin{aligned}
&(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geqq abcd \\
\Longleftrightarrow\ &\log(1-a)+\log(1-b)+\log(1-c)+\log(1-d) \geqq \log a+\log b+\log c+\log d
\end{aligned}$$

$A=a^2, B=b^2, C=c^2, D=d^2$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\log x-\log\left(1-\sqrt{x}\right)\ (x>0)$ とおくと，証明すべき不等式は，$0<A \leqq B \leqq C \leqq D$, $A+B+C+D=1$ のとき

$$f(A)+f(B)+f(C)+f(D) \leqq 4f\left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)$$

となる．

$$f''(x)=\frac{3\sqrt{x}-2}{4x^2\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

$f(x)$ は $3\sqrt{x}-2 \leqq 0$ すなわち $x \leqq \dfrac{4}{9}$ で凹関数である．

$s=\dfrac{A+B+C+D}{4}=\dfrac{1}{4}<\dfrac{4}{9}$ とおくと，$f(x)$ は $x \leqq \dfrac{1}{4}$ で凹関数だから，LCF-Theorem より，$0<A=B=C \leqq \dfrac{1}{4} \leqq D$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい．
したがって，$0<a=b=c \leqq \dfrac{1}{2} \leqq d$, $3a^2+d^2=1$ のとき

$$(1-a)^3(1-d) \geqq a^3d$$

が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned}
&(1-a)^3(1-d) \geqq a^3d \\
\Longleftrightarrow\ &(3a^2-3a+1)d \leqq (1-a)^3 \\
\Longleftrightarrow\ &(3a^2-3a+1)^2d^2 \leqq (1-a)^6 \\
\Longleftrightarrow\ &(3a^2-3a+1)^2(1-3a^2) \leqq (1-a)^6 \\
\Longleftrightarrow\ &28a^6-60a^5+51a^4-20a^3+3a^2 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &a^2(2a-1)^2(7a^2-8a+3) \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つ．　■

(解 2)　$a^2+b^2+c^2+d^2=1$ より

$$2cd \leqq c^2+d^2=1-a^2-b^2 \quad \text{だから} \quad -cd \geqq \frac{a^2+b^2-1}{2}$$

これを使うと

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)-cd &\geqq (1-a)(1-b)+\frac{a^2+b^2-1}{2}\\ &= \frac{(a+b)^2-2(a+b)+1}{2}\\ &= \frac{(a+b-1)^2}{2} \geqq 0\end{aligned}$$

から

$$(1-a)(1-b) \geqq cd$$

同様にして

$$(1-c)(1-d) \geqq ab$$

が成り立つから，これらの不等式の辺々をかけると

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geqq abcd$$

が成り立つ．　■

問題 103　(Austria Federal Competition For Advanced Students,Part 2　2006)

a, b, c は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$3(a+b+c) \geqq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

(解 1)　一般性を失うことなく $0 < a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．
系 2.8 $(p=0, q=3)$ を適用する．

$$a+b+c = constant,\ abc = constant$$

ならば，$a^3+b^3+c^3$ は $0 < a = b \leqq c$ のとき最大となる．
したがって，$0 < a = b \leqq c$ のとき

$$3(2a+c) \geqq 8\sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{\frac{2a^3+c^3}{3}}$$

を示せばよい．

$x = \dfrac{a}{c} \leqq 1$ とおいて，$0 < t \leqq 1$ のとき

$$3(2x+1) \geqq 8\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{\frac{2x^3+1}{3}}$$

を示す．$t = \sqrt[3]{x} \leqq 1$ とおくと

$$\begin{aligned}
&3(2x+1) \geqq 8\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{\frac{2x^3+1}{3}} \\
\Longleftrightarrow\ &3(2t^3+1) \geqq 8t^2 + \sqrt[3]{\frac{2t^9+1}{3}} \\
\Longleftrightarrow\ &6t^3 - 8t^2 + 3 \geqq \sqrt[3]{\frac{2t^9+1}{3}} \\
\Longleftrightarrow\ &\left(6t^3 - 8t^2 + 3\right)^3 \geqq \frac{2t^9+1}{3} \\
\Longleftrightarrow\ &646t^9 - 2592t^8 + 3456t^7 - 564t^6 - 2592t^5 + 1728t^4 + 486t^3 - 648t^2 + 80 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ &2(t-1)^2(323t^7 - 650t^6 + 105t^5 + 578t^4 - 245t^3 - 204t^2 + 80t + 40) \geqq 0
\end{aligned}$$

$323t^7 - 650t^6 + 105t^5 + 578t^4 - 245t^3 - 204t^2 + 80t + 40 \geqq 0$ を示す．

$u = \dfrac{1}{t} \geqq 1,\ v = u - 1 \geqq 0$ とおくと

$$\begin{aligned}
&323t^7 - 650t^6 + 105t^5 + 578t^4 - 245t^3 - 204t^2 + 80t + 40) \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 40(v+1)^7 + 80(v+1)^6 - 204(v+1)^5 - 245(v+1)^4 + 578(v+1)^3 \\
&\quad + 105(v+1)^2 - 650(v+1) + 323 \geqq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 40v^7 + 360v^6 + 1116v^5 + 1335v^4 + 558v^3 + 369v^2 + 54v + 27 \geqq 0
\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかになり立つ． ■

(解 2) $x = \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}},\ y = \dfrac{a+b+c}{3},\ z = \sqrt[3]{abc}$ とおくと

$$x \geqq y \geqq z$$

が成り立ち，証明すべき不等式は，$3 \cdot 3y \geqq 8z + x$ すなわち

$$9(y-z) \geqq x - z$$

ここで

$$x - z = \frac{x^3 - z^3}{x^2 + xz + z^2} \leqq \frac{x^3 - z^3}{y^2 + yz + z^2}$$

だから，$9(y-z) \geqq \dfrac{x^3 - z^3}{y^2 + yz + z^2}$ すなわち

$$9(y^3 - z^3) \geqq x^3 - z^3$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&9(y^3 - z^3) \geqq x^3 - z^3 \\
\Longleftrightarrow\ & 9y^3 \geqq 8z^3 + x^3 \\
\Longleftrightarrow\ & (a+b+c)^3 \geqq 24abc + a^3 + b^3 + c^3
\end{aligned}$$

最後の不等式は次のように示すことができる．

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) &= 3(a+b)(b+c)(c+a) \\
&\geqq 3 \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \\
&= 24abc
\end{aligned}$$

■

問題 104　k を 2 以上の整数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$n^{k-2}(x_1+x_2+\cdots+x_n) \geqq \left(n^{k-1}-1\right)\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}}$$

(解答) $x=\sqrt[k]{\dfrac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}}$, $y=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, $z=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ とおくと

$$x \geqq y \geqq z$$

が成り立ち，証明すべき不等式は，$n^{k-2}\cdot ny \geqq \left(n^{k-1}-1\right)z+x$ すなわち

$$n^{k-1}(y-z) \geqq x-z$$

となる．

$$\begin{aligned} x-z &= \frac{x^k-z^k}{x^{k-1}+x^{k-2}z+x^{k-3}z^2+\cdots+z^{k-1}} \\ &\leqq \frac{x^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+y^{k-3}z^2+\cdots+z^{k-1}} \end{aligned}$$

より

$$n^{k-1}(y-z) \geqq \frac{x^k-z^k}{y^{k-1}+y^{k-2}z+y^{k-3}z^2+\cdots+z^{k-1}}$$

すなわち

$$n^{k-1}(y^k-z^k) \geqq x^k-z^k$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned} & n^{k-1}(y^k-z^k) \geqq x^k-z^k \\ \iff & n^{k-2}\cdot ny^k \geqq \left(n^{k-1}-1\right)z^k+x^k \\ \iff & (x_1+x_2+\cdots+x_n)^k \geqq x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k+n(n^{k-1}-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^k} \end{aligned}$$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k \geqq x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k+n(n^{k-1}-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^k} \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを k に関する数学的帰納法で示す．

(i) $k=2$ のとき

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \geqq x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+n(n-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^2}$$

を示す．相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)\\
&=x_1(x_2+x_3+\cdots+x_n)+x_2(x_1+x_3+\cdots+x_{n-1})\\
&\qquad+\cdots+x_n(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})\\
&=x_1\cdot(n-1)\sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_{n-1}}+x_2\cdot(n-1)\sqrt[n-1]{x_1x_3\cdots x_n}\\
&\qquad+\cdots+x_n\cdot(n-1)\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\\
&=(n-1)\left(x_1\cdot\sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_{n-1}}+x_2\cdot\sqrt[n-1]{x_1x_3\cdots x_n}\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+x_n\cdot\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\right)\\
&\geqq(n-1)\cdot n\sqrt[n]{x_1\sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_{n-1}}\cdot x_2\sqrt[n-1]{x_1x_3\cdots x_n}\cdots x_n\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}}\\
&=(n-1)n\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)\sqrt[n-1]{(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1}}}\\
&=(n-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^2}
\end{aligned}
$$

(ii) k のとき成り立つと仮定すると

$$
(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k\geqq x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k+n(n^{k-1}-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^k}
$$

両辺に $x_1+x_2+\cdots+x_n$ をかけると

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{k+1}\\
&\geqq(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\
&\qquad+n(n^{k-1}-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^k}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\
&\geqq(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\
&\qquad+n(n^{k-1}-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^k}\cdot n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\\
&=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k(x_1+x_2+\cdots+x_n)+n^2(n^{k-1}-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k(x_1+x_2+\cdots+x_n)+n^2(n^{k-1}-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^{k+1}}\\
&\geqq x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_n^{k+1}+n(n^k-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\left(x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_n^{k+1}\right)\\
&=x_1^k(x_2+x_3+\cdots+x_n)+x_2^k(x_1+x_3+\cdots+x_{n-1})\\
&\qquad+\cdots+x_n^k(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})\\
&\geqq n(n-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

を示せばよい．相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$
\begin{aligned}
&x_1^k(x_2+x_3+\cdots+x_n)+x_2^k(x_1+x_3+\cdots+x_{n-1})\\
&\qquad+\cdots+x_n^k(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})\\
&\geqq x_1^k\cdot(n-1)\sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_{n-1}}+x_2^k\cdot(n-1)\sqrt[n-1]{x_1x_3\cdots x_n}\\
&\qquad+\cdots+x_n^k\cdot(n-1)\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\\
&=(n-1)\left(x_1^k\cdot\sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_{n-1}}+x_2^k\cdot\sqrt[n-1]{x_1x_3\cdots x_n}\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+x_n^k\cdot\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\right)\\
&\geqq(n-1)\cdot n\sqrt[n]{x_1^k\sqrt[n-1]{x_2x_3\cdots x_{n-1}}\cdot x_2^k\sqrt[n-1]{x_1x_3\cdots x_n}\cdots x_n^k\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}}\\
&=(n-1)n\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^k\sqrt[n-1]{(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1}}}\\
&=n(n-1)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

$k+1$ のときも成り立つ．したがって，すべての $k\geqq 2$ について $(*)$ は成り立つ． ■

[注]　問題 104 において $k=n=3$ とおいたものが問題 103 である．

問題 105 (Balkan Mathematical Olympiad 2012)

x, y, z は正の実数のとき，次の不等式を証明せよ．

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+x)(y+z)}$$
$$\geqq 4(xy+yz+zx)$$

(解 1) $a=\sqrt{y+z}$, $b=\sqrt{z+x}$, $c=\sqrt{x+y}$ とおくと

$$x=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2},\ y=\frac{a^2-b^2+c^2}{2},\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

ただし

$$a,b,c>0,\ a^2+b^2>c^2,\ b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2$$

が成り立つが，ここでは，$a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$ を除いて，$a,b,c>0$ のとき，不等式が成り立つことを示す．

このとき

$$\sum_{cyclic}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}=abc(a+b+c),$$

$$\begin{aligned}4(xy+yz+zx)&=(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)\\&\quad+(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\\&\quad\ +(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)\\&=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)\end{aligned}$$

となるから

$$abc(a+b+c)\geqq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

すなわち

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geqq 2a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \qquad (\bigstar)$$

を示せばよい．

一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

$$f(a,b,c)=a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-2a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) &= b^4+c^4-2b^2c^2+abc\left(b+c-2\sqrt{bc}\right)\\
&\quad -2a^2b^2c^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{bc}\right)\\
&=(b^2-c^2)^2+abc\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2-2a^2(b-c)^2\\
&=(b-c)^2\left\{(b+c)^2-2a^2\right\}+abc\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\\
&=(b-c)^2\left\{\underbrace{(b^2-a^2)+(c^2-a^2)}_{\geqq 0}+2bc\right\}\\
&\qquad +abc\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\geqq 0
\end{aligned}$$

から

$$f(a,b,c)\geqq f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)$$

が成り立つ．
よって，$t=\sqrt{bc}$ とおき，$0<a\leqq t$ のとき，$f(a,t,t)\geqq 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
f(a,t,t)&=a^4+2t^4+at^2(a+2t)-2a^2t^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{t^2}\right)\\
&=2at^3-3a^2t^2+a^4\\
&=a(t-a)^2(2t+a)\geqq 0
\end{aligned}$$

■

(解 2)　$a=\sqrt{y+z}$, $b=\sqrt{z+x}$, $c=\sqrt{x+y}$ とおくと

$$x=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2},\ y=\frac{a^2-b^2+c^2}{2},\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

ただし，$a,b,c>0$, $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$ が成り立つ．
このとき，証明すべき不等式は

$$abc(a+b+c)\geqq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

すなわち

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geqq 2a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\qquad(\bigstar)$$

となる．
　一般性を失うことなく $0<a\leqq b\leqq c$ と仮定できる．

系 2.8 $(p=0, q=4, -2)$ を適用する．

$$a+b+c=constant,\ abc=constant$$

ならば，$a^4+b^4+c^4$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最小で，

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ は $0<a \leqq b=c$ のとき最大となる．

したがって，$0<a \leqq b=c$ のとき

$$a^4+2b^4+ab^2(a+2b) \geqq 2a^2b^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)$$

すなわち

$$a^4-3a^2b^2+2ab^3 \geqq 0$$

を示せばよい．これは

$$a^4-3a^2b^2+2ab^3=a(a-b)^2(a+2b) \geqq 0$$

からいえる． ■

(解 3) $a=\sqrt{y+z}$, $b=\sqrt{z+x}$, $c=\sqrt{x+y}$ とおくと

$$x=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2},\ y=\frac{a^2-b^2+c^2}{2},\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

ただし，$a,b,c>0$, $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$ が成り立つ．

このとき，証明すべき不等式は

$$abc(a+b+c) \geqq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

すなわち

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geqq 2a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \qquad (\bigstar)$$

となる．

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる．

また，証明すべき不等式は同次式だから，$abc=1$ と仮定できるから

$$a^4+b^4+c^4+a+b+c \geqq 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

を示せばよい．

$$f(x)=x^4+x-\frac{2}{x^2}\ (x>0)$$

とおくと，証明すべき不等式は

$$f(a)+f(b)+f(c)\geqq 3f\left(\sqrt[3]{abc}\right)$$

となる．
ここで

$$f_1(u)=f(e^u)=e^{4u}+e^u-\frac{2}{e^{2u}}$$

とおくと

$$f_1''(u)=\frac{16e^{6u}+e^{3u}-8}{e^{2u}}$$

$u\geqq 0$ のとき $f_1''(u)>0$ だから，$f_1(u)$ は $u\geqq 0$ で凸関数である．
$r=\sqrt[3]{abc}=1$ とおくと，$f_1(u)$ は $u\geqq \log r=0$ で凸関数だから，
RCF-Corollary より
$0<a\leqq b=c,\ ab^2=1$ のとき

$$a^4+2b^4+a+2b\geqq 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&a^4+2b^4+a+2b\geqq 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{b^8}+2b^4+\frac{1}{b^2}+2b\geqq 2\left(b^4+\frac{2}{b^2}\right)\\
\Longleftrightarrow\ &2b-\frac{3}{b^2}+\frac{1}{b^8}\geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &2b^9-3b^6+1\geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &(b^3-1)^2(2b^3+1)\geqq 0
\end{aligned}$$

より

$$a^4+2b^4+a+2b\geqq 2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)$$

は成り立つ． ■

参考文献

[1] V.Cîrtoaje : THE EQUAL VARIABLE METHOD , journal of inequalities in pure and applied mathematics

[2] V.Cîrtoaje : ALGEBRAIC INEQUALITIES Old and New Methods , GIL Publishing House

[3] P. K . Hung : The stronger mixing variables method ,Mathematical Reflections 6 (2006)

[4] P. K . Hung : Secrets in and Inequalities volume 1 - basic inequalities , GIL Publishing House

[5] P. K . Hung : Secrets in and Inequalities volume 2 - advanced inequalities -free chapter , GIL Publishing House

[6] Z. Cvetkovski : Inequalities Theorems , Techniques and Selected Problems , Springer

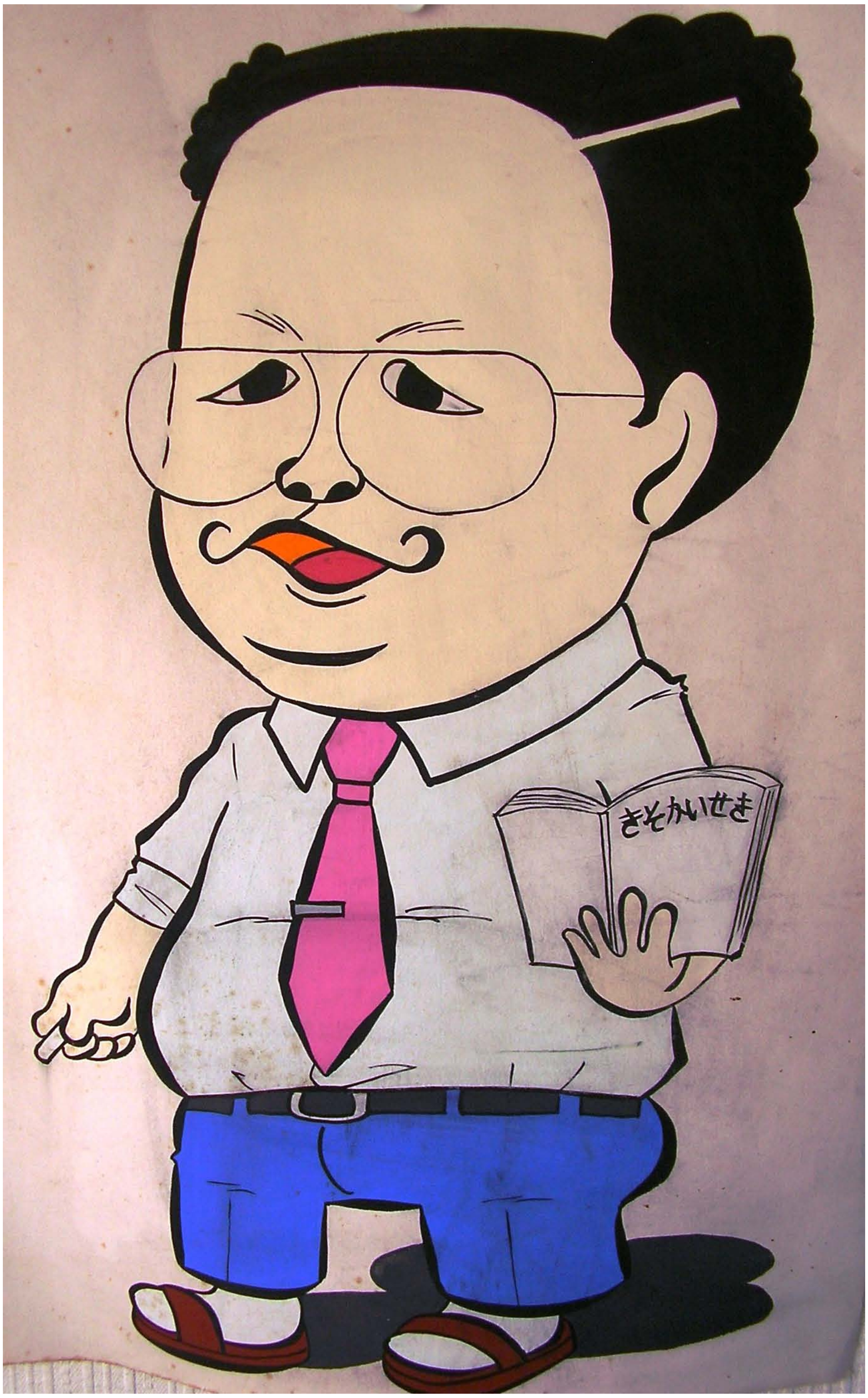
[7] 柳田　五夫 : 初等的な不等式 I , 数学のいずみ

[8] 柳田　五夫 : 初等的な不等式 II , 数学のいずみ

[9] 柳田　五夫 : 相加平均と相乗平均を含む不等式について , 数学のいずみ

[10] 大関信雄・大関清太 : 不等式への招待 , 近代科学社

2014 年　8 月 22 日 Ver .1.1


きそかいせき