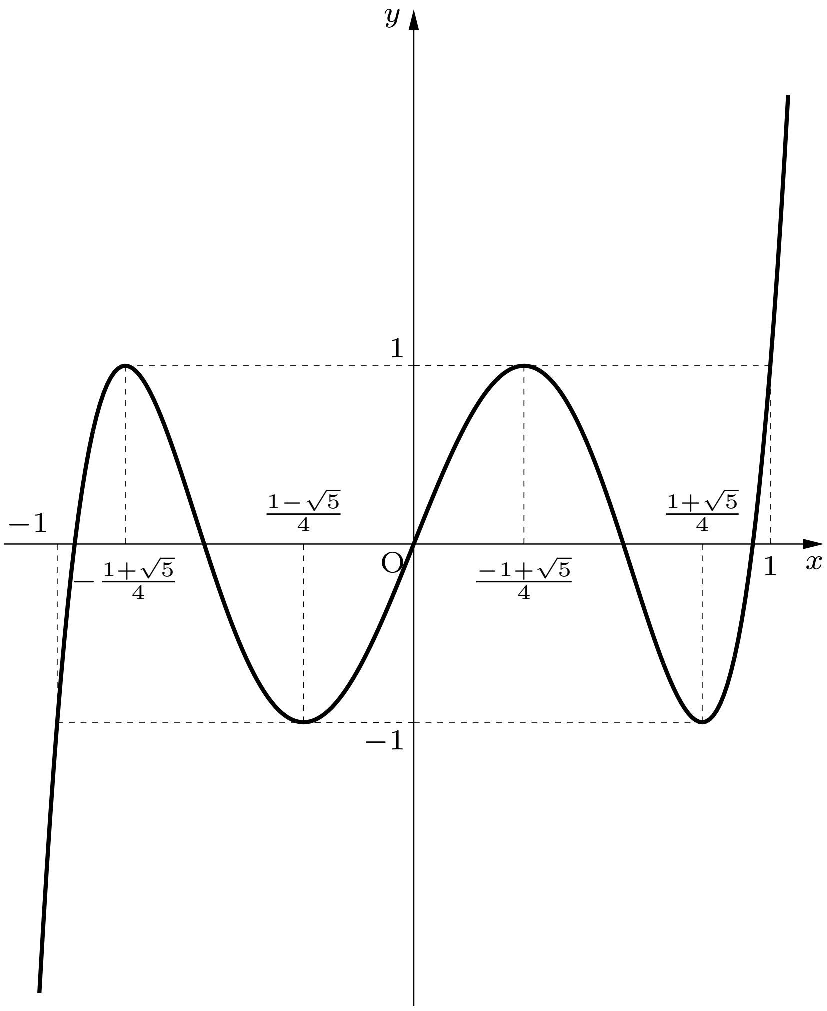
数学の問題

柳田 五夫

チェビシェフ多項式 $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ のグラフ



まえがき

ここでは，高校数学から大学初年級程度の問題を 56 題扱っている．内訳は A 問題が 22 題，B 問題が 33 題，C 問題が 1 題である．B 問題の中には大学初年級程度の問題も入っているが，それらは，スターリングの公式や

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

等興味深いものである．これらの問題にしても，できるだけ高校数学で解けるようにしている．ただし，強引に問題形式にしていることを断っておきたい．

問題 C では，次の 1 題を扱っている．

$\boxed{1}$ $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n\ ,\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}<1$ を満たす自然数 $x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n$ に対して，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ の最大値 M_n を求めよ．

$$\begin{aligned}
&n=2 \text{ のとき } M_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\,,\\
&n=3 \text{ のとき } M_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{5}{6}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}\,,\\
&n=4 \text{ のとき } M_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}=\frac{41}{42}+\frac{1}{43}=\frac{1805}{1806}\,,\\
&n=5 \text{ のとき } M_5=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}\\
&\qquad\qquad\qquad =\frac{1805}{1806}+\frac{1}{1807}\\
&\qquad\qquad\qquad =\frac{3263441}{3263442}
\end{aligned}$$

となるが, K.Soundararajan は Approximating 1 from below using n egyptian fractions において， n の場合を解いている．

2012 年 8 月

著者

目次

1　問題 A

$\boxed{1}$　天使はつねに真実を述べ，悪魔はつねに嘘をつく．A ，B は悪魔か天使であることはわかっているが，どちらかはっきりしない．A がこういった．「わたしが天使ならば，B も天使です．」この二人の正体は $\boxed{}$ である．

［選択肢］　1．A , B ともに天使　　2．A は天使, B は悪魔
　　　　　　3．A は悪魔 , B は天使　　4．A , B ともに悪魔

（'04 慶應大・総合政策）

$\boxed{2}$　$a>1$ とし $P=\sqrt[3]{a+\dfrac{a+8}{3}\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\dfrac{a+8}{3}\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}}$ とおくとき

(1)　P は方程式 $x^3+(a-4)x-2a=0$ の解であることを証明せよ．

(2)　(1) を用いて $P=2$ であることを証明せよ．　（'65 新潟大）

$\boxed{3}$　△ ABC において BC$=a$, CA$=b$，AB$=c$ とするとき
$(b-c)\cos^2 A=b\cos^2 B-c\cos^2 C$ ならば △ ABC はどんな三角形か．

（'71 宇都宮大）

$\boxed{4}$　$a\geqq 2, b\geqq 2, c\geqq 2, d\geqq 2$ のとき，$abcd>a+b+c+d$ であることを示せ．　（'65 名古屋大）

$\boxed{5}$　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}m^2\right)$ と $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{n-(k-1)\}k^2$
で定められるとき，$a_n=b_n\ (n=1, 2, 3, \ldots)$ となることを示せ．　（'11 群馬大）

$\boxed{6}$ 次の不等式を証明せよ.

(1) $a \geqq b\,,\, a' \geqq b'$ のとき

$$\frac{aa'+bb'}{2} \geqq \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a'+b'}{2}\,.$$

(2) $a \geqq b \geqq c\,,\, a' \geqq b' \geqq c'$ のとき

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{3} \geqq \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a'+b'+c'}{3}\,.$$

$\boxed{7}$ 三角形 ABC の頂角 $A\,,B\,,C$ の対辺の長さをそれぞれ $a\,,b\,,c$ とするとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$60^\circ \leqq \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < 90^\circ$$

（’66 京都府医大）

$\boxed{8}$ (1) 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_0\,,y_0)$ における接線の方程式は

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ であることを証明せよ.

(2) 楕円 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_0\,,y_0)$ における接線の方程式は $\dfrac{(x_0-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\dfrac{(y_0-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$ であることを証明せよ.

$\boxed{9}$ (1) $\tan\theta = t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\cos 2\theta\,,\sin 2\theta$ を t を用いて表せ.

(2) t が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,,\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ の動く範囲を図示せよ.

(3) t が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\,,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ の動く範囲を図示せよ.

$\boxed{10}$ 実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える．

(1) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $(t\,,t^2)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) t がすべての実数を動くとき，直線 l_t が通る点 $(x\,,y)$ の全体を図示せよ．

$\boxed{11}$ 実数 t に対して， xy 平面上の直線 $(1-t^2)x - 2ty = 1 + t^2$ は t の値によらずある曲線 C に接しているものとする．

(1) 曲線 C の方程式を求めよ．また，接点の座標を求めよ．

(2) t が $t \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ．

('02 神戸大（改題))

$\boxed{12}$ (1) 方程式 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$ は実数解をもつことを示せ．

(2) 上の実数解を $\alpha\,,\beta\ (\alpha \leqq \beta)$ とし，また

$$\gamma = \frac{a+c}{2} - \frac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{2(p^2+q^2)}$$

とするとき，つねに $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$ が成り立つかどうかを調べよ．

(1)，(2) において，$a\,,b\,,c\,,p\,,q$ は任意の実数で，$p\,,q$ の少なくとも一方は 0 でないとする．

（'63 京都大）

$\boxed{13}$ $x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4$ はいずれも正の数とする．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $\dfrac{x_1+x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1x_2}\,.$

(2) $\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\,.$

(3) $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \geqq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\,.$

$\boxed{14}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a \geqq 1, b \geqq 1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right) \geqq 2\left(ab - \frac{1}{ab}\right)$$

(2) $a \geqq 1, b \geqq 1, c \geqq 1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) + \left(b^3 - \frac{1}{b^3}\right) + \left(c^3 - \frac{1}{c^3}\right) \geqq 3\left(abc - \frac{1}{abc}\right)$$

（'07 早稲田大・教育）

$\boxed{15}$ (1) a が正の定数，n が正の整数ならば，$x \geqq 0$ において不等式

$ax^{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} > x$ が成り立つことを証明せよ． ('67 東京大)

(2) (1) から a が正の定数，n が正の整数ならば，$x > 0$ において，不等式 $ax^n + \dfrac{1}{\sqrt[n]{ax}} > 1$ が成り立つことがわかる．

それでは，a が正の定数，n が正の整数ならば，$x > 0$ において，不等式

$ax^n + \dfrac{1}{\sqrt[n]{ax}} \geqq m$ が成り立つような定数 $m(> 1)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{16}$ 三角形 ABC において，3 つの辺の間に $2b = a + c$ なる関係があるとき，

(1) $2\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{C-A}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ．

$\boxed{17}$ $a\cos B = b\cos C = c\cos A$ が成り立つ△ ABC はどんな三角形か．

$\boxed{18}$　n を正の整数とする．3 次方程式 $x^3 + 3nx^2 - (3n+2) = 0$ について次の問いに答えよ．

(1)　すべての正の整数 n について，上の 3 次方程式は正の解をただ 1 つしかもたないことを証明せよ．

(2)　各正の整数 n に対して，上の 3 次方程式の正の解を a_n とする．極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

（'08 弘前大・医，理工）

$\boxed{19}$　n を 2 以上の自然数とする．$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ および $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ を満足する数列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ および $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が与えられている．$y_1, y_2, \ldots, y_n$ を並べかえて得られるどのような数列 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ に対しても

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ．

（'87 東京大）

$\boxed{20}$ ある小学校の教論が児童から次のような「発見」の報告を受けた．

「私は分数の大小関係を判定する新方法を発見しました．分数の不等式 $\dfrac{a}{c} > \dfrac{d}{b}$ が成立するかどうかを判定するためには，$a+b > c+d$ が成立するかどうかを確かめればよいのです．例えば，$\dfrac{2}{3} > \dfrac{3}{5}$ が成り立つことは $2+5 > 3+3$ であることからわかります.」

これに対して，教論はその場で正しいのか間違っているのかの判定は下さず，家に帰ってから実験してみた．一晩の考察の末，次のような「結論」に達した．

「この方法は 90 %の整数の組に対しては正しいが，残り 10 %の整数の組に対して間違っている.」

このことについて，以下の❶および❷に答えよ．

❶（解答用紙（省略）に解答せよ．これらは 2 枚とも試験開始 60 分後に回収する.）

(1) この児童の「発見」は正しいか．

(2) この教論はこの数値 (90 %，10 %) をどのような方法で見つけただろうか．その方法を自由に推測して，それを実行せよ．

(3) この 10 %といわれている数値を数学的に明確なものとするには，どのように考え，何を計算したらよいだろうか．あなたの考えを述べ，計算すべきものが何であるかを（できれば数式で）書き表せ．

❷ この教論の「結論」が数学的にどの程度正しいものであるかは，次のように考えることもできる．

＜注意＞ 以下は一つの考え方である．前問❶の (3) の「考え方」は以下の方法以外にも多数ありうる．

問題 与えられた正の整数 N に対して，1 以上 N 以下の 4 つの整数 a, b, c, d からなる (a, b, c, d) の全体を考える．このような組のうちで，$a+b-c-d$ と $ab-cd$ の符号（すなわち，$+, -, 0$ のいずれか）が相異なるものの総数を V_N で表し，$P_N = \dfrac{V_N}{N^4}$ とおく．$N \to \infty$ のときの P_N の極限値を求めよ．

以下は，上の問題に対する解答の試みの一例である．

(1) 文中の$\boxed{}$に適切な数値や数式を，解答用紙のそれぞれの欄（省略）に記入せよ．

2 つの数 $a+b-c-d$ と $ab-cd$ の符号が相異なるとすると，

場合 1　$a+b-c-d \geqq 0$ かつ $ab-cd \leqq 0$ で，2 つの等号が同時には成立しない．

　場合 2　$a+b-c-d \leqq 0$ かつ $ab-cd \geqq 0$ で，2 つの等号が同時には成立しない．

のいずれかが成り立つはずである．場合 1 と場合 2 とは両立せず，またそれぞれの場合の数は相等しい．そこで場合 1 だけを考察しよう．場合 1 の条件は次のように書き換えられる．

$\boxed{\text{ア}} \leqq d \leqq \boxed{\text{イ}}$　ただし，2 つの等号が同時には成立しない．$\cdots\cdots$①

このことから，c は次の不等式を満たさなければならないことがわかる．

$c^2+\boxed{\text{ウ}}c+\boxed{\text{エ}}<0$ $\cdots\cdots$②

左辺を因数分解して，$\left(c-\boxed{\text{オ}}\right)\left(c-\boxed{\text{カ}}\right)<0$ $\cdots\cdots$③

これより，場合 1 では $a=b$ は起こらないことがわかるから，

　場合 1-1 $a<b$　　場合 1-2 $a>b$

のいずれかが成り立っているはずである．それぞれの場合の数は相等しいので，場合 1-1 だけを考察しよう．

式③より，$\boxed{\text{キ}}<c<\boxed{\text{ク}}$ $\cdots\cdots$④

また，最初の状況設定により，$1 \leqq a \leqq N\,,\, 1 \leqq b \leqq N$ $\cdots\cdots$⑤

　以上から，V_N を求めるには，3 つの式① ，④，⑤を満たす整数の組 (a,b,c,d) の個数を考え，それを $\boxed{\text{ケ}}$ 倍すればよいことがわかる．この方法を $N=3,4,5$ の場合に適用すると，

$$V_3=\boxed{\text{コ}},V_4=\boxed{\text{サ}},V_5=\boxed{\text{シ}}$$

(2)　V_N を N の式で表すために，まず a,b,c を式④，⑤を満たすよう固定して考えよう．このとき，① を満たす d の個数 D は次のように近似できる（小数部分は極限に影響しないので気にしなくてよい）．

$$D \fallingdotseq a+b-c-\frac{ab}{c} \quad \cdots\cdots⑥$$

そこで，次の各級数の和を計算せよ．

$$S_c=\sum_{a=1}^{c-1}\left(a+b-c-\frac{ab}{c}\right)\ (b,c\text{ の式となる})\,,\, T_b=\sum_{c=2}^{b-1}S_c\,,\, U_N=\sum_{b=3}^{N}T_b$$

(3)　$N \to \infty$ のときの P_N の極限値を求めよ．

『必要ならば，次の公式を用いてよい．

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)\,,\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\,, \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$』

（'97 愛知教育大）

$\boxed{21}$ n を自然数とする．次の 3 つの不等式 (1)，(2)，(3) をすべて満たす自然数の組 $(a\,,b\,,c\,,d)$ はいくつあるか．n を用いてあらわせ．

(1)　$1 \leqq a < d \leqq n$　　(2)　$a \leqq b < d$　　(3)　$a < c \leqq d$

（'04 京都大・理）

$\boxed{22}$ 次の問いに答えよ．

(1)　$a_1\,,a_2,\ldots,a_n\,,b_1\,,b_2,\ldots,b_n$ が実数で，$b_1>0\,,b_2>0\,,\ldots,b_n>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\,.$$

(2)　$x_1>0\,,x_2>0\,,\cdots,x_n>0\,,x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ のとき

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2$$

の最小値を求めよ。

2　問題Aの解答

$\boxed{1}$ 天使はつねに真実を述べ，悪魔はつねに嘘をつく．A，B は悪魔か天使であることはわかっているが，どちらかはっきりしない．A がこういった．「わたしが天使ならば，B も天使です．」この二人の正体は $\boxed{}$ である．

［選択肢］ 1．A，B ともに天使　　2．A は天使，B は悪魔
3．A は悪魔，B は天使　　4．A，B ともに悪魔

（'04 慶應大・総合政策）

命題「$p \Longrightarrow q$」は p が偽のとき真であることに注意．

解　命題 P：「A が天使ならば，B も天使である．」とおく．

A が悪魔とすると，P の仮定が偽となり，命題 P は真となる．悪魔である A が真実を述べたことになって不合理である．

したがって，A は天使であり，命題 P が真であることから，B も天使である．すなわち，A，B ともに天使である．■

命題「$p \Longrightarrow q$」は p が偽のとき真である．（命題「$p \Longrightarrow q$」は「p が真でかつ q が偽」のときに限って，”偽”となることに注意してほしい．）
命題「$p \Longrightarrow q$」の否定は　p かつ $\overline{q}$ である．

［注意］ 命題「$p \Longrightarrow q$」は p が偽のとき真と考える理由

(1°) p, q が成り立つような集合をそれぞれ P, Q とすると「$p \Longrightarrow q$」と「$P \subset Q$」は同値である．また，「$\phi \subset A$」はつねに成り立つとしている．

(2°) 命題とその対偶命題の真偽が一致する．（類題 9 参照）

(3°) (真偽表による)「$p \Longrightarrow q$」の真偽は「$\overline{p}$ または q」と一致するから，「$p \Longrightarrow q$」の否定は $\overline{\overline{p}\text{または}q}$ すなわち「p かつ $\overline{q}$」である．「$p \Longrightarrow q$」の否定は「$p \Longrightarrow \overline{q}$」ではないことに注意しよう．

実際に命題「$p \Longrightarrow q$」で p が偽のときを扱った大学入試問題を紹介する．

類題 9　次の文中の $\boxed{}$ に，適当な語句または文を入れよ．

1つの命題「A ならば B である」について，条件 A を満たすものが存在しないならばこの命題は $\boxed{}$．その理由は，次の通りである．1つの命題と，その $\boxed{}$ とは互いに同値であるから，次の命題を考えればよい．

「B で $\boxed{}$ ならば，A で $\boxed{}$ ．」

この命題の結論「A で $\boxed{}$」は $\boxed{}$ から，この命題は $\boxed{}$．ゆえに，もとの命題「A ならば B である」は $\boxed{}$ ．

上のようなことが実際にあてはまる例を考えよう．

次の命題を P と呼ぼう．

「$x\,,y$ が実数であって，$x^2+y^2+1=0$ であるならば $x=0$ または $y=0$ である．」

この P を，「A ならば B である」の形にして考えると，

A は「$\boxed{}$」であり，B は「$\boxed{}$」である．

A の否定は「$\boxed{}$」であり，B の否定は「$\boxed{}$」である．

したがって，P の逆，対偶は，それぞれ，次の通りである．

逆　:「$\boxed{}$」，対偶 :「$\boxed{}$」

P，P の逆，P の対偶のうち，（イ）初めに述べた命題の例になっているものは $\boxed{}$ であり，（ロ）真であるものは $\boxed{}$ である．（’69 京都大）

$\boxed{2}$　$a>1$ とし $P=\sqrt[3]{a+\dfrac{a+8}{3}\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\dfrac{a+8}{3}\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}}$ とおくとき

(1)　P は方程式 $x^3+(a-4)x-2a=0$ の解であることを証明せよ．

(2)　(1) をもちいて $P=2$ であることを証明せよ．（’65 新潟大）

解 (1)　$A=\dfrac{a+8}{3}\sqrt{\dfrac{a-1}{3}}$ とおくと $P=\sqrt[3]{a+A}+\sqrt[3]{a-A}$．

両辺を 3 乗すると，

$$\begin{aligned}P^3&=2a+3\sqrt[3]{a+A}\sqrt[3]{a-A}(\sqrt[3]{a+A}+\sqrt[3]{a-A})\\&=2a+3\sqrt[3]{a^2-A^2}P\ .\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} a^2 - A^2 &= a^2 - \frac{(a+8)^2}{9}\cdot\frac{a-1}{3} \\ &= -\frac{(a^3-12a^2+48a-64)}{27} \\ &= -\frac{(a-4)^3}{3^3}\,. \end{aligned}$$

よって，

$P^3 = 2a-(a-4)P$ となるから， P は方程式 $x^3+(a-4)x-2a=0$ の解である．

(2)　$x^3+(a-4)x-2a=0$ から $(x-2)(x^2+2x+a)=0$．

$a>1$ であるから $x^2+2x+a=0$ の判別式 $D/4=1-a<0$ で $x^2+2x+a=0$ は実数解をもたない．よって，3 次方程式の実数解は $x=2$ だけである．

したがって， $P=2$ である． ■

新潟大の問題で $a=7$ とおいたものが次の愛知教育大の問題である．

類題 10　実数 $\alpha=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ について考える．

(1)　α^3 を α の 1 次式で表せ．

(2)　α は整数であることを示せ．（'11 愛知教育大）

同様な問題が 2009 年に一橋大，東北大でも出題されている．

類題 11　$\alpha=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}, \beta=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ とおく．すべての自然数 n に対して，$\alpha^n+\beta^n$ は自然数であることを示せ．（'09 一橋大）

類題 12　実数の間の等式 $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2 \quad \cdots\cdots(*)$
を以下の手順に従って示せ．

(1)　係数が整数である x の 3 次方程式で $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が解になるものを 1 つ求めよ．

(2)　(1) で求めた 3 次方程式を解くことにより，等式 $(*)$ を証明せよ．

（'09 東北大）

$\boxed{3}$ $\triangle$ ABC において BC$=a$, CA$=b$，AB$=c$ とするとき
$(b-c)\cos^2 A = b\cos^2 B - c\cos^2 C$ ならば $\triangle$ ABC はどんな三角形か.

（'71 宇都宮大）

余弦定理 $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdots$ を用いて辺の関係に直して解くのはむずかしいかも.

解 $(b-c)\cos^2 A = b\cos^2 B - c\cos^2 C$ から

$$(b-c)(1-\sin^2 A) = b(1-\sin^2 B) - c(1-\sin^2 C)\,,$$

$$(b-c)\sin^2 A = b\sin^2 B - c\sin^2 C\,.$$

R を $\triangle$ ABC の外接円の半径として正弦定理を使うと

$$(b-c)\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = b\left(\frac{b}{2R}\right)^2 - c\left(\frac{c}{2R}\right)^2\,.$$

$$(b-c)a^2 = b^3 - c^3\,,$$

$$(b-c)\left\{a^2-(b^2+bc+c^2)\right\} = 0\,.$$

よって，

$$b=c \text{ または } a^2=b^2+c^2+bc\,.$$

$a^2=b^2+c^2+bc$ のときは $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ から $\cos A = -\dfrac{1}{2}$，
すなわち， $A=120^\circ$.

以上のことから， AB=AC の二等辺三角形か $A=120^\circ$ の三角形となる. ■

解答の途中に出てきた等式 $(b-c)\sin^2 A = b\sin^2 B - c\sin^2 C$ に関する問題が群馬大学で出題されている.

類題 13 $\triangle$ ABC において，BC$=a$, CA$=b$，AB$=c$ とおく.
$(b-c)\sin^2 A = b\sin^2 B - c\sin^2 C$ が成り立つとき，次の問いに答えよ.

(1) $(b-c)a^2=b^3-c^3$ を示せ.

(2) $\triangle$ ABC はどんな三角形か.

（'08 群馬大）

$\boxed{4}$　$a \geqq 2\,, b \geqq 2\,, c \geqq 2\,, d \geqq 2$ のとき $abcd > a+b+c+d$ であることを示せ．
（'65 名古屋大）

まず $a+b > a+b$ を示す方法もあるが，次のように処理することもできる．

解　$bcd \geqq 8\,,\ acd \geqq 8\,,\ abd \geqq 8\,,\ abc \geqq 8$ が成り立つから

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} = \frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc} \leqq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} < 1\ .$$

よって，$abcd > a+b+c+d$ である．■

$\boxed{5}$　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k} m^2\right)$ と $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{n-(k-1)\}\,k^2$ で定められるとき，$a_n = b_n\ (n = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots)$ となることを示せ．
（'11 群馬大）

$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を具体的に計算しなくても，$a_n = b_n$ は証明できる．

解

$$\begin{aligned}
a_n = &\quad 1^2 \\
&+ 1^2 + 2^2 \\
&+ 1^2 + 2^2 + 3^2 \\
&+ \cdots\cdots \\
&+ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2
\end{aligned}$$

(縦に加える)

$$\begin{aligned}
&= n \cdot 1^2 + (n-1)\cdot 2^2 + \cdots + \{n-(k-1)\}\cdot k^2 + \cdots + 1 \cdot n^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{n-(k-1)\}\,k^2 \\
&= b_n\ .
\end{aligned}$$

したがって，$a_n = b_n$ が成り立つ．■

$\boxed{6}$ 次の不等式を証明せよ.

(1) $a \geqq b\,,\, a' \geqq b'$ のとき

$$\frac{aa'+bb'}{2} \geqq \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a'+b'}{2}\,.$$

(2) $a \geqq b \geqq c\,,\, a' \geqq b' \geqq c'$ のとき

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{3} \geqq \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a'+b'+c'}{3}\,.$$

解 (1) $a \geqq b,\, a' \geqq b'$ のとき

$$\frac{aa'+bb'}{2} - \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a'+b'}{2} = \frac{1}{4}(a-b)(a'-b') \geqq 0\,.$$

よって,

$$\frac{aa'+bb'}{2} \geqq \frac{a+b}{2}\cdot\frac{a'+b'}{2}\,.$$

(2) $a \geqq b \geqq c,\, a' \geqq b' \geqq c'$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{aa'+bb'+cc'}{3} - \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a'+b'+c'}{3}\\ &= \frac{1}{9}\{2aa'+2bb'+2cc'-a(b'+c')-b(a'+c')-c(a'+b')\}\\ &= \frac{1}{9}\{(a-b)(a'-b')+(b-c)(b'-c')+(c-a)(c'-a')\} \geqq 0\,.\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{aa'+bb'+cc'}{3} \geqq \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a'+b'+c'}{3}\,.$$

■

一般化したチェビシェフの不等式

『$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n\,,\, b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき,不等式

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \geqq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}$$

が成り立つ.』については B 問題$\boxed{33}$参照.

$\boxed{7}$ 三角形 ABC の頂角 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c とするとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$60^\circ \leqq \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < 90^\circ$$

（'66 京都府医大）

解　$A+B+C=180^\circ$ を使うと，

$$\frac{A+B+C}{3} \leqq \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < \frac{A+B+C}{2},$$

すなわち

$$\frac{1}{3}(a+b+c)(A+B+C) \leqq aA+bB+cC < \frac{1}{2}(a+b+c)(A+B+C)$$

を証明すればよい．

(i)　左側の不等式の証明

$$\begin{aligned}
&3(aA+bB+cC)-(a+b+c)(A+B+C)\\
&=2(aA+bB+cC)-(aB+bA+bC+cB+cA+aC)\\
&=(a-b)(A-B)+(b-c)(B-C)+(c-a)(C-A).
\end{aligned}$$

三角形の辺と対角の大小の性質によって，$a \lesseqqgtr b$ のとき，$A \lesseqqgtr B$ であるから

$(a-b)(A-B) \geqq 0.$

同様にして，$(b-c)(B-C) \geqq 0$, $(c-a)(C-A) \geqq 0$ が成り立つから

$(a-b)(A-B)+(b-c)(B-C)+(c-a)(C-A) \geqq 0.$

すなわち，$3(aA+bB+cC)-(a+b+c)(A+B+C) \geqq 0$ となり，左側の不等式が成り立つ．

(ii)　右側の不等式の証明

三角形の二辺の和は他の辺より大きいから，$b+c-a>0$, $c+a-b>0$, $a+b-c>0$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(A+B+C)-2(aA+bB+cC)\\
&=(b+c-a)A+(c+a-b)B+(a+b-c)C>0.
\end{aligned}$$

すなわち，右側の不等式が成り立つ．　■

$\boxed{8}$ (1)　円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_0\,,y_0)$ における接線の方程式は

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ であることを証明せよ．

(2)　楕円 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_0\,,y_0)$ における接線の方程式は $\dfrac{(x_0-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\dfrac{(y_0-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$ であることを証明せよ．

曲線と直線の共有点が $(x_0\,,y_0)$ のみであることが簡単に示せる．

解　曲線と直線の共有点が $(x_0\,,y_0)$ のみであることを示せばよい．

(1)
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots①$$
$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2 \qquad \cdots\cdots②$$
とおく．$(x_0\,,y_0)$ は①上にあるから，
$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots③$$
が成り立つ．①+③$-2\times$② から
$$\{(x-a)-(x_0-a)\}^2+\{(y-b)-(y_0-b)\}^2=0\,,$$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0\,.$$
ゆえに，$x=x_0\,,y=y_0\,.$

(2)
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots①$$
$$\frac{(x_0-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\frac{(y_0-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots②$$
とおく．$(x_0\,,y_0)$ は①上にあるから，
$$\frac{(x_0-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y_0-\beta)^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots③$$
が成り立つ．①+③$-2\times$② から
$$\frac{\{(x-\alpha)-(x_0-\alpha)\}^2}{a^2}+\frac{\{(y-\beta)-(y_0-\beta)\}^2}{b^2}=0\,,$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=0\,.$$
ゆえに，$x=x_0\,,y=y_0\,.$

■

$\boxed{9}$ (1) $\tan\theta = t \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\cos 2\theta\,,\sin 2\theta$ を t を用いて表せ．

(2) t が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,,\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ の動く範囲を図示せよ．

(3) t が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\,,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ の動く範囲を図示せよ．

解 (1)
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1 + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{2t}{1+t^2}\,.$$

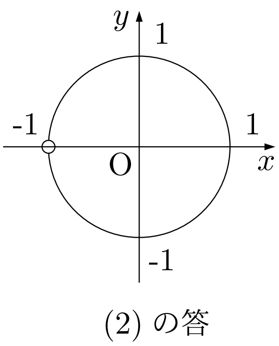
(2) $\tan\theta = t \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos 2\theta\,, \dfrac{2t}{1+t^2} = \sin 2\theta$ となる．

$\mathrm{P}(\cos 2\theta\,,\sin 2\theta)\quad(-\pi < 2\theta < \pi)$ の動く範囲は円 $x^2+y^2=1$ の $(-1\,,0)$ を除いた部分となる．

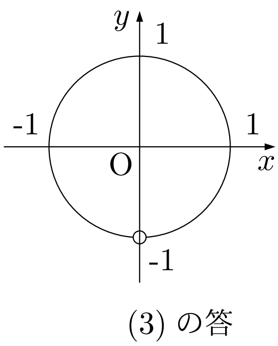
(3) (2) の点 P と点 Q は 直線 $y=x$ に関して対称であるから，点 Q の動く範囲は円 $x^2+y^2=1$ の $(0\,,-1)$ を除いた部分となる．

（別解）$\tan\theta = t \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $\mathrm{Q}(\sin 2\theta\,,\cos 2\theta)\quad(-\pi < 2\theta < \pi)$ となる．［Q の座標を $(\cos\phi\,,\sin\phi)$ の形に変形して，］

$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\theta\right)\,,\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right)\quad\left(-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - 2\theta < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ の動く範囲は円 $x^2+y^2=1$ の $(0\,,-1)$ を除いた部分となる．



(2) の答



(3) の答

■

$\boxed{10}$ 実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える．

(1) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $(t\,, t^2)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) t がすべての実数を動くとき，直線 l_t が通る点 $(x\,, y)$ の全体を図示せよ．

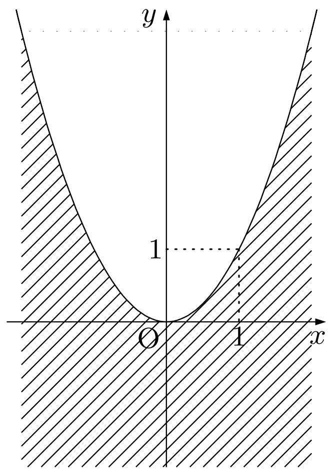
解 (1) $y = x^2$ のとき $y' = 2x$．

$(t\,, t^2)$ における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t)\,.$$

よって，$y = 2tx - t^2$．

(2) 直線 l_t は放物線 $y = x^2$ 上の点 $(t\,, t^2)$ における接線であるから，直線 l_t が通る点 $(x\,, y)$ の全体は，図の斜線部分．ただし，境界を含む．



■

$\boxed{11}$ 実数 t に対して xy 平面上の直線 $(1 - t^2)x - 2ty = 1 + t^2$ は，t の値によらずある曲線 C に接しているものとする．

(1) 曲線 C の方程式を求めよ．また，接点の座標を求めよ．

(2) t が $t \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ．

('02 神戸大（改題))

直線の方程式は $\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}x + \dfrac{-2t}{1 + t^2}y = 1$ と変形できる．$-t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，$\boxed{9}$(1) から $\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} = \cos\theta$，$\dfrac{-2t}{1 + t^2} = \sin\theta$ ．すると，直線の方程式は $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$ となるので，これは円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos\theta\,, \sin\theta)$ における接線の方程式を表している．したがって，(1) の答えは円 $x^2 + y^2 = 1$ とわかる．

ここでは，一般的な包絡線の求め方で解いてみる．

解 (1)　$l_t : (1-t^2)x - 2ty = 1 + t^2$ $\cdots\cdots$ ①

とおき，少しずらした

$l_{t+h} : \left\{1-(t+h)^2\right\}x - 2(t+h)y = 1 + (t+h)^2$ $\cdots\cdots$ ②

との交点を $C_t(h)$ とおけば，$\lim_{h \to 0} C_t(h) = C_t$ が C との接点になる．

$\dfrac{①-②}{h}$ から　$tx + y = -t$ $\cdots\cdots$ ③

を得る．①,③ を連立して解くと，接点は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$ となる．

(イ)　$x \fallingdotseq -1$ のとき，③ より $t = -\dfrac{y}{x+1}$．

これを① を変形した $x - 1 - 2ty = (x+1)t^2$ に代入すると

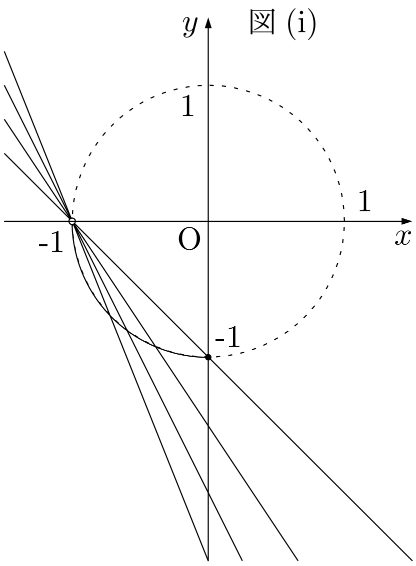
$x - 1 + 2y \cdot \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{y^2}{x+1}$．

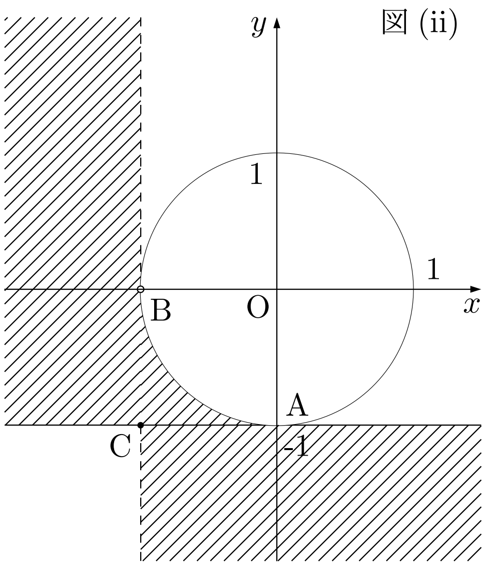
両辺に $x+1$ をかけた式 $x^2 - 1 + 2y^2 = y^2$ から $x^2 + y^2 = 1$．

(ロ)　$x = -1$ のとき，③ より $y = 0$．これらの値は① を満たさない．よって，

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ かつ } x \fallingdotseq -1$$

(2)　③ は定点 $(-1, 0)$ を通り傾き $-t$ の直線である．$t \geqq 1$ のとき，(1) で求めた接点の動く範囲は図 (i) のようになるから，直線の通過する範囲は図 (ii) の斜線部分となる．ただし，実線上の点と $\mathrm{C}(-1, -1)$ を含み，破線上の点と $\mathrm{B}(-1, 0)$ は含まない．





■

$\boxed{12}$ (1)　方程式 $x^2-(a+c)x+ac-b^2=0$ は実数解をもつことを示せ．

(2)　上の実数解を $\alpha\,,\beta$ $(\alpha \leqq \beta)$ とし，また

$$\gamma=\frac{a+c}{2}-\frac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{2(p^2+q^2)}$$

とするとき，つねに $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$ が成り立つかどうか調べよ．

(1)，(2) において，$a\,,b\,,c\,,p\,,q$ は任意の実数で，$p\,,q$ の少なくとも一方は 0 でないものとする．（'63 京都大）

$\boxed{11}$ と同様に $\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ の式に気づくと見通しがよくなる．

解 (1)　(省略)

(2)　$A=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $B=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ とおく．

$$\alpha=\frac{a+c}{2}-\frac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\,,\ \beta=\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha \leqq \gamma \leqq \beta &\iff -\sqrt{(a-c)^2+4b^2} \leqq \frac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{(p^2+q^2)} \leqq \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\\ &\iff \left|\frac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{(p^2+q^2)}\right| \leqq \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\\ &\iff |(a-c)A+2bB| \leqq \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\end{aligned}$$

$A=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $B=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$ に対して

$$A^2+B^2=\left(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right)^2+\left(\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)^2=\frac{(p^2+q^2)^2}{(p^2+q^2)^2}=1$$

が成り立つから，$A=\cos\theta\,,B=\sin\theta$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}&|(a-c)A+2bB| \leqq \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\\ &\iff |(a-c)\cos\theta+2b\sin\theta| \leqq \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\\ &\iff |\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\sin(\theta+\delta)| \leqq \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\quad (\text{つねに成立！})\end{aligned}$$

ただし，δ は $a-c=b=0$ のときは任意，$\sqrt{(a-c)^2+4b^2}>0$ のときは，$\mathrm{P}(2b\,,a-c)$ として $\delta=\angle POx$ とする．■

$\boxed{13}$ $x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4$ はいずれも正の数とする．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $\dfrac{x_1+x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1x_2}\,.$

(2) $\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\,.$

(3) $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \geqq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\,.$

解 (1) $\dfrac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1x_2} = \dfrac{1}{2}(x_1 - 2\sqrt{x_1x_2} + x_2) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqq 0\,.$

したがって，

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1x_2}\,.$$

(2) (1) の不等式から

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}\right)\\ &\geqq \frac{1}{2}(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4})\\ &\geqq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\,.\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\,.$$

(3) 3 つの正の数 $x_1\,, x_2\,, x_3$ に対して $x_4 = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$ とおくと，

$\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \dfrac{3x_4+x_4}{4} = x_4$ となるから，(2) の不等式は

$$x_4 \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\,.$$

両辺を 4 乗して

$$x_4^4 \geqq x_1x_2x_3x_4\,.$$

両辺を $x_4(>0)$ で割って

$$x_4^3 \geqq x_1x_2x_3$$

ゆえに，

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geqq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\,.$$

■

(3) において $x_4=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$ ではなく，$\boldsymbol{x_4=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}$ とおいて解くこともできる．

3 つの正の数 $x_1\,,x_2\,,x_3$ について，$x_4=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ とおくと，(2) から

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \geqq 4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \qquad (*)$$

が成り立つ．このとき， $x_1x_2x_3={x_4}^3$ となるから

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=\sqrt[4]{(x_1x_2x_3)x_4}=\sqrt[4]{x_4^3x_4}=\sqrt[4]{x_4^4}=x_4\,.$$

したがって， $(*)$ は $x_1+x_2+x_3+x_4 \geqq 4x_4$ から $x_1+x_2+x_3 \geqq 3x_4$ となる．
よって，

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geqq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

が成り立つ．

$\boxed{14}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a \geqq 1, b \geqq 1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right) \geqq 2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$$

(2) $a \geqq 1, b \geqq 1, c \geqq 1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right) \geqq 3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)$$

（’07 早稲田大・教育）

解 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$ ($x \geqq 1$) とおく．

(1) $\left(a^2-\dfrac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\dfrac{1}{b^2}\right)-2\left(ab-\dfrac{1}{ab}\right)$

$$=(a-b)^2-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^2=(a-b)^2-\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}$$

$$=(a-b)^2\left(1-\frac{1}{a^2b^2}\right)=\frac{(a-b)^2(ab-1)(ab+1)}{a^2b^2} \geqq 0 \qquad .$$

よって，

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right) \geqq 2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$$

が成り立つ．

(等号は $a=b$ または $ab=1$ のときであるから $a=b$ または $a=b=1$， すなわち， $a=b$ のときに限る．)

(2)　(1) の結果から

$$\boldsymbol{x \geqq 1, y \geqq 1} \textbf{ のとき } \boldsymbol{f(x)+f(y) \geqq 2f(\sqrt{xy})} \textbf{ が成り立つ．}$$

$a \geqq 1, b \geqq 1, c \geqq 1, d \geqq 1$ のとき

$$f(a)+f(b) \geqq 2f(\sqrt{ab})\,,\ f(c)+f(d) \geqq 2f(\sqrt{cd})\,.$$

また，$a \geqq 1, b \geqq 1, c \geqq 1, d \geqq 1$ のとき $\sqrt{ab} \geqq 1\,, \sqrt{cd} \geqq 1$ であるから

$$f(\sqrt{ab})+f(\sqrt{cd}) \geqq 2f\left(\sqrt{\sqrt{abcd}}\ \right) = 2f(\sqrt[4]{abcd})\,.$$

したがって，

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d) \geqq 2f(\sqrt{ab})+2f(\sqrt{cd}) \geqq 4f(\sqrt[4]{abcd})$$

が成り立つ．

$p \geqq 1, q \geqq 1, r \geqq 1$ のとき $s=\sqrt[3]{pqr}$　$(s \geqq 1)$ とおく．
$pqr=s^3$ を用いると $\sqrt[4]{pqrs}=\sqrt[4]{s^3 \cdot s}=s$ となるから

$$f(p)+f(q)+f(r)+f(s) \geqq 4f(\sqrt[4]{pqrs})$$

は

$$f(p)+f(q)+f(r)+f(s) \geqq 4f(s)\,,$$

$$f(p)+f(q)+f(r) \geqq 3f(s)\,,$$

よって，

$$f(p)+f(q)+f(r) \geqq 3f(\sqrt[3]{pqr})\,.$$

$a \geqq 1\,, b \geqq 1\,, c \geqq 1$ のとき $p=\sqrt{a^3}\,, q=\sqrt{b^3}\,, r=\sqrt{c^3}$ とおくと (2) の不等式になる．■

同様な解法で次の問題も解ける．

類題 14　A, B, C, D はいずれも 0 と π の間にあるとする．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(i)　$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D \leqq 4\sin\dfrac{A+B+C+D}{4}$.

(ii)　$\sin A+\sin B+\sin C \leqq 3\sin\dfrac{A+B+C}{3}$.

類題 15

(1)　実数 $x\,,y$ に対し　$(1+x)(1+y) \leqq \left(1+\dfrac{x+y}{2}\right)^2$

を示せ．また，等号が成立するのはどのようなときか．

(2)　$a\,,b\,,c\,,d$ を -1 以上の数とするとき

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \leqq \left(1+\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$$

を示せ．また，等号が成立するのはどのようなときか．　（'08 大阪市大）

(3)　$a\,,b\,,c$ を -1 以上の数とするとき

$$(1+a)(1+b)(1+c) \leqq \left(1+\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

を示せ．また，等号が成立するのはどのようなときか．

(3) で $d=\dfrac{a+b+c}{3}$ とおくと $d \geqq -1$ だから，(2) より

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \leqq \left(1+\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$$

$1+\dfrac{a+b+c+d}{4}=1+\dfrac{3d+d}{4}=1+d$ を用いると

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \leqq (1+d)^4 \qquad (*)$$

$1+d>0$ のとき

$$(1+a)(1+b)(1+c) \leqq \left(1+\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \qquad (**)$$

が成り立つ．

$1+d=0$ のとき $a=b=c=-1$ だから，不等式 $(**)$ は成り立つ．（等号が成立する．）

以上のことから，不等式 $(**)$ が成り立つ．また，等号が成立するのは $a=b=c$ のときに限る．

$\boxed{15}$ (1)　a が正の定数，n が正の整数ならば，$x \geqq 0$ において不等式

$ax^{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} > x$ が成り立つことを証明せよ．　('67 東京大)

(2)　(1) から a が正の定数，n が正の整数ならば，$x > 0$ において不等式 $ax^n + \dfrac{1}{\sqrt[n]{ax}} > 1$ が成り立つことがわかる．

それでは，a が正の定数，n が正の整数ならば，$x > 0$ において，不等式

$ax^n + \dfrac{1}{\sqrt[n]{ax}} \geqq m$ が成り立つような定数 $m(>1)$ の最大値を求めよ．

解 (1) (i)　$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} > x \geqq 0$ のとき $ax^{n+1} \geqq 0$ であるから，不等式

$ax^{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} > x$ は成り立つ．

(ii)　$x \geqq \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ のとき $ax^n \geqq 1$ から $ax^{n+1} \geqq x$ であるから，不等式

$ax^{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} > x$ は成り立つ．

(2)　$A = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ とおくと $A > 0$ で $a = \dfrac{1}{A^n}$ となる．

$$\begin{aligned} ax^n + \frac{1}{\sqrt[n]{ax}} \geqq m &\iff \frac{x^n}{A^n} + \frac{A}{x} \geqq m \\ &\iff t^n + \frac{1}{t} \geqq m \quad \left(t = \frac{x}{A}\right) \end{aligned}$$

したがって，$t^n + \dfrac{1}{t}$ の $t > 0$ における最小値が m となる．微分法で最小値を求めることができるが，ここでは相加平均・相乗平均の不等式を使う．

$$\begin{aligned} t^n + \frac{1}{t} = t^n + \frac{1}{nt} + \frac{1}{nt} + \cdots\cdots + \frac{1}{nt} &\geqq (n+1)\sqrt[n+1]{t^n \cdot \left(\frac{1}{nt}\right)^n} \\ &= \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}. \end{aligned}$$

等号は $t^n = \dfrac{1}{nt}$ すなわち $t = n^{-\frac{1}{n+1}}$ のときに成り立つ．

よって，$m = (n+1)n^{-\frac{n}{n+1}}$ ．　■

$\boxed{16}$ 三角形 ABC において，3 つの辺の間に $2b = a + c$ なる関係があるとき，

(1) $2\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{C-A}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ．

解 (1) R を外接円の半径とし，正弦定理を用いると

$$\begin{aligned}2b-(a+c) &= 2R\{2\sin B-(\sin C+\sin A)\}\\ &= 2R\left(4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}-2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}\right)\\ &= 2R\left(4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}-2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}\right)\\ &= 4R\cos\frac{B}{2}\left(2\sin\frac{B}{2}-\cos\frac{C-A}{2}\right)=0\,.\end{aligned}$$

$\cos\dfrac{B}{2} > 0$ より $2\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{C-A}{2}$ が成り立つ．

(2) $2\sin\dfrac{B}{2} = \cos\dfrac{C-A}{2}$ から $2\sin\dfrac{\pi-(A+C)}{2} = \cos\dfrac{C-A}{2}$.

ゆえに，

$$2\cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A-C}{2}\,.$$

加法定理を用いて展開すると，

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\,.$$

よって，

$$3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\,.$$

両辺を $3\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ で割り，$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$ を得る． ■

次の問題も $2\sin\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{C-A}{2}$ を使うことになるだろう．

類題 16　△ ABC において，∠A , ∠B , ∠C の大きさと対辺の長さをそれぞれ A, B, C および a, b, c で表す．

(1)　$\sin\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{A+C}{2}$ および $\cos\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{A+C}{2}$ が成立することを示せ．

(2)　$a+c=2b$ を満たすとき，$\sin A+\sin C=2\sin B$ が成立することを示せ．

(3)　$a+c=2b$ を満たすとき，$\sin A+\sin C=2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}$ を用いて，$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ．　（'11 静岡大）

次の問題の (2) はノーヒントであるが，辺の関係に直すのかそれとも角の関係に直すのが良いのか？

類題 17　△ ABC において $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{CA}$, $c=\mathrm{CA}$ と表す．

(1)　$\dfrac{\tan A}{a^2}=\dfrac{\tan B}{b^2}$ が成り立つ△ ABC はどのような三角形か．

(2)　$b=\dfrac{a+c}{2}$ が成り立つ△ ABC に対し $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ．

（'03 横浜国大・工）

$\boxed{17}$　$a\cos B=b\cos C=c\cos A$ が成り立つ△ ABC はどんな三角形か．

辺の関係に直すとてこづるかもしれない．

解　たとえば $A\geqq 90^\circ$ と仮定すると $\cos A\leqq 0$ が成り立つ．$a\cos B=b\cos C=c\cos A\leqq 0$ から $\cos B\leqq 0, \cos C\leqq 0$．このことから $B\geqq 90^\circ$, $C\geqq 90^\circ$ だから $A+B+C\geqq 270^\circ$ となり $A+B+C=180^\circ$ に反する．よって A, B, C は鋭角である．

$a\geqq b\geqq c$ のとき $90^\circ>A\geqq B\geqq C$ から $\cos C\geqq\cos B\geqq\cos A>0$ となる．
したがって，$b\cos C\geqq c\cos A$ が成り立ち，等号が成り立つのは $a=b=c$ のときである．

他の場合も同様であるから，△ ABC は正三角形となる．　■

$\boxed{18}$　n を正の整数とする．3 次方程式 $x^3+3nx^2-(3n+2)=0$ について次の問いに答えよ．

(1)　すべての正の整数 n について，上の 3 次方程式は正の解をただ 1 つしかもたないことを証明せよ．

(2)　各正の整数 n に対して，上の 3 次方程式の正の解を a_n とする．極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．（'08 弘前大・医，理工）

2 つのグラフを考えて解いてみる．

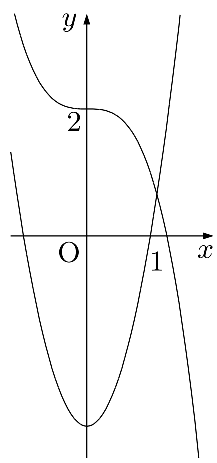
解 1　方程式を $2-x^3=3n(x^2-1)$ と変形し，

$$y=2-x^3 \qquad \cdots\cdots ①$$

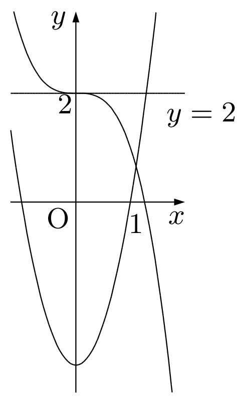
と

$$y=3n(x^2-1) \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく．



(1)　$x>0$ の範囲において，① と② のグラフの共有点は 1 つだけであるから，すべての正の整数 n について，上の 3 次方程式は正の解をただ 1 つしかもたない．



(2)　グラフから a_n は ② のグラフと $y=2$ の第 1 象限における共有点の x 座標 b_n より小さい．

$3n(x^2-1)=2$ を解くと $x=\pm\sqrt{1+\dfrac{2}{3n}}$．

よって $b_n=\sqrt{1+\dfrac{2}{3n}}$，　$a_n<\sqrt{1+\dfrac{2}{3n}}$．

また，グラフより $1<a_n$ であるから $1<a_n<\sqrt{1+\dfrac{2}{3n}}$．

ゆえに $\lim_{n\to\infty} a_n=1$．

■

極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ が存在すると仮定する．$a_n^3+3na_n^2-(3n+2)=0$ の両辺を n

で割った式

$$\frac{a_n^3}{n}+3a_n^2-3-\frac{2}{n}=0$$

で $n\to\infty$ とすれば

$$3\alpha^2-3=0\,.$$

$\alpha\geqq 0$ であるから $\alpha=1$ となる．したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ を示すことが目標となる．

解 2　$f(x)=x^3+3nx^2-(3n+2)$ とおくと $f'(x)=3x^2+6nx\,.$

(1)　$x>0$ で $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加関数である．
$f(1)=-1<0\,,f(2)=9n+6>0$ より $f(x)=0$ の正の解はただ 1 つしかない．

(2)　(1) から $1<a_n<2$．これを使うと $\dfrac{1}{n}<\dfrac{a_n^3}{n}<\dfrac{8}{n}$．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}=0$ だから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{n}=0$ を得る．
ところで，$a_n^3+3na_n^2-(3n+2)=0$ の両辺を n で割った式

$$\frac{a_n^3}{n}+3a_n^2-3-\frac{2}{n}=0$$

を変形すると

$$a_n^2=1+\frac{2}{3n}-\frac{a_n^3}{3n}\,,$$

$a_n>0$ だから，$a_n=\sqrt{1+\dfrac{2}{3n}-\dfrac{a_n^3}{3n}}\,.$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{n}=0$ 等を使うと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1\,.$ ■

［注意］(2) において，　$a_n>1$ と $a_n^2=1+\dfrac{2}{3n}-\dfrac{a_n^3}{3n}$ から

$$1<a_n=\sqrt{1+\frac{2}{3n}-\frac{a_n^3}{3n}}<\sqrt{1+\frac{2}{3n}}$$

と評価することができる．(これは，解 1 (2) で用いた不等式)
　また，$a_n^2(a_n+3n)=3n+2$ を用いて $a_n^2=\dfrac{3n+2}{a_n+3n}<\dfrac{3n+2}{1+3n}$　$(\because a_n>1)$ から $1<a_n<\sqrt{\dfrac{3n+2}{3n+1}}$ が成り立つ．これから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ を示すこともできる．

$\boxed{19}$ n を 2 以上の自然数とする．$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ および $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ を満足する数列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ および $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が与えられている． $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を並べかえて得られるどのような数列 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ に対しても

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ． （'87 東京大）

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leqq \sum_{j=1}^{n} z_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} x_j z_j$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \geqq \sum_{j=1}^{n} x_j z_j \quad \left(\because \ \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \right)$$

となり $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \geqq \sum_{j=1}^{n} x_j z_j$ を証明すればよい (問題 B$\boxed{33}$(c)(1) 参照)．しかし，これでは出題者の意図がわからないので，直接 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2$ を証明したい．

解 数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 2$ のとき

(1) $z_1 = y_1, z_2 = y_2$ のとき $(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$．

(2) $z_1 = y_2, z_2 = y_1$ のとき

$$\begin{aligned}
&(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 \\
&= (x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 \\
&= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 \\
&= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\
&\geqq (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \quad (\because \quad x_1 \geqq x_2\,,\, y_1 \geqq y_2)\,.
\end{aligned}$$

(1)，(2) から $\displaystyle\sum_{j=1}^{2}(x_j - y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{2}(x_j - z_j)^2$ が成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定して，$n = k + 1$ のときを考える．

(1)　$z_{k+1}=y_{k+1}$ のとき $z_1,z_2,\dots,z_k$ は $y_1,y_2,\dots,y_k$ を並べかえたものだから，

$\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(x_j-z_j)^2 \geqq \sum_{j=1}^{k}(x_j-y_j)^2$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1}(x_j-z_j)^2 &= \sum_{j=1}^{k}(x_j-z_j)^2+(x_{k+1}-z_{k+1})^2\\ &= \sum_{j=1}^{k}(x_j-z_j)^2+(x_{k+1}-y_{k+1})^2\\ &\geqq \sum_{j=1}^{k}(x_j-y_j)^2+(x_{k+1}-y_{k+1})^2=\sum_{j=1}^{k+1}(x_j-y_j)^2\,.\end{aligned}$$

(2)　$z_l = y_{k+1}$ $(l \fallingdotseq k+1)$ のとき，$z_1,z_2,\dots,z_{l-1},z_{k+1},z_{l+1},\dots,z_k$ は $y_1,y_2,\dots,y_k$ を並べかえたものだから，仮定から

$$\sum_{j=1}^{l-1}(x_j-z_j)^2+(x_l-z_{k+1})^2+\sum_{j=l+1}^{k}(x_j-z_j)^2 \geqq \sum_{j=1}^{k}(x_j-y_j)^2$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k+1}(x_j-z_j)^2\\ &=\sum_{j=1}^{l-1}(x_j-z_j)^2+(x_l-y_{k+1})^2+\sum_{j=l+1}^{k}(x_j-z_j)^2+(x_{k+1}-z_{k+1})^2\\ &=\sum_{j=1}^{l-1}(x_j-z_j)^2+(x_l-z_{k+1})^2+\sum_{j=l+1}^{k}(x_j-z_j)^2+(x_{k+1}-y_{k+1})^2\\ &\quad -(x_l-z_{k+1})^2-(x_{k+1}-y_{k+1})^2+(x_l-y_{k+1})^2+(x_{k+1}-z_{k+1})^2\\ &\geqq \sum_{j=1}^{k}(x_j-y_j)^2+(x_{k+1}-y_{k+1})^2\\ &\quad -(x_l-z_{k+1})^2-(x_{k+1}-y_{k+1})^2+(x_l-y_{k+1})^2+(x_{k+1}-z_{k+1})^2\\ &=\sum_{j=1}^{k+1}(x_j-y_j)^2+2(x_l-x_{k+1})(z_{k+1}-y_{k+1})\,.\end{aligned}$$

$z_l = y_{k+1}$ $(l \fallingdotseq k+1)$ と $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_{k+1}$　$(z_{k+1} \fallingdotseq y_{k+1})$ より $z_{k+1} \geqq y_{k+1}$.

また，$z_l = y_{k+1}$ $(l \neq k+1)$ から $l \leqq k$ であるから $x_l \geqq x_{k+1}$.

よって　$2(x_l - x_{k+1})(z_{k+1} - y_{k+1}) \geqq 0$ から

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1}(x_j - z_j)^2 &\geqq \sum_{j=1}^{k+1}(x_j - y_j)^2 + 2(x_l - x_{k+1})(z_{k+1} - y_{k+1}) \\ &\geqq \sum_{j=1}^{k+1}(x_j - y_j)^2\end{aligned}$$

となり，$n = k+1$ のときも不等式は成り立つ．

(iii)　(i) , (ii) から 2 以上の全ての自然数 n に対して不等式は成り立つ．■

類題が東北大学で出題されている．

類題 18　n を 2 以上の自然数とする．$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ は $x_1 > x_2 \cdots > x_n, y_1 > y_2 > \cdots > y_n$ を満たす実数とする．$z_1, \ldots, z_n$ は $y_1, \ldots, y_n$ を任意に並べ替えたものとするとき，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ．

（'10 東北大・後期）

$\boxed{20}$　ある小学校の教論が児童から次のような「発見」の報告を受けた．

「私は分数の大小関係を判定する新方法を発見しました．分数の不等式 $\dfrac{a}{c} > \dfrac{d}{b}$ が成立するかどうかを判定するためには，$a+b > c+d$ が成立するかどうかを確かめればよいのです．例えば，$\dfrac{2}{3} > \dfrac{3}{5}$ が成り立つことは $2+5 > 3+3$ であることからわかります．」

これに対して，教論はその場で正しいのか間違っているのかの判定は下さず，家に帰ってから実験してみた．一晩の考察の末，次のような「結論」に達した．

「この方法は 90 %の整数の組に対しては正しいが，残り 10 %の整数の組に対して間違っている．」

このことについて，以下の❶および❷に答えよ．

❶（解答用紙（省略）に解答せよ．これらは 2 枚とも試験開始 60 分後に回収する．）

(1)　この児童の「発見」は正しいか．

(2)　この教論はこの数値 (90 %，10 %) をどのような方法で見つけただろうか．その方法を自由に推測して，それを実行せよ．

(3)　この 10 %といわれている数値を数学的に明確なものとするには，どのように考え，何を計算したらよいだろうか．あなたの考えを述べ，計算すべきものが何であるかを（できれば数式で）書き表せ．

❷　この教論の「結論」が数学的にどの程度正しいものであるかは，次のように考えることもできる．

＜注意＞　以下は一つの考え方である．前問❶の (3) の「考え方」は以下の方法以外にも多数ありうる．

問題　与えられた正の整数 N に対して，1 以上 N 以下の 4 つの整数 a, b, c, d からなる (a, b, c, d) の全体を考える．このような組のうちで，$a+b-c-d$ と $ab-cd$ の符号（すなわち，$+, -, 0$ のいずれか）が相異なるものの総数を V_N で表し，$P_N = \dfrac{V_N}{N^4}$ とおく．$N \to \infty$ のときの P_N の極限値を求めよ．

以下は，上の問題に対する解答の試みの一例である．

(1)　文中の$\boxed{}$に適切な数値や数式を，解答用紙のそれぞれの欄（省略）に記入せよ．

2 つの数 $a+b-c-d$ と $ab-cd$ の符号が相異なるとすると，

場合 1　$a+b-c-d \geqq 0$ かつ $ab-cd \leqq 0$ で，2 つの等号が同時には成立しない．

場合 2　$a+b-c-d \leqq 0$ かつ $ab-cd \geqq 0$ で，2 つの等号が同時には成立しない．

のいずれかが成り立つはずである．場合 1 と場合 2 とは両立せず，またそれぞれの場合の数は相等しい．そこで場合 1 だけを考察しよう．場合 1 の条件は次のように書き換えられる．

$\boxed{\text{ア}} \leqq d \leqq \boxed{\text{イ}}$　ただし，2 つの等号が同時には成立しない．$\cdots\cdots$①

このことから， c は次の不等式を満たさなければならないことがわかる．

$c^2 + \boxed{\text{ウ}}c + \boxed{\text{エ}} < 0$　$\cdots\cdots$②

左辺を因数分解して，$\left(c - \boxed{\text{オ}}\right)\left(c - \boxed{\text{カ}}\right) < 0$　$\cdots\cdots$③

これより，場合 1 では $a=b$ は起こらないことがわかるから，

場合 1-1 $a<b$　　場合 1-2 $a>b$

のいずれかが成り立っているはずである．それぞれの場合の数は相等しいので，場合 1-1 だけを考察しよう．

式③ より，$\boxed{\text{キ}} < c < \boxed{\text{ク}}$ $\cdots\cdots$④

また，最初の状況設定により， $1 \leqq a \leqq N$, $1 \leqq b \leqq N$ $\cdots\cdots$⑤

以上から，V_N を求めるには，3 つの式① ，④， ⑤を満たす整数の組 (a,b,c,d) の個数を考え，それを $\boxed{\text{ケ}}$ 倍すればよいことがわかる．この方法を $N=3,4,5$ の場合に適用すると，

$$V_3 = \boxed{\text{コ}}, V_4 = \boxed{\text{サ}}, V_5 = \boxed{\text{シ}}$$

(2)　V_N を N の式で表すために，まず a,b,c を式④，⑤ を満たすよう固定して考えよう．このとき，① を満たす d の個数 D は次のように近似できる（小数部分は極限に影響しないので気にしなくてよい）．

$$D \fallingdotseq a+b-c-\frac{ab}{c} \quad \cdots\cdots⑥$$

そこで，次の各級数の和を計算せよ．

$$S_c = \sum_{a=1}^{c-1}\left(a+b-c-\frac{ab}{c}\right) \ (b,c \text{ の式となる}),$$

$$T_b = \sum_{c=2}^{b-1} S_c\,,\ U_N = \sum_{b=3}^{N} T_b$$

(3)　$N \to \infty$ のときの P_N の極限値を求めよ．

『必要ならば，次の公式を用いてよい．

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)\,,\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\,, \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$』

（'97 愛知教育大）

[解答] ❶　(省略)

❷　与えられた正の整数 N に対して，1 以上 N 以下の 4 つの整数 a, b, c, d からなる (a, b, c, d) の全体を考える．このような組のうちで，$a+b-c-d$ と $ab-cd$ の符号（すなわち，$+, -, 0$ のいずれか）が相異なるものの総数を V_N で表し，$P_N = \dfrac{V_N}{N^4}$ とおく．$N \to \infty$ のときの P_N の極限値を求めよ．

以下は，上の問題に対する解答の試みの一例である．

(1)　文中の■に適切な数値や数式を，解答用紙のそれぞれの欄（省略）に記入せよ．

2 つの数 $a+b-c-d$ と $ab-cd$ の符号が相異なるとすると，

場合 1　$a+b-c-d \geqq 0$ かつ $ab-cd \leqq 0$ で，2 つの等号が同時には成立しない．

場合 2　$a+b-c-d \leqq 0$ かつ $ab-cd \geqq 0$ で，2 つの等号が同時には成立しない．

のいずれかが成り立つはずである．場合 1 と場合 2 とは両立せず，またそれぞれの場合の数は相等しい．そこで場合 1 だけを考察しよう．場合 1 の条件は次のように書き換えられる．

$\dfrac{ab}{c} \leqq d \leqq a+b-c$　ただし，2 つの等号が同時には成立しない．$\cdots\cdots$①

このことから，$\dfrac{ab}{c} < a+b-c$　　$c^2-(a+b)c+ab<0$ $\cdots\cdots$②

左辺を因数分解して，$(c-a)(c-b)<0$ $\cdots\cdots$③

これより，場合 1 では $a=b$ は起こらないことがわかるから，

場合 1-1 $a<b$　　場合 1-2 $a>b$

のいずれかが成り立っているはずである．それぞれの場合の数は相等しいので，場合 1-1 だけを考察しよう．

式③ より，$a < c < b \cdots\cdots$ ④

また，最初の状況設定により， $1 \leqq a \leqq N\,,\, 1 \leqq b \leqq N \cdots\cdots$ ⑤

以上から，V_N を求めるには，3 つの式① ，④， ⑤を満たす整数の組 (a, b, c, d) の個数を考え，それを 4 倍すればよいことがわかる．この方法を $N = 3, 4, 5$ の場合に適用すると，

$$V_3 = 4\,, V_4 = 20\,, V_5 = 52$$

(2) V_N を N の式で表すために，まず a, b, c を式④，⑤ を満たすよう固定して考えよう．このとき，① を満たす d の個数 D は

$$\left[a + b - c - \frac{ab}{c}\right]$$

で表される．小数点以下を無視すると次のように近似できる（小数部分は極限に影響しないので気にしなくてよい）．

$$D \fallingdotseq a + b - c - \frac{ab}{c} \quad \cdots\cdots ⑥$$

④，⑤から $1 \leqq a < c < b \leqq N$

a の動き得る範囲は $1 \leqq a \leqq c - 1$,

c の動き得る範囲は $2 \leqq c \leqq b - 1$,

b の動き得る範囲は $3 \leqq b \leqq N - 1$.

したがって，(a, b, c, d) の総数は

$$\sum_{b=3}^{N} \sum_{c=2}^{b-1} \sum_{a=1}^{c-1} \left(a + b - c - \frac{ab}{c}\right)$$

である．

（$S_c\,,T_b\,,U_n$ を別々に求めないで V_n の近似式を求めていることに注意）

$$\sum_{b=3}^{N}\sum_{c=2}^{b-1}\sum_{a=1}^{c-1}\left(a+b-c-\frac{ab}{c}\right)$$
$$=\sum_{b=3}^{N}\sum_{c=2}^{b-1}\left\{\left(1-\frac{b}{c}\right)\cdot\frac{(c-1)c}{2}+(b-c)(b-1)\right\}$$
$$=\sum_{b=3}^{N}\sum_{c=1}^{b-1}\frac{-1}{2}\left\{c^2-(b+1)c+b\right\}$$
$$=\sum_{b=3}^{N}\frac{-1}{2}\left\{\frac{(b-1)b(2b-1)}{6}-(b+1)\cdot\frac{(b-1)b}{2}+b(b-1)\right\}$$
$$=\sum_{b=3}^{N}\frac{1}{12}b(b-1)(b-2)=\frac{1}{12}\sum_{b=1}^{N}b(b-1)(b-2)$$
$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}(N+1)N(N-1)(N-2)=\frac{1}{48}(N+1)N(N-1)(N-2)\,.$$

ここでは，

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

であることを用いた．

したがって，

$$V_N=\frac{1}{12}(N+1)N(N-1)(N-2)$$

と近似できる．

(3)　(2) の結果を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}P_N&=\lim_{N\to\infty}\frac{V_N}{N^4}\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\\&=\frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

■

$\boxed{21}$ n を自然数とする．次の 3 つの不等式 (1)，(2)，(3) をすべて満たす自然数の組 $(a\,,b\,,c\,,d)$ はいくつあるか．n を用いてあらわせ．

(1) $1 \leqq a < d \leqq n$ (2) $a \leqq b < d$ (3) $a < c \leqq d$

（'04 京都大・理）

解 条件 (1) から $n>1$ としてよい．

$a\,,d$ を固定すると，b は $a\,,a+1\,,a+2\,,\cdots\cdots\,,d-1$ の $(d-1)-a+1=d-a$ 通り，c は $a+1\,,a+2\,,\cdots\cdots\,,d$ の $d-a$ 通りの値をとることができる．
d の動きうる範囲は $a+1 \leqq d \leqq n$，a の動きうる範囲は $1 \leqq a \leqq n-1$ である．
したがって，(a,b,c,d) の総数は

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{d=a+1}^{n}(d-a)^2 &= \sum_{a=1}^{n-1}\{1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-a)^2\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{6}(n-a)(n-a+1)\{2(n-a)+1\} \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \quad (m=n-a) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{6}m(m+1)(m-1+m+2) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{6}(m-1)m(m+1)+\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)\right\} \\
&= \frac{1}{24}\{(n-2)(n-1)n(n+1)+(n-1)n(n+1)(n+2)\} \\
&= \frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1)\,.
\end{aligned}$$

ここでは，

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

であることを用いた． ■

$\boxed{22}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a_1\,,a_2,\ldots,a_n\,,b_1\,,b_2,\ldots,b_n$ が実数で，$b_1>0\,,b_2>0\,,\ldots,b_n>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\,.$$

(2) $x_1>0\,,x_2>0\,,\cdots,x_n>0\,,x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ のとき

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2$$

の最小値を求めよ。

解 1 (1) 数学的帰納法で証明する．

(i) $n=2$ のとき

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}-\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}=\frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{b_1b_2(b_1+b_2)}\geqq0$$

から不等式は成り立つことがわかる．

等号成立は，$a_1b_2-a_2b_1=0$ すなわち，$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ のときに限る．

(ii) n のとき成り立つと仮定して，$n+1$ のときを考える．

$a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1}\,,b_1,b_2,\ldots,b_n,b_{n+1}$ が実数で，$b_1,b_2,\ldots,b_n,b_{n+1}>0$ とすると，仮定から

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\,.$$

両辺に $\dfrac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}$ を加えると

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}\geqq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}\,.$$

また，(i) より $A_1\,,A_2\,,B_1\,,B_2$ が実数で，$B_1>0\,,B_2>0$ のとき

$$\frac{A_1^2}{B_1}+\frac{A_2^2}{B_2}\geqq\frac{(A_1+A_2)^2}{B_1+B_2}$$

が成り立つから，

$A_1=a_1+a_2+\cdots+a_n\,,\,A_2=a_{n+1}\,,\,B_1=b_1+b_2+\cdots+b_n\,,\,B_2=b_{n+1}$ とお

くと

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}} \geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}}.$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}} &\geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}} \\ &\geqq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}}\end{aligned}$$

より $n+1$ のときも不等式は成り立つ.
等号成立は, $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ かつ $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ のときだから容易に $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ のときであることがわかる.[*1]

(iii) (i), (ii) よりすべての $n \geqq 2$ について不等式は成り立ち，等号は

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

のときに限る.

(2) $g(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 \quad (0<x<1)$ とおくと，$g'(x)=2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$y=g(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{(n^2+1)^2}{n^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{2(1-n^4)}{n}x+\frac{3n^4+2n^2-1}{n^2}$$

となるから，$y=g(x)$ との上下関係を調べる。

$$\begin{aligned}g(x)-\frac{2(n-n^5)x+3n^4+2n^2-1}{n^2} &= \frac{n^2x^4+2(n^5-n)x^3-(3n^4-1)x^2+n^2}{n^2x^2} \\ &= \frac{(nx-1)^2(x^2+2n^3x+n^2)}{n^2x^2} \geqq 0\end{aligned}$$

したがって

$$g(x) \geqq \frac{2(n-n^5)x+3n^4+2n^2-1}{n^2}$$

[*1] $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$ とおき，$a_i=kb_i$ を $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ に代入すればよい.

が成り立つから

$$\begin{aligned} g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n) &\geqq \frac{2(n-n^5)(x_1+x_2+\cdots+x_n)+n(3n^4+2n^2-1)}{n^2} \\ &= \frac{2(n-n^5)+n(3n^4+2n^2-1)}{n^2} = \frac{(n^2+1)^2}{n}\,. \end{aligned}$$

よって，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ のとき，最小値 $\dfrac{(n^2+1)^2}{n}$ をとる． ■

解 2 (1)　コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned} &(b_1+b_2+\cdots+b_n)\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\right) \\ &\geqq \left(\sqrt{b_1}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\sqrt{b_2}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\sqrt{b_n}\cdot\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2 \\ &= (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\,. \end{aligned}$$

等号は

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

のときに限る．

(2)　(1) の不等式から

$$\begin{aligned} &\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \\ &= \frac{\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2}{1}+\frac{\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2}{1}+\cdots+\frac{\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2}{1} \\ &\geqq \frac{\left(x_1+\frac{1}{x_1}+x_2+\frac{1}{x_2}+\cdots+x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2}{1+1+\cdots+1} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)^2}{n}\,. \end{aligned}$$

ここで，(1) の不等式より

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1^2}{x_1}+\frac{1^2}{x_2}+\cdots+\frac{1^2}{x_n}\geqq\frac{(1+1+\cdots+1)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=n^2$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
&\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \\
&=\frac{\left(1+\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)^2}{n} \\
&\geqq \frac{(1+n^2)^2}{n}\,.
\end{aligned}$$

等号は，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ のときである．

よって，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ のとき，最小値 $\dfrac{(n^2+1)^2}{n}$ をとる． ■

解 3 (2)　$g(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$　$(0<x<1)$ とおくと，$g''(x)=2\left(1+\dfrac{3}{x^4}\right)>0\,.$

$g(x)$ は下に凸であるから，Jensen の不等式より

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)}{n}\geqq g\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

ゆえに，$g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)\geqq\dfrac{(n^2+1)^2}{n}\,.$

よって，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ のとき，最小値 $\dfrac{(n^2+1)^2}{n}$ をとる． ■

$\boxed{22}$(2) は次の早稲田大の問題を一般化したものである．

(1)　$p>0\,,q>0\,,p+q=1$ のとき，関数 $f(x)=x^2$ について次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(px_1+qx_2)\leqq pf(x_1)+qf(x_2)\,.$$

(2)　$a>0\,,b>0\,,a+b=1$ のとき，(1) を用いて次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqq\frac{25}{2}$$

(早稲田大)

この問題は，誘導がないと解きにくいかもしれない．

3 問題B

$\boxed{1}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a) $\triangle$ ABC の内心と外心との距離を d ，外接円と内接円の半径をそれぞれ $R\,,r$ とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1) $d^2 = R^2 - 2Rr$.

(2) $R \geqq 2r$ であり等号は正三角形のときにのみ成り立つ．

(b) $\triangle$ ABC の内心を I，外心を O とし，$\triangle$ ABC の外接円と内接円の半径をそれぞれ $R\,,r$ とする．

(1) $\dfrac{abc}{a+b+c} = 2Rr$ が成り立つことを示せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $a\,,b\,,c$ を用いて表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2$ を $R\,,r$ を用いて表せ．

(4) $R \geqq 2r$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a) $\triangle$ ABC の外接円と内接円の半径をそれぞれ $R\,,r$ とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1) $\dfrac{r}{R} = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

(2) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{1}{8}$.

(3) $R \geqq 2r$ であり等号は正三角形のときにのみ成り立つ．

(b) $A\,,B\,,C$ を三角形の内角とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} \leqq \dfrac{1}{2}\left(1 - \sin\dfrac{C}{2}\right)$.

(2) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{1}{8}$.

(3) $\sin A + \sin B + \sin C \geqq 4\sin A\sin B\sin C$.

(4) 三角形の外接円と内接円の半径をそれぞれ $R\,,r$ とすると，$R \geqq 2r$ であり等号は正三角形のときにのみ成り立つ．（’97 滋賀医大）

$\boxed{3}$　次の (a) または (b) または (c) の問いに答えよ．

(a) (1)　n が 2 より大きい整数のとき， $(n!)^2 > n^n$ であることを証明せよ．

（'69 大学への数学　学力コンテスト）

(2)　n が 2 以上の自然数のとき， $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ．

（'70 京都大（改題））

(3)　n が 2 以上の自然数のとき，$n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ を証明せよ．

('70 大阪電気通信大 (改題))

(b) (1)　数学的帰納法を用いて， n が 2 より大きい整数のとき，$(n!)^2 > n^n$ を証明せよ．　（'69　大学への数学　学力コンテスト (改題)）

(2)　数学的帰納法によって，$\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ．ここに n は 2 以上の整数とする．　（'70 京都大）

(3)　数学的帰納法を用いて， n が 2 以上の自然数のとき，

$n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ を証明せよ．　('70 大阪電気通信大 (改題))

(c) (1) (i)　$x \geqq 1$ のとき $x\log x \geqq (x-1)\log(x+1)$ を示せ．

(ii)　自然数 n に対して $(n!)^2 \geqq n^n$ であることを証明せよ．

（'01 名古屋市立大）

(2)　相異なる n 個の正数の相加平均は，その相乗平均より大きいことを用いて $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ．

(3) (A)　次の級数の和を求めよ．$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3$

(B)　相異なる n 個の正数の相加平均は，その相乗平均より大きいことを用いて $n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ を証明せよ．

('70 大阪電気通信大)

$\boxed{4}$ 次の等式を証明せよ．ただし，$m\,,n$ は 0 以上の整数，$\alpha\,,\beta$ は実数とし，

$I(m\,,n)=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ とおく．

(1) $n \geqq 1$ のとき，$I(m,n)=-\dfrac{n}{m+1}I(m+1\,,n-1)$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

$\boxed{5}$ $m\,,n$ は負でない整数とする．2 つの連続関数 $f(x)\,,g(x)$ に対して，

$(f*g)(x)$ を $(f*g)(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt$ で定義する．

(1) $f(x)=x^m\,,g(x)=x^n$ とするとき

$(f*g)(x)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}x^{m+n+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{6}$ 次の (a) または (b) または (c) の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(a) $f(x)$ を積分可能な関数とし，n を自然数とする．このとき，

$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt$ は $f(x)$ を a から x まで n 回積分したものであることを示せ．

(b) $f_1(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\,,f_2(x)=\int_a^x f_1(t)\,dt\,,\cdots\,,f_k(x)=\int_a^x f_{k-1}(t)\,dt$

(k は 2 以上の自然数) のとき

(1) 部分積分法を用いて $f_2(x)=\displaystyle\int_a^x (x-t)f(t)\,dt$ なることをいえ．

(2) $f_k(x)=\dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{k-1}f(t)\,dt$ (k は任意の自然数) となることを示せ．

（'69 大阪教育大）

(c) $F_n(x)=\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n f(t)}{n!}\,dt$ $(n \geqq 0)$ とおくとき，$\dfrac{d}{dx}F_n(x)=F_{n-1}(x)$

$(n \geqq 1)$ となることを示せ．

$\boxed{7}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a)　次の$\boxed{}$の中に適当な数または式を入れよ．また (イ)〜(ホ) の「 」で囲まれた文章の理由を，最後の (イ)〜(ホ) の解答のところで述べよ．

方程式　　$x^2 - 3y^2 = 1$　　$\cdots\cdots$①

を満たす整数の組 (x, y) を求めることを考える（以下この方程式の整数解を単に解と略称する）．準備のために次のことを確かめておく．

(イ)　「a, b, c, d が整数であって，$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ ならば，$a = c, b = d$ である．」

次に (x, y) が解であれば，$(x, -y), (-x, y), (-x, -y)$ も解であることは，方程式①により明らかであるから，(x, y) がともに負でない解を求めることが基本的である．それで，そのような解を求める手段として

$$(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots②$$

(x_n, y_n は負でない整数, $n = 0, 1, 2, \cdots$) とおく．そうすると (イ) によって

$$x_0 = 1, y_0 = 0, x_1 = 2, y_1 = 1 \qquad \cdots\cdots③$$

$x_2 = \boxed{}, y_2 = \boxed{}, x_3 = \boxed{}, y_3 = \boxed{}$ である．

一方，$(2 + \sqrt{3})^2$ と $(2 - \sqrt{3})^2, (2 + \sqrt{3})^3$ と $(2 - \sqrt{3})^3$ などを比較することによって，一般に

$$(2 - \sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3},\ n = 0, 1, \cdots \qquad \cdots\cdots④$$

であることがわかる．

② と④ と， $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ とを使って

$$1 = (2 + \sqrt{3})^n(2 - \sqrt{3})^n = {x_n}^2 - 3{y_n}^2$$

となるから，② で定まる (x_n, y_n) は方程式 ① の解であることがわかる．とくに，x, y の一方が 0 となるような負でない解は，明らかに $x = 1, y = 0$ で，それは③の (x_0, y_0) に外ならない．

次に (x_{n-1}, y_{n-1}) と (x_n, y_n) との関係を求めてみる $(n \geqq 1)$．

$$x_n + y_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n = (x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = \boxed{}$$

ゆえに，$x_n = \boxed{}, y_n = \boxed{}$

したがって，(x_0, y_0) から出発して, 負でない解 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots,$ (x_n, y_n) を順次求めて行くことができる．しかも $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$ である．

以上のことで負でない解を多数みつけたのであるが，これらで負でない解

が尽くされているかどうかを次に吟味する．

いま任意の正の解 $(x\,,y)\,,(x>0\,,y>0)$ をとると

$$(x+y\sqrt{3}\,)(2-\sqrt{3}\,)=(2x-3y)+(2y-x)\sqrt{3}$$

(ロ)　「$x'=2x-3y\,,y'=2y-x$ とおくとき，$(x'\,,y')$ も解である．」

(ハ)　「そして，$x>x'>0\,,y>y'\geqq 0$ である．」

(ニ)　「それで，任意の正の解 $(x\,,y)$ から出発して，(ロ) における $(x'\,,y')$ を求める操作を順次行うことによって，③に示す負でない解 $(x_0\,,y_0)$ に達する．」

(ホ)　「したがって，任意の負でない解 $(x\,,y)$ は式②によって定まる $(x_n\,,y_n)(n=0\,,1\,,2\,,\dots)$ のどれか 1 つである．」　　（'67 京都大）

(b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で，$x^2-3y^2=1$, $x>0$, $y\geqq 1$ ならば，

$x'^2-3y'^2=1$, $0\leqq y'<y$ が成立することを示せ．

(2)　x, y が $x^2-3y^2=1$ を満たす自然数ならば，ある自然数 n をとると

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となることを示せ．　　（'88 京都大）

$\boxed{8}$ $n=1,2,\ldots$ に対して $(2+\sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$ により自然数 $x_n\,, y_n$ を定義する.

(1) $a\,, b\,, c\,, d$ が有理数で $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ ならば $a=c, b=d$ であることを示せ.

(2) $x_{n+1}\,, y_{n+1}$ を $x_n\,, y_n$ で表せ.

(3) $x_{n+1} > x_n\,, y_{n+1} > y_n$ を示せ.

(4) $x_n^2 - 3y_n^2 = 1$ を示せ.

(5) $(2-\sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3}$ を示せ.

(6) $(2-\sqrt{3})^n$ は，適当な自然数 m を用いて $(2-\sqrt{3})^n = \sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ と表せることを示せ.

(7) $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{3}$ のよい近似値であること，すなわち，

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{3}\right| < \left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{3}\right|$$

が成り立つことを示せ.

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ を求めよ.

(9) $(2+\sqrt{3})^n$ の小数部分を求めよ.

$\boxed{9}$ 関数 $f(x)=x^4-x^3$ について，次の問いに答えよ.

(1) 直線 $y=mx+n$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 2 点で接するような定数 $m\,, n$ の値を求めよ.

(2) (1) で求めた直線 $y=mx+n$ と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

$\boxed{10}$ 次の 4 次関数を $f(x)$ とする．$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

いま，直線 $y = px + q$ は曲線 $y = f(x)$ と異なる 2 点で接しているとする．このとき，

(1)　次のような正数 h があることを示せ．
直線 $y = px + q + h$ は曲線 $y = f(x)$ と異なる 4 点で交わる．

(2)　上の (1) のような h に対して，直線 $y = px + q + h$ と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれた領域のうちで，領域 $y \leqq px + q + h$ 内にある 2 つの領域の面積が等しいことを示せ．　（'04 京都府立医大）

(3)　上の (1) のような h に対して，直線 $y = px + q + h$ と曲線 $y = f(x)$ との 4 交点を左から P，Q，R，S とすると， PQ=RS が成り立つことを示せ．

$\boxed{11}$ すべての実数 x に対して， $|f'(x)| \leqq k < 1$ を満たす定数 k が存在するとき，

(1)　方程式 $f(x) - x = 0$ がただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ．
この実数解を α とするとき

(2)　無限数列 $\{a_n\}$ が　$a_n = f(a_{n-1}) (n = 1, 2, \cdots, n)$ を満たすならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つことを証明せよ．

(3)　a を定数，q を 1 より小さい正の定数とする．

(i)　方程式 $x = q\sin x + a$ はただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(ii)　数列 $\{x_n\}$ を $x_0 = 0, x_n = q\sin x_{n-1} + a$　$(n = 1, 2, \cdots)$ と定めるとき，数列 $\{x_n\}$ は (i) の実数解に収束することを示せ．

$\boxed{12}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a) $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \dfrac{x(x-1)}{2!}$, $\ldots$,

$$g_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$$ と定義する．

(1) すべての整数 k に対して $g_n(k)$ は 整数であることを示せ．

(2) 任意の n 次多項式 $f(x)$ は $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x)$ の形で表せることを示せ．

(3) n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする．
$P(0)\,, P(1)\,, \ldots\,, P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ．

(b) (1) $n(\geqq 1)$ 次の整式 $P(x)$ に対して $P(x+1) - P(x)$ は $n-1$ 次の整式となることを示せ．

(2) n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする．
$P(0)\,, P(1)\,, \ldots\,, P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ．

$\boxed{13}$ $f(x)$ は連続関数で $\qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \cdots\cdots(*)$
を満たすものとする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy$ において $x+y=t$ とおくことにより

$$\int_0^1 f(x+y)\,dy = \int_0^{x+1} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) $(*)$ を y について 0 から 1 まで積分した等式を利用して，$f(x)$ は微分可能であることを証明せよ．なお，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ は x について微分可能であることを用いてもよい．

(3) $A = f(1)$ とおくとき，$f(x)$ を求めよ．

$\boxed{14}$ すべての実数で定義されている関数 $f(x)$ は次の 2 つの条件を満たしている．

1° 任意の実数 $x\,,y$ に対して

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

が成り立つ．

2° $f(x)$ は $x=0$ で微分係数をもち $f'(0)=1$ である．

このとき，

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 任意の実数 x に対して $-1<f(x)<1$ であることを示せ．

(3) 任意の実数 x に対して $f(x)$ は微分可能であることを示し，$f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int f(x)\,dx=x-\log(1+f(x))+C$ となることを示せ．

(5) $f(x)$ を求めよ．

$\boxed{15}$ 関数 $f(x)$ が常に $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ を満たしている．さらに，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=1$ である．このとき，

(1) $f(0)=0$ を示せ．

(2) 任意の実数 x に対して $-1<f(x)<1$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ はすべての点 x で微分可能であることを示し，$f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(4) $g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ とおき，$g'(x)$ を $g(x)$ を用いて表せ．

(5) $\{e^{-2x}g(x)\}'$ を計算して，$g(x)\,,f(x)$ を求めよ．

$\boxed{16}$ 実数 x の関数 $T_n(x)$ $(n=1,\,2,\,3,\,\dots)$ を $T_1(x)=x$, $T_2(x)=2x^2-1$, $T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$ $(n \geqq 1)$ により定義する．

(1) $T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$ であることを示せ．

(2) $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$， $T_n(\cosh\theta)=\cosh n\theta$ であることを示せ．

ただし，$\cosh\theta=\dfrac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$ とする．

(3) $|x| \leqq 1$ ならば $|T_n(x)| \leqq 1$ であることを示せ．

(4) $|x|>1$ ならば $|T_n(x)|>1$ であることを示せ．

(5) 方程式 $T_n(x)=0$ の実数解を求めよ．

(6) 方程式 $T_n(x)=1$ の実数解を求めよ．

$\boxed{17}$ n は自然数とする．

(1) すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)\,,\ \sin n\theta=g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

をみたす多項式 $T_n(x)$, $g_n(x)$ が存在することを示せ．

この $T_n(x)$, $g_n(x)$ について，次のことを証明せよ．

(2) $T_1(x)=x$, $T_2(x)=2x^2-1$, $g_1(x)=1$, $g_2(x)=2x$,

$$T_{n+2}(x)-2xT_{n+1}(x)+T_n(x)=0 \qquad \cdots\cdots①$$

$$g_{n+2}(x)-2xg_{n+1}(x)+g_n(x)=0 \qquad \cdots\cdots②$$

(3) $T_1(x)=x$, $g_1(x)=1$,

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)+(x^2-1)g_n(x) \qquad \cdots\cdots③$$

$$g_{n+1}(x)=T_n(x)+xg_n(x) \qquad \cdots\cdots④$$

(4) (i) $T_n(x)$ は係数がすべて整数である n 次の多項式で，x^n の係数は 2^{n-1} である．

また，$T_n(x)$ は n が偶数のとき偶関数で，n が奇数のとき奇関数である．

(ii) $g_n(x)$ は係数がすべて整数である $n-1$ 次の多項式で，x^{n-1} の係数は 2^{n-1} である．また，$g_n(x)$ は n が偶数のとき奇関数で， n が奇数のとき偶関数である．

(5) $T'_n(x)=ng_n(x)$ である．

(6) p を 3 以上の素数とするとき，$T_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる．

$\boxed{18}$ 実数 x の関数 $T_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ を $T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,$
$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x) \quad (n \geqq 1)$ により定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $T_3(x)\,,T_4(x)$ を求めよ．

(2) $T_n(x)$ は n 次式で最高次の係数は 2^{n-1} であることを示せ．

(3) $L_n=i^{-n}\cdot 2T_n\left(\dfrac{i}{2}\right)$ とおくとき，$\{L_n\}$ の満たす三項間の漸化式を求めよ．

(4) $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ が成り立つことを示せ．

(5) $(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$ が成り立つことを示せ．

(6) $T_n(x)=t_0+t_1x+\cdots+t_nx^n$ とおくと
$n \geqq 2$ のとき

$$t_{n-1}=0\,,$$
$$(n^2-k^2)t_k+(k+2)(k+1)t_{k+2}=0 \quad (k=0\,,1\,,\ldots\,,n-2)$$

であることを示せ．

(7) $T_n(x)=\displaystyle\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{n}{n-m}{}_{n-m}\mathrm{C}_m 2^{n-2m-1}x^{n-2m}$ $(n \geqq 1)$ が成り立つことを示せ．

(8) $L_n=i^{-n}\cdot 2T_n\left(\dfrac{i}{2}\right)$ は $2T_n\left(\dfrac{x}{2}\right)$ の係数の絶対値の和であることを示せ．

漸化式

$$L_1=1\,,L_2=3\,,L_{n+2}=L_{n+1}+L_n \quad (n \geqq 1)$$

で定義される数列をリュカ数の列という．

漸化式

$$F_1=1\,,F_2=1\,,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad (n \geqq 1)$$

で定義される数列をフィボナッチ数列という．

(3) と (8) の結果から $2T_n\left(\dfrac{x}{2}\right)$ の係数の絶対値の和は，リュカ数の列をなすことが証明できる．

$\boxed{19}$ $\lambda = \cos\dfrac{\pi}{5}$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 2x$, $g_3(x) = 4x^2 - 1$, $g_4(x) = 8x^3 - 4x$ とする.

(1) $g_2(x) = 2xg_1(x)$, $g_3(x) = 2xg_2(x) - g_1(x)$, $g_4(x) = 2xg_3(x) - g_2(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) $g_k(\lambda) = \dfrac{\sin\frac{k}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ が成り立つことを示せ.

(3) $y_1 = x_1 - g_1(\lambda)x_4 + g_3(\lambda)x_5$, $y_2 = x_2 - g_2(\lambda)x_4 + g_2(\lambda)x_5$, $y_3 = x_3 - g_3(\lambda)x_4 + g_1(\lambda)x_5$ とおくと

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2)\cos\frac{\pi}{5} - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 - x_5x_1)$$

$= (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\cos\dfrac{\pi}{5} - (y_1y_2 + y_2y_3)$ が成り立つことを示せ.

(4) (2) における y_1 , y_2 , y_3 について,

$$2\lambda({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2) - 2(y_1y_2 + y_2y_3)$$

$$= \frac{g_2(\lambda)}{g_1(\lambda)}\left\{y_1 - \frac{g_1(\lambda)}{g_2(\lambda)}y_2\right\}^2 + \frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2 - \frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2 + \frac{g_4(\lambda)}{g_3(\lambda)}{y_3}^2$$

が成り立つことを示せ.

(5) $x_1, x_2, \cdots, x_5$ が実数のとき，不等式

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2)\cos\frac{\pi}{5} \geqq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 - x_5x_1$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{20}$ (i) a , b が実数のとき,

$$\max(|a|\,,\,|b|) = \frac{|a+b| + |a-b|}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

を示せ．ただし，$\max(p\,,q)$ は $p\,,q$ のうち小さくない方を表す.

(ii) $s\,,t$ が実数のとき，$|s| + |t| = \max(|s+t|\,,\,|s-t|)$ を示せ.

(iii) $|a| < 1$ かつ $|b| < 1$ ならば $|a+b| + |a-b| < 2$ であることを証明せよ．ただし，$a\,,b$ は実数とする.　　[(iii) のみ]（'81 お茶の水女子大）

$\boxed{21}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a\,,b$ のうち小さくない方を $\max\{a\,,b\}$ で表すことにする．このとき

$$\max\{|s+t|\,,|s-t|\}=|s|+|t| \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを用いて，

$$\max\{|a|\,,|b|\}=\frac{|a+b|+|a-b|}{2} \qquad \cdots\cdots(**)$$

を証明せよ．

(2) 整式 $f(x)$ に対して $\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)|=\max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f(x)|\,,|f(-x)|\}$ を示せ．

(3) 命題「 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|\,x^2+px+q\,|$ の最大値 $\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|\,x^2+px+q\,|$ は $\dfrac{1}{2}$ 以上である」を証明するのに，次の方法がある．

$f(x)=x^2+px+q\,,f_1(x)=x^2+q\,,g_1(x)=px$ とおくと，(2) より

$$\begin{aligned}\max_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)|&=\max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f(x)|\,,|f(-x)|\}\\&=\max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f_1(x)+g_1(x)|\,,|f_1(x)-g_1(x)|\}\\&=\max_{0\leqq x\leqq 1}(|f_1(x)|+|g_1(x)|)\quad(\because\quad(*))\\&\geqq\max_{0\leqq x\leqq 1}|f_1(x)|=\max_{0\leqq x\leqq 1}|x^2+q|\\&=\max_{0\leqq z\leqq 1}|z+q|\}\quad(z=x^2)\\&=\max\{|q|\,,|1+q|\}\\&=\frac{|2q+1|+1}{2}\quad(\because\quad(**))\\&\geqq\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

よって，命題は成り立つ．

以上にならって，次の命題を証明せよ．

命題『 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|\,x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,|$ の最大値 $\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|\,x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,|$ は $\dfrac{1}{8}$ 以上である』

$\boxed{22}$ n を正の整数または 0 とする．

(1) 次の式を示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,.$$

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)\,.$$

(3) 次の式を示せ．

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \ (n \geqq 1)\,,\ I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \ (n \geqq 0)$$

ただし，$(2n)!! = 2\cdot4\cdot6\cdots2n$, $(2n+1)!! = 1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)$, $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$ と定義する．

(4) $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

(i) $\displaystyle J_{n-1} - \frac{2n}{2n-1} J_n = \frac{1}{(2n-1)n} I_{2n} \quad (n \geqq 1)\,,$

(ii) $\displaystyle \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} J_{n-1} - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} J_n = \frac{\pi}{4n^2} \quad (n \geqq 1)\,,$

(iii) $\displaystyle J_0 - \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} J_m = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \quad$ (m は自然数)．

(5) 次の式を示せ．

$$J_m < \frac{\pi^2}{4}(I_{2m} - I_{2m+2}) \quad (m \text{ は自然数})\,.$$

なお，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$ すなわち $x < \dfrac{\pi}{2}\sin x$ であることを用いてもよい．

(6) 次の式を示せ．

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} J_m = 0\,.$$

(7) 次の式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

$\boxed{23}$ n を正の整数または 0 とする．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ とおく．次の式を示せ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2) .$$

(2) 次の式を示せ．

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \quad (n \geqq 1) .$$

(3) 次の式を示せ．

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \ (n \geqq 1) , \ I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \ (n \geqq 0) .$$

ただし，$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$, $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$, $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$ と定義する．

(4) 次の式を示せ．

(i) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1 .$

(ii) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \pi .$

(iii) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi} .$

(5) 記号$\sim$を，正の数からなる数列 $\{a_n\}$ ，$\{b_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ を満たすとき，$a_n \sim b_n$ と表すことにする．次の式を示せ．

$$ {}_{2n}C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} .$$

(6) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{{}_{2n}C_n}$ を求めよ．

(4) の (ii)，(iii) の式

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \pi , \ \lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$$

をワリス (Wallis) の公式という．

$\boxed{24}$ n を正の整数または 0 とする．

(1) 次の式を示せ．

$x>0$ のとき，$\dfrac{2x}{x+2}<\log(1+x)<\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{x^3}{6(x+1)(x+2)}$.

(2) 次の式を示せ．

$x>0$ のとき，

$\dfrac{2}{2x+1}<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{2}{2x+1}+\dfrac{1}{6x(x+1)(2x+1)}$.

(3) $a_n=\dfrac{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^{n-\frac{1}{12n}}}{\sqrt{2\pi}}$, $b_n=\dfrac{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^{n}}{\sqrt{2\pi}}$ $(n=1,2,\ldots)$ とおく．次の式を示せ．

(i) $a_n<b_n$ $(n=1,2,\ldots)$.

(ii) $\log\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>0$ $(n=1,2,\ldots)$.

(iii) $\log\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<0$ $(n=1,2,\ldots)$.

(4) $\{a_n\}$ は増加数列で $a_n<b_1$, $\{b_n\}$ は減少数列で $b_n>a_1$, であることから $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束することがわかる．

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ とおいたとき $\alpha=\beta$ を示せ．

(5) $a_n<\alpha<b_n$ から $\alpha=\dfrac{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^{n-\frac{\lambda_n}{12n}}}{\sqrt{2\pi}}$ $(0<\lambda_n<1)$ とおける．$2n$ に関して $\alpha=\dfrac{(2n)!(2n)^{-2n-\frac{1}{2}}e^{2n-\frac{\lambda_{2n}}{24n}}}{\sqrt{2\pi}}$ $(0<\lambda_{2n}<1)$ も考えることにより $\alpha=1$ を示せ．なお，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n\pi}(2n)!}=1$ が成り立つことを用いてもよい．

(6) 次の式を示せ．

$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\lambda_n}{12n}}$ $(0<\lambda_n<1)$.

(7) 記号$\sim$を，正の数からなる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$ を満たすとき，$a_n\sim b_n$ と表すことにする．次の式を示せ．

$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ を求めよ

$\boxed{25}$ (1) 関数 $f(x)$ は $[0\,,1]$ で微分可能で $f'(x)$ は連続であるとする．このとき，

$$\varDelta=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}-\int_0^1 f(x)\,dx$$

として，次のことを証明せよ．

(i) $\displaystyle \varDelta=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k-1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)f'(\xi_k)\,dx\quad\left(\frac{k-1}{n}<\xi_k<x<\frac{k}{n}\right)$ を満たす ξ_k が存在する．

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}n\varDelta=\frac{f(1)-f(0)}{2}$ が成り立つ．なお，$f'(x)$ が連続なので $\left[\dfrac{k-1}{n}\,,\dfrac{k}{n}\right]$ における $f'(x)$ の最大値と最小値が存在するから， $M_k\,,m_k$ とおいて利用してもよい．

(iii) (ii) で $f(x)=\log(x+1)$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\ n!\ n^n}{e^n(2n)!}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ．

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n\pi}(2n)!}=1$ と (1)(iii) の結果を利用して

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

なお，記号～は，正の数からなる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ を満たすとき，$a_n\sim b_n$ と表す．

$\boxed{24}$(6)，(7)，$\boxed{25}$(2) で証明した

$$\boldsymbol{n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\lambda_n}{12n}}\quad(0<\lambda_n<1)\quad\left[n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]}$$

をスターリング (Stirling) の公式という．

$\boxed{26}$ (i) $(1+x)^n=(1+x)^{n-1}+x(1+x)^{n-1}$ で x^r の係数を比較することにより，次の式を証明せよ．

$${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\quad(1\leqq r\leqq n-1).$$

(ii) $$\left(\frac{x}{2}+\frac{x^{-1}}{2}+1\right)^n=2^{-n}\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^{2n}\qquad\cdots\cdots①$$

の両辺の定数項を比較することにより，次の等式を証明せよ．

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}2^{-2k}{}_n\mathrm{C}_{2k}\cdot{}_{2k}\mathrm{C}_k=2^{-n}{}_{2n}\mathrm{C}_n\,.\qquad\cdots\cdots②$$

(i) の等式 ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ は組合せ論的証明，計算による証明で示すことができるが，ここでは**母関数**による証明で示す．母関数を用いた問題としては，次の問題が有名である．

等式 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ の両辺の展開式を利用して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$${}_{2n}\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2\,.$$

$\boxed{27}$ 正の整数をとる変数 $p\,,q$ に対して，$f(p,q)$ を $f(p,1)=1$，$f(1,q)=2^{1-q}$

$$f(p,q)=\frac{1}{2}\left\{f(p,q-1)+f(p-1,q)\right\}\qquad\cdots\cdots①$$

によって定義する．このとき $f(p,q)$ は p,q を用いて

$$f(p\,,q)=\frac{1}{2^{p+q-2}}\sum_{r=0}^{p-1}{}_{p+q-2}\mathrm{C}_r\qquad\cdots\cdots②$$

と表せることを数学的帰納法で証明せよ．

$\boxed{27}$ の②は母関数を用いて求めることができたので，ここでは数学的帰納法を用いて②を証明する．

$\boxed{28}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ.

(a) (1) 関数 $f(x)$ は，$f(0)=0$ を満たし，常に $f''(x)<0$ であるとする.

$$u(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

とおく．$x>0$ のとき，$u'(x)<0$, $u(x)<0$ であることを示せ.

(2) 関数 $g(x)$ は，常に $g''(x)<0$ を満たすとする．$a<b$ のとき，不等式

$$\int_a^b g(x)\,dx<(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

を示せ. （'05 大阪市大・理（後期）（改題））

(3) $a<b$ のとき，不等式

$$(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}<\int_a^b f(x)\,dx$$

を示せ.

(b) 関数 $f(x)$ は，常に $f''(x)<0$ を満たすものとする.

(1) $m=\dfrac{a+b}{2}$ とおくと 不等式

$$f(x)\leqq f'(m)(x-m)+f(m) \quad \cdots\cdots ①$$

を示せ.

(2) $a<b$ のとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

を示せ.

(3) $a<b$ のとき，不等式

$$(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}<\int_a^b f(x)\,dx$$

を示せ.

上の結果をまとめると

『区間 $[a,b]$ において $f''(x)<0$ のとき，

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt<f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

が成り立つ.』

$\boxed{29}$ $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \theta$ とおく．一般に $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$ が存在するとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$ と書く．次の問いに答えよ．

(1) 0 でない実数 x に対して不等式 $e^x > x+1$ を示せ．

(2) 0 でない実数 x に対して不等式 $1 - x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ を示せ．

(3) $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ が存在するとき，$I = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx$ を示せ．

(4) $\sqrt{n}\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$
を示せ．

(5) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = I_{2n+1}\,,\ \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{2n-2}$ を示せ．

(6) $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)\,,\ I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ を示せ．

(7) $1 < \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n} \quad (n \geqq 1)\,,\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ を示せ．

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_{2n+1}$ を求めよ．

(9) $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ が存在するとき，I の値を求めよ．

$\boxed{30}$ 次の問いに答えよ．なお，Rolle の定理「$f(x)$ が $[\,a\,,b\,]$ で連続，$(a\,,b)$ で微分可能であって，さらに，$f(a)=f(b)$ ならば， $f'(c)=0\,, a<c<b$ を満たす c が存在する.」を用いてもよい.

(1) $f(x)\,,f'(x)\,,\ldots\,,f^{(n-1)}(x)$ が $[a\,,b]$ で連続，$(a\,,b)$ で $f^{(n)}(x)$ が存在するとき

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

を満たす $c\,(\,a<c<b\,)$ が存在することを示せ．(Taylor の定理)

(2) $f(x)\,,f'(x)\,,\ldots\,,f^{(n-1)}(x)$, $g(x)\,,g'(x)\,,\ldots\,,g^{(n-1)}(x)$ が $[a\,,b]$ で連続，$(a\,,b)$ で $f^{(n)}(x)\,,g^{(n)}(x)$ が存在して ,$g^{(n+1)}(x)\fallingdotseq 0$ ならば

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\dfrac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)-\dfrac{(b-a)^2}{2!}g''(a)-\cdots-\dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a)}$$
$$=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)} \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす $c\,(\,a<c<b\,)$ が存在することを示せ.

(3) (2) を用いて（1）を示せ.

(4) $f(x)\,,f'(x)\,,\ldots\,,f^{(n-1)}(x)$, $g(x)\,,g'(x)\,,\ldots\,,g^{(n-1)}(x)$ が $[\,p\,,q]$ で連続，$(p\,,q)$ で $f^{(n)}(x)\,,g^{(n)}(x)$ が存在して ,$g^{(n+1)}(x)\fallingdotseq 0$ かつ $a\in(p\,,q)$ で $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0\,,$

$$g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(n-1)}(a)=0$$

ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\,.$$

$\boxed{31}$ $f(x)=a^x$ ($a>0\,,a\fallingdotseq 0$) とおき，
$f_1(x)=f(x)\,,f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ $(n=2\,,3\,,\ldots)$ で $f_n(x)$ を定義する．
次に，方程式 $f_n(x)=x$ の実数解の集合を F_n とおく．すなわち

$$\mathrm{F}_n=\{x\,|\,f_n(x)=x\,,x\text{ は実数 }\}.$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a>1$ のとき $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1$ を示せ．

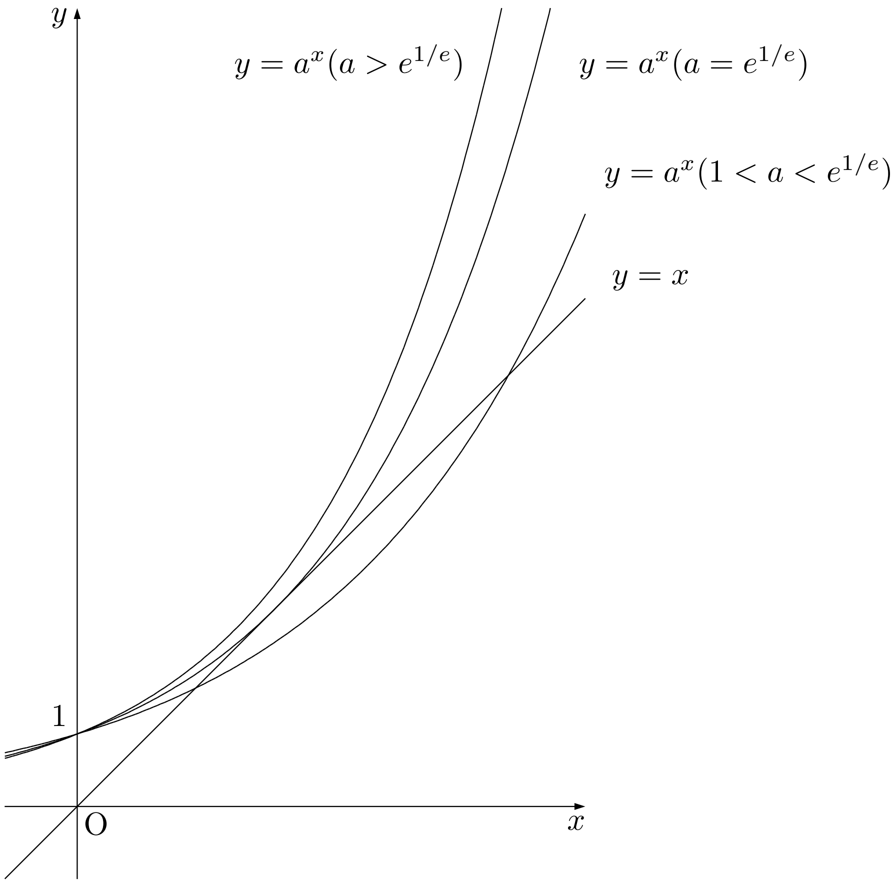
(2) $f_2(x)\,,f_4(x)\,,\ldots$ は増加関数であることを示せ．

(3) n が偶数のとき $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_2$ を示せ．

(4) n が奇数のとき $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1$ を示せ．

(5) F_1 の要素の個数を調べよ．

(6) F_2 の要素の個数を調べよ．



$\boxed{32}$ 次の記号を導入する．

$$\left\|\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{array}\right\| = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{l=1}^{m} x_{l\,k}\right)$$

$$= x_{11}x_{21}\cdots x_{m1} + x_{12}x_{22}\cdots x_{m2} + \cdots + x_{1n}x_{2n}\cdots x_{mn}$$

（縦に掛けてから加える）

次に，実数 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ を大きい順に並べたものを $s_1, s_2, \ldots, s_n$ とするとき，

$$\overline{r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_n} = s_1,\, s_2,\, \ldots,\, s_n \;\left[\overline{r_1\, r_2\, \ldots\, r_n} = s_1\, s_2\, \ldots\, s_n\right]$$

と書くことにする．［$\overline{}$ は大きい順に並べる操作を表す．］たとえば，

$$\overline{2.5,\, \frac{3}{4},\, -\frac{10}{3},\, \sqrt{5}} = 2, 5,\, \sqrt{5},\, \frac{3}{4},\, -\frac{10}{3}\,.$$

この記号に関して次のことが成り立つ．

> $n \geqq 3$ のとき
>
> $$\overline{r_1\, r_2\, \ldots\, r_{n-1}\, r_n} = \overline{r_1\,\overline{\overline{r_2\, \ldots\, r_{n-1}}\, r_n}}$$
>
> が成り立つ．

(1)　次の不等式を二重帰納法で証明せよ．

m, n は自然数で，$x_{ij} \geqq 0$, $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ のとき

$$\left\|\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{array}\right\| \leqq \left\|\begin{array}{c} \overline{x_{11} \quad x_{12} \quad \ldots \quad x_{1n}} \\ \overline{x_{21} \quad x_{22} \quad \ldots \quad x_{2n}} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \overline{x_{m1} \quad x_{m2} \quad \ldots \quad x_{mn}} \end{array}\right\|.$$

(2)　$a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, \ldots, a_n \geqq 0$ のとき不等式

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geqq n a_1 a_2 \cdots a_n$$

が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{33}$ 次の (a) または (b) または (c) の問いに答えよ.

(a) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ とする.

(1) すべての i, j に対して $a_i b_i + a_j b_j \geqq a_i b_j + a_j b_i$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_i + a_j b_j)$ と $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j + a_j b_i)$ を計算することにより

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

を証明せよ.

(b) (1) 任意の数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ に対して

$$n\sum_{i=1}^{n} c_i d_i - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right) = \sum_{1\leqq i<j\leqq n} (c_i - c_j)(d_i - d_j) \qquad (*)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき，不等式

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

を証明せよ.

(c) (1) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$, $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ とし, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を並べかえたものを $z_1, z_2, \ldots, z_n$ とするとき，不等式

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \geqq x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき，不等式

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

を証明せよ.

4　問題 B の解答

$\boxed{1}$　次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a)　△ ABC の内心と外心との距離を d，外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1)　$d^2 = R^2 - 2Rr$.

(2)　$R \geqq 2r$ であり等号は正三角形のときにのみ成り立つ．

(b)　△ ABC の内心を I，外心を O とし，△ ABC の外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とする．

(1)　$\dfrac{abc}{a+b+c} = 2Rr$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と a, b, c を用いて表せ．

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2$ を R, r を用いて表せ．

(4)　$R \geqq 2r$ が成り立つことを示せ．

目標は，オイラーの公式 $d^2 = R^2 - 2Rr$ を証明すること．

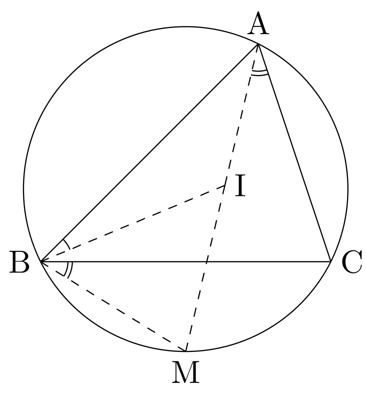
解 (a)(1)　$\angle BAI = \angle CAI = \alpha, \angle ABI = \angle CBI = \beta$ とおく．

$\angle MIB = \angle IAB + \angle IBA = \alpha + \beta$,

$\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI$

$= \angle MAC + \angle CBI = \alpha + \beta$ より

△ MIB は二等辺三角形となり，MB=MI が成り立つ．



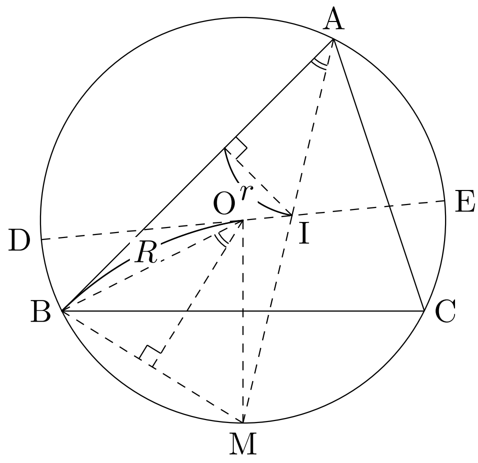
右の図において，

$R^2-d^2=(R+d)(R-d)$

$=\mathrm{DI}\cdot\mathrm{IE}=\mathrm{IA}\cdot\mathrm{IM}$.

($\because$ 方べきの定理)

ここで， $\mathrm{IA}=\dfrac{r}{\sin\alpha}$,



$\mathrm{IM}=\mathrm{MB}=2R\sin\alpha$

であるから $\mathrm{IA}\cdot\mathrm{IM}=2Rr$.

よって， $d^2=R^2-2Rr$.

(2) (1) から $d^2=R(R-2r)$ が成り立ち，$d^2\geqq 0$ より $R(R-2r)\geqq 0$

よって， $R\geqq 2r$.

等号が成り立つのは $O=I$ のときである．このとき，

円周角と中心角の関係から $\angle MIB=2\alpha$ が成り立つ．

また， $\angle MIB=\alpha+\beta$ であるから $2\alpha=\alpha+\beta$. ゆえに，$\alpha=\beta$ から $A=B$

同様にして $B=C$ が成り立つから，結局△ ABC は正三角形である． ■

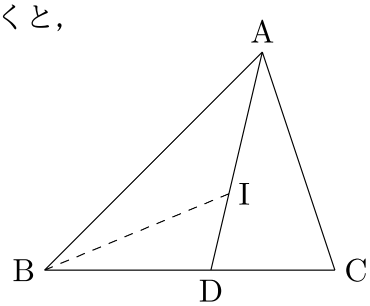
解 (b)(1) △ ABC の面積 S は

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{a}{2R}=\dfrac{abc}{4R}$, $S=\dfrac{r(a+b+c)}{2}$ と表せるから

$\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{r(a+b+c)}{2}$ より $\dfrac{abc}{a+b+c}=2Rr$ が成り立つ．

(2) $\angle$A の 2 等分線と辺 BC との交点を D とおくと，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=c:b$$



より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{c+b},\ \mathrm{BD}=\frac{ac}{c+b}.$$

BI は $\angle B$ の 2 等分線であるから，

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=c:\frac{ac}{b+c}=(b+c):a.$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{(b+c)+a}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}.$$

(3) $c^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 2R^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

から $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = R^2 - \dfrac{c^2}{2}$.

同様にして $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = R^2 - \dfrac{a^2}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = R^2 - \dfrac{b^2}{2}$ を得る.

(2) の結果を用いると

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2 \\
&= \left| \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c} \right|^2 \\
&= \frac{a^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + b^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + c^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}{(a+b+c)^2} \\
&\qquad + \frac{2ab\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2bc\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2ca\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{(a+b+c)^2} \\
&= \frac{R^2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \\
&\qquad + \frac{2ab\left(R^2 - \dfrac{c^2}{2}\right) + 2bc\left(R^2 - \dfrac{a^2}{2}\right) + 2ca\left(R^2 - \dfrac{b^2}{2}\right)}{(a+b+c)^2} \\
&= \frac{R^2(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2} \\
&= R^2 - \frac{abc}{a+b+c} .
\end{aligned}
$$

(1) を利用すると $|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2 = R^2 - 2Rr$.

(4) (省略) ■

$\boxed{2}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a) △ABC の外接円と内接円の半径をそれぞれ $R\,,r$ とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1) $\dfrac{r}{R}=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

(2) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{1}{8}$.

(3) $R\geqq 2r$ であり等号は正三角形のときにのみ成り立つ．

(b) $A\,,B\,,C$ を三角形の内角とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\leqq\dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)$.

(2) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{1}{8}$.

(3) $\sin A+\sin B+\sin C\geqq 4\sin A\sin B\sin C$.

(4) 三角形の外接円と内接円の半径をそれぞれ $R\,,r$ とすると，$R\geqq 2r$ であり等号は正三角形のときにのみ成り立つ． （’97 滋賀医大）

三角関数を使って $R\geqq 2r$ を証明する．(2) は (b) の (1)，(2) のように一変数固定して解く方法が一般的であるが，筆者が高校 3 年生のときに気づいた解法を紹介する．

解 (a) (1) △ABC の面積を S とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}bc\sin A\\&=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C\cdot\sin A\\&=2R^2\sin A\sin B\sin C\\&=16R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

となる．

一方，$S=\dfrac{r}{2}(a+b+c)=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$ であるから

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\qquad(*)$$

を示す.

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 2\sin\frac{\pi-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{\pi-(A+B)}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\\ &= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\,.\end{aligned}$$

したがって $S=4Rr\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ となるから,

$$16R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos B2\cos\frac{C}{2}=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\,.$$

ゆえに,

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\,.$$

(2)　$0<x<\pi$ において, $\sin x$ は上に凸であるから

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3}{3}\leqq\sin\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\,.$$

この不等式でにおいて $A/2\,,B/2\,,C/2$ を用いると

$$\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\leqq\sin\left(\frac{A+B+C}{6}\right)=\frac{1}{2}\,. \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\left(\text{等号は}\frac{A}{2}=\frac{B}{2}=\frac{C}{2}\text{のとき}\quad(*)\right)$$

3 個の相加平均・相乗平均の不等式から

$$\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\leqq\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\,. \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\left(\text{等号は}\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}\text{のとき}\quad(**)\right)$$

①, ②から

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\,.$$

(3)　(2) より $\dfrac{r}{R}=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ が成り立つ.

また,

$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{1}{8}$ が成り立つから，

$$\frac{r}{R} \leqq \frac{1}{2}. \qquad \text{ゆえに，} \quad R \geqq 2r.$$

等号が成り立つのは $(*)$ かつ $(**)$ が成り立つときであるから
$A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ すなわち △ ABC が正三角形のときである． ■

解 (b)(1)

$$\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{\pi-C}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\\
&\leqq \frac{1}{2}\left(1 - \sin\frac{C}{2}\right).
\end{aligned}$$

よって　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} \leqq \dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)$　が成り立つ．
（等号は $A = B$ のときに成り立つ．）

(2)　(1) で得た不等式の両辺に $\sin\dfrac{C}{2}(>0)$ をかけると

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \leqq \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \leqq \frac{1}{8}.$$

よって　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{1}{8}$　が成り立つ．
（等号は $C = \dfrac{\pi}{3}$ かつ $A = B$ から $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ のときに成り立つ．）

(3)　(a) の (1) から　$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

(2) の結果の $1 \geqq 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ を使うと

$$\begin{aligned}
&4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\
&\geqq 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&= 4\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\\
&= 4\sin A\sin B\sin C.
\end{aligned}$$

よって，

$$\sin A + \sin B + \sin C \geqq 4\sin A\sin B\sin C$$

が成り立つ．（等号は $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ のときに成り立つ．）

(4)　3 辺の長さは $a=2R\sin A\,, b=2R\sin B\,, c=2R\sin C$ であるから，三角形の面積を S とおくと

$$S=r\cdot\frac{a+b+c}{2}=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)\,.$$

また，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

が成り立つから

$$Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=2R^2\sin A\sin B\sin C\,.$$

ゆえに，

$$\frac{R}{2r}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqq 1 \qquad (\because\ (3))\,.$$

したがって $R\geqq 2r$ を得る．

等号は $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，すなわち△ ABC が正三角形のときにのみ成り立つ．■

※ (a)(2) の不等式の証明の解法は，筆者が真岡高校の 3 年生のとき気づいた方法である．（大学への数学　1969 年 12 月号　p.32 参照）

※ 角ではなく，辺の関係に直すことも可能である．$S=\dfrac{abc}{4R}$，$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$，$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=\dfrac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ であることを使うと

$$\begin{aligned}R\geqq 2r &\iff \frac{abc}{4S}\geqq 2\cdot\frac{2S}{a+b+c}\iff abc\geqq\frac{16S^2}{a+b+c}\\ &\iff abc\geqq(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).\end{aligned}$$

ここで，$b+c-a=x>0$，$c+a-b=y$，$a+b-c=z>0$ とおくと，$a=\dfrac{y+z}{2}$，$b=\dfrac{z+x}{2}$，$c=\dfrac{x+y}{2}$ となるから

$$abc\geqq(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\iff(y+z)(z+x)(x+y)\geqq 8xyz.$$

最後の不等式は，相加平均と相乗平均の不等式を使うと

$$(y+z)(z+x)(x+y)\geqq 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}\cdot 2\sqrt{xy}=8xyz$$

から成り立つ．

$R \geqq 2r$ に関する問題が京都大学で出題されている．

類題 19　平面上の点 O を中心とし，半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A，B，C がある．△ ABC の内接円の半径 r は $\dfrac{1}{2}$ 以下であることを示せ．　（'06 京都大）

［補足］　$R \geqq 2r$ の図形的な証明が知られている．(大関信雄・大関清太　共著 :『不等式への招待』近代科学社，p.8)

(i)　三角形の辺を切る円の半径はその三角形の内接円の半径より大きい（図 1 より成り立つ）．

(ii)　各辺の中点 P,Q,R を通る円の半径は，△ ABC の外接円の半径の $\dfrac{1}{2}$ となる（なぜならば，△ ABC と△ PQR は相似で相似比が 2:1 であるから）．

(i)，(ii) から△ PQR の外接円が△ ABC の辺を切る場合は $R \geqq 2r$ が成り立つ．△△ PQR の外接円が ABC の辺を切らない場合は，△ ABC の内心と重心が一致するから△ ABC は正三角形となる．この場合は $R = 2r$ となる．

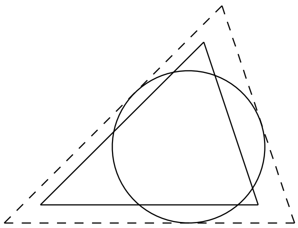


図 1 − 1

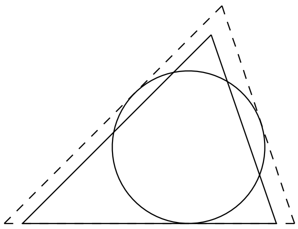


図 1 − 2

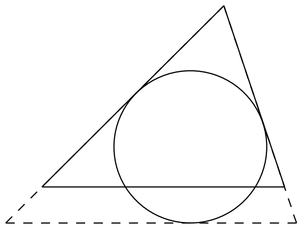


図 1 − 3

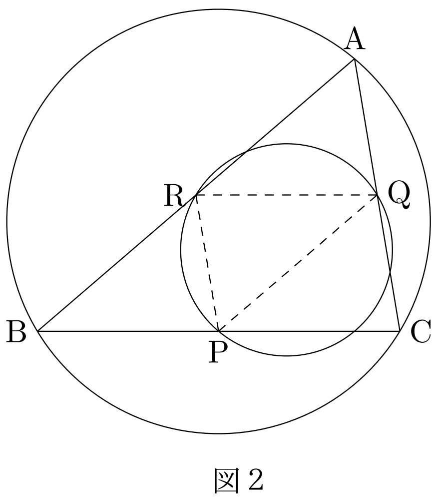


図 2

■

$\boxed{3}$ 次の (a) または (b) または (c) の問いに答えよ．

(a) (1)　n が 2 より大きい整数のとき，$(n!)^2 > n^n$ であることを証明せよ．

（'69 大学への数学　学力コンテスト）

(2)　n が 2 以上の自然数のとき，$\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ．

（'70 京都大（改題））

(3)　n が 2 以上の自然数のとき，$n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ を証明せよ．

('70 大阪電気通信大 (改題))

(b) (1)　数学的帰納法を用いて，n が 2 より大きい整数のとき，$(n!)^2 > n^n$ を証明せよ．　（'69　大学への数学　学力コンテスト (改題)）

(2)　数学的帰納法によって，$\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ．ここに n は 2 以上の整数とする．　（'70 京都大・文）

(3)　数学的帰納法を用いて，n が 2 以上の自然数のとき，

$n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ を証明せよ．　('70 大阪電気通信大 (改題))

(c) (1) (i)　$x \geqq 1$ のとき $x\log x \geqq (x-1)\log(x+1)$ を示せ．

(ii)　自然数 n に対して $(n!)^2 \geqq n^n$ であることを証明せよ．

（'01 名古屋市立大）

(2)　相異なる n 個の正数の相加平均は，その相乗平均より大きいことを用いて $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ．

(3) (A)　次の級数の和を求めよ．$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$

(B)　相異なる n 個の正数の相加平均は，その相乗平均より大きいことを用いて $n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ を証明せよ．

('70 大阪電気通信大)

数学的帰納法に飛びつきたくなるところだが，帰納法では意外と面倒である．帰納法によらない解法がある．ここで，$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\cdot a_2\cdots a_n$ の記号を導入しておく．

解 (a) (1)　$(n!)^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\{k(n-k+1)\}$ が成り立つ．

$1 \leqq k \leqq n$ のとき，$k(n-k+1)-n = (n-k)(k-1) \geqq 0$ から

$$k(n-k+1) \geqq n \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，①で等号は，k が 1 または n のときに限り成立する．

したがって，$n \geqq 3$ のとき

$$\prod_{k=1}^{n} \{k(n-k+1)\} > \prod_{k=1}^{n} n = n^n.$$

よって，$(n!)^2 > n^n$ は成り立つ．

(2) $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} \{k(n-k+1)\}$ を使って証明してみる．

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n! \iff \left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right\}^n > (n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} \{k(n-k+1)\}.$$

ここで

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - k(n-k+1) &= k^2 - (n+1)k + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

から

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \geqq k(n-k+1).$$

等号は n が奇数で $k = (n+1)/2$ のときに限り成り立つ．

よって，$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 > \prod_{k=1}^{n} \{k(n-k+1)\}$ から

$$\left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right\}^2 > (n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} \{k(n-k+1)\}$$

すなわち $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ が成り立つ．

(3) n は 2 以上の自然数とする．(2) より $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ すなわち $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^2$ が成り立つ．

また，$n^n = n \cdot n \cdots n > n(n-1) \cdots 1 = n!$ が成り立つことも用いると

$n^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ が成り立つ． ■

［注意］　(a)(1) でやっていることは $1\cdot n=n$, $2(n-1)>n$, $\cdots$, $n\cdot 1=n$ の辺々をかけているに過ぎない.

解 (b) (1)　(i) $n=3$ のとき，左辺 $=(3!)^2=36$, 右辺 $=3^3=27$ より (左辺) $>$ (右辺)

(ii) $n=k(\geqq 3)$ のとき成立すると仮定すると，$(k!)^2>k^k$

$$\{(k+1)!\}^2-(k+1)^{k+1}=(k+1)^2\left\{(k!)^2-(k+1)^{k-1}\right\}$$
$$>(k+1)^2\left\{k^k-(k+1)^{k-1}\right\}.$$

よって，3 以上の整数について　　$n^n>(n+1)^{n-1}$　　$\cdots\cdots$ ①

が成立することを証明すればよい．これを数学的帰納法で証明する.

(ア) $n=3$ のとき成立する.

(イ) $n=k(\geqq 3)$ のとき成立すると仮定すると，$k^{\mathrm{k}}>(k+1)^{k-1}$

$$(k+1)^{k+1}-(k+2)^k=(k+1)^k\left\{k+1-\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k\right\}$$
$$>(k+1)^k\left\{k+1-\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right\}$$
$$>(k+1)^k\left\{k+1-\frac{(k+1)^k}{(k+1)^{k-1}}\right\}$$
$$=(k+1)^k\{k+1-(k+1)\}=0$$

から　$(k+1)^{k+1}>(k+2)^k$.

よって，3 以上の整数について ①が成立する.

したがって，$k\geqq 3$ のとき $k^k-(k+1)^{k-1}>0$ が成り立つから

$$\{(k+1)!\}^2-(k+1)^{k+1}>0.$$

$n=k+1$ のときも成り立つ.

(i),(ii) から $n\geqq 3$ のとき $(n!)^2>n^n$ が成り立つ.

(2) (i)　$n=2$ のとき，左辺 $=\left(\dfrac{2+1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$, 右辺 $=2!=2$.

ゆえに，左辺 $>$ 右辺

(ii)　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^k>k!. \quad\cdots\cdots ②$$

② の両辺に $k+1(>0)$ をかければ

$$2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}>(k+1)!. \quad\cdots\cdots ③$$

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}-2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}\left\{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}-2\right\}$$
$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}\left\{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}-2\right\}.$$

$\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^{k+1}$ を二項展開すると

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}=1+{}_{k+1}C_1\left(\frac{1}{k+1}\right)+{}_{k+1}C_2\left(\frac{1}{k+1}\right)^2+\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$$
$$>1+(k+1)\cdot\left(\frac{1}{k+1}\right)=2,$$

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2. \qquad \cdots\cdots ④$$

したがって,

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}>2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

③, ⑤から $\left(\dfrac{k+2}{2}\right)^{k+1}>(k+1)!$ となり, $n=k+1$ のときも成り立つ.

(i), (ii) より 2 以上の自然数 n に対して $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n>n!$ が成り立つ.

(3) (i) $n=2$ のとき, 左辺 $=2^2\left(\dfrac{2+1}{2}\right)^4=\dfrac{81}{4}$, 右辺 $=(2!)^3=8$.

ゆえに, 左辺 $>$ 右辺

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると,

$$k^k\left(\frac{k+1}{2}\right)^{2k}>(k!)^3. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥ の両辺に $(k+1)^3(>0)$ をかければ

$$k^k\left(\frac{k+1}{2}\right)^{2k}(k+1)^3>\{(k+1)!\}^3. \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$$(k+1)^{k+1}\left(\frac{k+2}{2}\right)^{2k+2}-k^k\left(\frac{k+1}{2}\right)^{2k}(k+1)^3$$
$$=k^k\left(\frac{k+1}{2}\right)^{2k+2}(k+1)\left\{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{2k+2}-4\right\}$$
$$=k^k\left(\frac{k+1}{2}\right)^{2k+2}(k+1)\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{2(k+1)}-4\right\}$$

(2)④から $\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^{2(k+1)} > 2^2 = 4$ が成り立つから，

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{2(k+1)} - 4 > 0\,.$$

したがって，

$$(k+1)^{k+1}\left(\frac{k+2}{2}\right)^{2k+2} - k^k\left(\frac{k+1}{2}\right)^{2k}(k+1)^3 > 0\,. \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧から $(k+1)^{k+1}\left(\dfrac{k+2}{2}\right)^{2k+2} > \{(k+1)!\}^3$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より ，2 以上の自然数 n に対して $n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3$ が成り立つ． ■

①の不等式は相加平均・相乗平均の不等式で証明できる．

$n+1$ を $n-1$ 個， 1 を 1 個に対して相加平均・相乗平均の不等式を用いると

$$n = \frac{(n-1)(n+1)+1}{n} > \sqrt[n]{(n+1)^{n-1}\cdot 1}\,.$$

よって，$n^n > (n+1)^{n-1}$ が成り立つ．

①の不等式は

$$n^n > (n+1)^{n-1} \Longleftrightarrow n\log n > (n-1)\log(n+1)$$

となるから，ヒントとして

「　$x \geqq 1$ のとき $x\log x \geqq (x-1)\log(x+1)$ を示せ．」

を付けた大学入試問題がある．【(c)(1)(i) 参照)】

解 (c) (1) (i) $f(x) = x\log x - (x-1)\log(x+1)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log x + x\cdot\frac{1}{x} - \log(x+1) - (x-1)\cdot\frac{1}{x+1} \\ &= \log x - \log(x+1) + \frac{2}{x+1}\,, \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{x(x+1)^2}\,.$$

$x<1$ で $f''(x)<0$ より $f'(x)$ は $x \geqq 1$ で減少関数で

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\log\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+1}\right\} = 0\,.$$

$x \geqq 1$ で $f'(x) > 0$ となるから $f(x)$ は $x \geqq 1$ で増加関数である．$x \geqq 1$ のとき $f(x) \geqq f(0) = 0$ となる．

したがって，

$$x \log x \geqq (x-1)\log(x+1)\,. \qquad \cdots\cdots ①$$

(等号は $x = 1$ のときに成り立つ．)

(ii)　（ア）$n = 1$ のとき 左辺 $= (1!)^2 = 1 = 1^1 =$ 右辺 より 不等式は成り立つ．

(イ) $n = k(\geqq 1)$ のとき成立すると仮定すると，$(k!)^2 \geqq k^k$.

$$\begin{aligned}\{(k+1)!\}^2 - (k+1)^{k+1} &= (k+1)^2\left\{(k!)^2 - (k+1)^{k-1}\right\} \\ &\geqq (k+1)^2\left\{k^k - (k+1)^{k-1}\right\}\,.\end{aligned}$$

ここで, ①で $x = k$ とおくと $k\log k \geqq (k-1)\log(k+1)$ から $k^k \geqq (k+1)^{k-1}$.

よって，$\{(k+1)!\}^2 \geqq (k+1)^{k+1}$ となり $n = k+1$ のときも成り立つ．

(ア)，(イ) より，n が自然数のとき，$(n!)^2 \geqq n^n$ が成り立つ．

(2)　n 個の相加平均・相乗平均の不等式から

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}\,,$$

$$\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}\,.$$

よって，

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!\,.$$

(3)　(A) (省略)

(B) $1^3\,, 2^3\,, \ldots\,, n^3$ は相異なる正の数であるから

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3}{n} > \sqrt[n]{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot\cdots\cdots\cdot n^3}\,.$$

(A) の結果から　　$n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 > \sqrt[n]{(n!)^3}\,.$

両辺を n 乗して　　$n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n} > (n!)^3\,.$

■

$\boxed{4}$ 次の等式を証明せよ．ただし，$m\,,n$ は 0 以上の整数，$\alpha\,,\beta$ は実数とし，

$I(m\,,n)=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ とおく．

(1) $n \geqq 1$ のとき，$I(m,n)=-\dfrac{n}{m+1}I(m+1\,,n-1)$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

解 (1)

$$
\begin{aligned}
I(m\,,n) &= \int_\alpha^\beta \left\{\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}\right\}(\beta-x)^n\,dx \\
&= \left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\right]_\alpha^\beta \\
&\quad + \frac{1}{m+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}\cdot n(\beta-x)^{n-1}\,dx \\
&= \frac{n}{m+1}I(m+1\,,n-1)\,.
\end{aligned}
$$

(2) $I(m\,,n)=\dfrac{n}{m+1}I(m+1\,,n-1)$ の両辺を $n!m!$ で割ると

$$\frac{I(m\,,n)}{m!n!}=\frac{I(m+1\,,n-1)}{(m+1)!(n-1)!}\,.$$

$J(m\,,n)=\dfrac{I(m\,,n)}{m!n!}$ とおくと $J(m\,,n)=J(m+1\,,n-1)$．

これを繰り返し使うと

$$
\begin{aligned}
J(m\,,n) &= J(m+1\,,n-1)=J(m+2\,,n-2)=\cdots\cdots=J(m+n\,,0) \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{m+n+1}(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\,.
\end{aligned}
$$

よって　$I(m\,,n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ から

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\,.$$

■

$\boxed{5}$ 2 つの連続関数 $f(x)\,,g(x)$ に対して $(f*g)(x)$ を

$(f*g)(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt$ で定義する．

(1) $f(x)=x^m\,,g(x)=x^n$ ($m\,,n$ は負でない整数) とするとき

$$(f*g)(x)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\,x^{m+n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $m\,,n$ は負でない整数のとき

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が成り立つことを示せ．

解 m を非負の整数とし，n に関する数学的帰納法を用いる．

(1) (i) $n=0$ のとき，任意の非負の整数 m に対して，

$$(f*g)(x)=\int_0^x t^m\,dt=\frac{x^{m+1}}{m+1}\,,$$

$$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\,x^{m+n+1}=\frac{m!0!}{(m+0+1)!}x^{m+0+1}=\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

となるので，$(f*g)(x)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}x^{m+n+1}$ が成り立つ．

(ii) $n=k(\geqq 0)$ のとき成り立つと仮定すると，

じょのことから，m を任意の非負の整数とし，$f_m(x)=x^m\,,g_k(x)=x^k$ のとき

$$(f_m*g_k)(x)=\frac{m!k!}{(m+k+1)!}\,x^{m+k+1} \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

m を非負の整数とするとき，

$$(f_{m+1}*g_k)(x)=\frac{(m+1)!k!}{(m+1+k+1)!}\,x^{m+1+k+1}$$

が成り立つことに注意しよう．

$n=k+1$ のとき $g_{k+1}(x)=x^{k+1}$ とおくと

$$\begin{aligned}(f_m * g_{k+1})(x) &= \int_0^x t^m (x-t)^{k+1}\,dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{t^{m+1}}{m+1}\right)' (x-t)^{k+1}\,dt \\ &= \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}(x-t)^{k+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{m+1}}{m+1}(k+1)(x-t)^k(-1)\,dt \\ &= \frac{k+1}{m+1}\int_0^x t^{m+1}(x-t)^k\,dt \\ &= \frac{k+1}{m+1}(f_{m+1} * g_k)(x)\,dt \\ &= \frac{k+1}{m+1}\cdot\frac{(m+1)!k!}{(m+1+k+1)!}\,x^{m+1+k+1} \qquad (\because\ ①) \\ &= \frac{m!(k+1)!}{\{m+(k+1)+1\}!}\,x^{m+(k+1)+1}.\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より，任意の非負の整数 $m\,,n$ について，等式が成り立つ．

(2) (1) の結果

$$\int_0^x t^m(x-t)^n\,dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}\,x^{m+n+1}$$

を使うと

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx &= \int_0^{\beta-\alpha} t^m(\beta-\alpha-t)^n\,dt \quad (\ x-\alpha=t\ ) \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\end{aligned}$$

を得る． ■

$\boxed{6}$ 次の (a) または (b) または (c) の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(a) $f(x)$ を積分可能な関数とし，n を自然数とする．このとき，

$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$ は $f(x)$ を a から x まで n 回積分したものであることを示せ．

(b) $\displaystyle f_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,\, f_2(x) = \int_a^x f_1(t)\,dt\,, \cdots, f_k(x) = \int_a^x f_{k-1}(t)\,dt$

(k は 2 以上の自然数) のとき

(1) 部分積分法を用いて $\displaystyle f_2(x) = \int_a^x (x-t) f(t)\,dt$ となることをいえ．

(2) $\displaystyle f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1} f(t)\,dt$ (k は任意の自然数) となることを示せ． （’69 大阪教育大 (改題)）

(c) $\displaystyle F_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n f(t)}{n!}\,dt$ $(n \geqq 0)$ とおくとき，

$\displaystyle\frac{d}{dx}F_n(x) = F_{n-1}(x)$ $(n \geqq 1)$ となることを示せ．

(a)，(b)(2) は数学的帰納法で証明することになると思うが，$n=k$ のときの仮定の使い方が難しい．

解 (a) n に関する数学的帰納法で証明する．

(1) $n=1$ のとき，

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt = \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$$

は $f(x)$ を a から x まで 1 回積分したものである．

(2) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

「<u>任意</u> の積分可能な関数 $f(x)$ に関して，$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)\,dt$ は $f(x)$ を a から x まで k 回積分したものである．」

$n=k+1$ の場合を考える．

$\displaystyle F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおくと $F'(x) = f(x)\,, F(a) = 0$ が成り立ち，

$$
\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f(t)\,dt &= \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} F'(t)\,dt \\
&= \left[\frac{(x-t)^k}{k!} F(t)\right]_a^x - \int_a^x \frac{k(x-t)^{k-1}(-1)}{k!} F(t)\,dt \\
&= \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} F(t)\,dt\,.
\end{aligned}
$$

仮定から，これは，$F(x)$ を a から x まで k 回積分したものである．よって，これは，$f(x)$ を a から x まで $k+1$ 回積分したものであるから $n=k+1$ のときも成り立つ．

(1)，(2) からすべての自然数 n について成り立つ． ■

解 (b) (1) $f_2(x) = \int_a^x t' f_1(t)\,dt = \left[tf_1(t)\right]_a^x - \int_a^x tf_1'(t)\,dt$

$$
= xf_1(x) - \int_a^x tf(t)\,dt = x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x tf(t)\,dt = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt\,.
$$

(2) (i) $k=1$ のときは定義であるから成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，最初の関数を $f_1(x)$ から出発して k 回積分して得られる関数は $f_{k+1}(x)$ であるから，

$f_{k+1}(x) = \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{k-1} f_1(t)\,dt$ が成り立つ．

このとき，

$$
\begin{aligned}
&f_{k+1}(x) \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1} f_1(t)\,dt \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x \left(-\frac{(x-t)^k}{k}\right)' f_1(t)\,dt \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left\{\left[-\frac{(x-t)^k}{k} f_1(t)\right]_a^x + \frac{1}{k}\int_a^x (x-t)^k f_1'(t)\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f(t)\,dt \quad (\because \quad f_1(a)=0)
\end{aligned}
$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(1)，(2) より，すべての自然数 n について成り立つ． ■

解 (c)　$G_n(x)=\displaystyle\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt$ とおく．
二項定理を使い展開すると

$$G_n(x)=\int_a^x\left\{\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}(-t)^k\right\}f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\left\{{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}\int_a^x(-t)^k f(t)\right\}dt$$

よって，

$$\frac{d}{dx}G_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{(n-k){}_n\mathrm{C}_k x^{n-k-1}\int_a^x(-t)^k f(t)\,dt+{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}(-x)^k f(x)\right\}$$

ここで，$(n-k){}_n\mathrm{C}_k=(n-k)\cdot\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_k$,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}(-x)^k=(x-x)^n=0$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-1-k}\int_a^x(-t)^k f(t)\,dt\\&=n\int_a^x\left\{\sum_{k=0}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-1-k}(-t)^k\right\}f(t)\,dt\\&=n\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)\,dt=nG_{n-1}(x)\,.\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{d}{dx}G_n(x)=n\cdot G_{n-1}(x)$ が成り立つから，両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{d}{dx}F_n(x)=F_{n-1}(x)$$

を得る． ■

$\boxed{7}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a)　次の$\boxed{}$の中に適当な数または式を入れよ．また (イ)〜(ホ) の「 」で囲まれた文章の理由を，最後の (イ)〜(ホ) の解答のところで述べよ．

方程式　$x^2-3y^2=1$　$\cdots\cdots$①

を満たす整数の組 $(x\,,y)$ を求めることを考える（以下この方程式の整数解を単に解と略称する）．準備のために次のことを確かめておく．

(イ)　「$a\,,b\,,c\,,d$ が整数であって，$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ ならば，$a=c\,,b=d$ である.」

次に $(x\,,y)$ が解であれば，$(x\,,-y)\,,(-x\,,y)\,,(-x\,,-y)$ も解であることは，方程式①により明らかであるから，$(x\,,y)$ がともに負でない解を求めることが基本的である．それで，そのような解を求める手段として

$$(2+\sqrt{3}\,)^n=x_n+y_n\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots②$$

(x_n, y_n は負でない整数, $n=0\,,1\,,2\,,\ldots$) とおく．そうすると (イ) によって

$$x_0=1\,,y_0=0\,,x_1=2\,,y_1=1 \qquad \cdots\cdots③$$

$x_2=\boxed{}\,,y_2=\boxed{}\,,x_3=\boxed{}\,,y_3=\boxed{}$ である.

一方，$(2+\sqrt{3}\,)^2$ と $(2-\sqrt{3}\,)^2, (2+\sqrt{3}\,)^3$ と $(2-\sqrt{3}\,)^3$ などを比較することによって，一般に

$$(2-\sqrt{3}\,)^n=x_n-y_n\sqrt{3},\ n=0,1,\ldots \qquad \cdots\cdots④$$

であることがわかる．② と④ と $(2+\sqrt{3}\,)(2-\sqrt{3}\,)=1$ とを使って

$$1=(2+\sqrt{3}\,)^n(2-\sqrt{3}\,)^n={x_n}^2-3{y_n}^2$$

となるから，② で定まる (x_n, y_n) は方程式 ① の解であることがわかる．とくに，$x\,,y$ の一方が 0 となるような負でない解は，明らかに $x=1\,,y=0$ で，それは③の $(x_0\,,y_0)$ に外ならない.

次に (x_{n-1}, y_{n-1}) と (x_n, y_n) との関係を求めてみる $(n\geqq 1)$．

$$x_n+y_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3}\,)^n=(x_{n-1}+y_{n-1}\sqrt{3}\,)(2+\sqrt{3}\,)=\boxed{}$$

ゆえに，$x_n=\boxed{}\,,y_n=\boxed{}$

したがって，$(x_0\,,y_0)$ から出発して, 負でない解 $(x_1\,,y_1)\,,(x_2\,,y_2)\,,$ $\ldots\,,(x_n\,,y_n)$ を順次求めて行くことができる．しかも $y_1<y_2<y_3<\ldots$ である.

以上のことで負でない解を多数みつけたのであるが，これらで負でない解が尽くされているかどうかを次に吟味する.

いま任意の正の解 $(x\,,y)\,,(x>0\,,y>0)$ をとると

$$(x+y\sqrt{3}\,)(2-\sqrt{3}\,)=(2x-3y)+(2y-x)\sqrt{3}$$

(ロ)　「$x'=2x-3y\,,y'=2y-x$ とおくとき，$(x'\,,y')$ も解である.」

(ハ)　「そして，$x>x'>0\,,y>y'\geqq 0$ である.」

(ニ)　「それで，任意の正の解 $(x\,,y)$ から出発して，(ロ) における $(x'\,,y')$ を求める操作を順次行うことによって，③に示す負でない解 $(x_0\,,y_0)$ に達する.」

(ホ)　「したがって，任意の負でない解 $(x\,,y)$ は式②によって定まる $(x_n\,,y_n)(n=0\,,1\,,2\,,\dots)$ のどれか 1 つである.」　（'67 京都大）

(b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

(1)　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で，$x^2-3y^2=1,\ x>0,\ y\geqq 1$ ならば，

$x'^2-3y'^2=1,\ 0\leqq y'<y$ が成立することを示せ.

(2)　$x,\ y$ が $x^2-3y^2=1$ を満たす自然数ならば，ある自然数 n をとると

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となることを示せ.　（'88 京都大）

(a) の (ロ), (ハ), (ニ), (ホ) の内容を行列を用いた問題に直したのが (b) である．(b)(2) からペル方程式 $x^2-3y^2=1$ のすべての自然数解は $\left(A^{-1}\right)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(n=1\,,2\,,\dots)$ で与えられることになる.

解 (a) (イ) の理由　$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ から $(b-d)\sqrt{3}=c-a$ $\cdots\cdots(*)$

$d-b\fallingdotseq 0$ と仮定すると

$$\sqrt{3}=\frac{c-a}{b-d} \qquad \cdots\cdots(**)$$

$a\,,b\,,c\,,d$ は整数だから，$\dfrac{c-a}{b-d}$ は有理数である．したがって，$(**)$ より $\sqrt{3}$ は有理数となり，無理数であることに矛盾する.

よって，$b-d=0$ となる．これを使うと，$(*)$ より $c-a=0$．ゆえに，$a=c\,,b=d$.

(ロ) の理由　$x' = 2x - 3y\,, y' = 2y - x$ だから

$$
\begin{aligned}
(x')^2 - 3(y')^2 &= (2x - 3y)^2 - 3(2y - x)^2 \\
&= (4x^2 - 12xy + 9y^2) - (12y^2 - 12xy + 3x^2) \\
&= x^2 - 3y^2 = 1\,.
\end{aligned}
$$

(ハ) の理由

$$
\begin{aligned}
x' = 2x - 3y &= \frac{4x^2 - 9y^2}{2x + 3y} \\
&= \frac{4x^2 - 3(x^2 - 1)}{2x + 3y} \quad (\because \quad ①) \\
&= \frac{x^2 + 3}{2x + 3y} > 0\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' = 2y - x &= \frac{4y^2 - x^2}{2y + x} \\
&= \frac{4y^2 - (3y^2 + 1)}{2y + x} \quad (\because \quad ①) \\
&= \frac{y^2 - 1}{2y + x} \geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

次に，$x' = 2x - 3y\,, y' = 2y - x$ を $x\,, y$ について解けば，$x = 2x' + 3y'\,, y = x' + 2y'$ となるから

$$x = 2x' + 3y' > x'\,,\ y = x' + 2y' > y'\,.$$

よって，$x > x' > 0\,, y > y' \geqq 0\,.$

(ニ) の理由　任意の正の解 (x, y) から（ロ）の操作で得られる解 $(x_{(1)}\,, y_{(1)})$ は $x > x_{(1)} > 0\,, y > y_{(1)} \geqq 0$ を満たすから，この操作を繰り返すと

$$y > y_{(1)} > y_{(2)} > \cdots > y_{(n-1)} > y_{(n)} = 0\,;\ x > x_{(1)} > x_{(2)} > \cdots > x_{(n)} > 0$$

となる n が存在する．$y_{(n)} = 0\,, x_{(n)} > 0\,, {x_{(n)}}^2 - 3{y_{(n)}}^2 = 1$ から $x_{(n)} = 1$ となり $(x_{(n)}\,, y_{(n)}) = (x_0\,, y_0)$ したがって n 回の操作で $(x_0\,, y_0)$ に達する．

(ホ) の理由　任意の負でない解 $(x\,, y)$ からある回数 (n とする)(ロ) の操作を行えば，$(x_0\,, y_0)$ に達するから

$$(x + y\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^2 = x_0 + y_0 = 1\,.$$

よって

$$x+y\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}$$

から，$x=x_n\,,y=y_n$．ゆえに，任意の負でない解 $(x\,,y)$ は式②によって定まる $(x_n\,,y_n)(n=0\,,1\,,2\,,\dots)$ のどれか1つである．

$\boxed{}$の中に入る数または式

$7\,,4\,,26\,,15\,,2x_{n-1}+3y_{n-1}+(x_{n-1}+2y_{n-1})\sqrt{3}\,,2x_{n-1}+3y_{n-1}\,,x_{n-1}+2y_{n-1}$

■

解 (b) (1)　$x'=2x-3y\,,y'=2y-x$ だから

$$\begin{aligned}(x')^2-3(y')^2&=(2x-3y)^2-3(2y-x)^2\\&=(4x^2-12xy+9y^2)-(12y^2-12xy+3x^2)\\&=x^2-3y^2=1\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'=2y-x&=\frac{4y^2-x^2}{2y+x}\\&=\frac{4y^2-(3y^2+1)}{2y+x}\quad(\because\quad x^2-3y^2=1)\\&=\frac{y^2-1}{2y+x}\geqq 0\quad(\because\quad y\geqq 1)\,.\end{aligned}$$

次に，$x'=2x-3y\,,y'=2y-x$ を $x\,,y$ について解けば，$x=2x'+3y'\,,y=x'+2y'$ となるから

$$y=x'+2y'>y'\,.$$

よって，$0\leqq y'<y$．

(2)　$x\,,y$ が自然数ならば，

$$\begin{aligned}x'=2x-3y&=\frac{4x^2-9y^2}{2x+3y}\\&=\frac{4x^2-3(x^2-1)}{2x+3y}\quad(\because\quad x^2-3y^2=1)\\&=\frac{x^2+3}{2x+3y}>0\,.\end{aligned}$$

次に，$x' = 2x - 3y\,, y' = 2y - x$ を $x\,, y$ について解けば，$x = 2x' + 3y'\,, y = x' + 2y'$ となるから

$$x = 2x' + 3y' > x'\,.$$

よって，$x > x' > 0\,, y > y' \geqq 0\,.$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ とおくと，y は自然数だから

$$y > y_1 > y_2 > \cdots > y_{n-1} > y_n = 0\,;\ x > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 0$$

となる n が存在する．

$(x_n\,, y_n)$ は $x_n^2 - 3y_n^2 = 1\,, x_n > 0$ を満たすから，$y_n = 0$ のとき，$x_n = 1\,.$
したがって

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる． ■

類題が明治大（'95），東京慈恵会医大 ('83) で出題されている．

類題 20 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく．$x^2 - 3y^2 = 1$ ならば，${x_1}^2 - 3{y_1}^2 = 1$ であることを示せ．

(2) 等式 $x^2 - 3y^2 = 1$ を満たす正の整数 $x\,, y$ に対して
$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば $y > y_1 \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}\,, \{b_n\}$ を $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(n = 1\,, 2\,, \ldots)$ によって定めると，等式 $(2 + \sqrt{3}\,)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が成り立つことを示せ．

(4) 等式 $x^2 - 3y^2 = 1$ をみたす正の整数の組 (x, y) は (4) で与えられた整数の組 (a_n, b_n) $(n = 1\,, 2\,, \ldots)$ のどれかに等しいことを証明せよ． （'95 明治大）

類題 21　正整数 α, β が $\alpha^2 - 3\beta^2 = 1$ をみたすとき，(α, β) は

$$x^2 - 3y^2 = 1 \cdots\cdots \text{(I)} \qquad \text{の正整数解であるという．}$$

(I) の正整数解 (α, β) のなかで β が最小であるものを (x_1, y_1) で表すと $x_1 = (\quad), y_1 = (\quad)$ となる．この x_1, y_1 を用いて

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ と定める．}$$

(1)　すべての n $(n = 1, 2, \ldots)$ について，(x_n, y_n) は (I) の正整数解であることを証明せよ．

(2)　(α, β) が (I) の正整数解で $\beta > 1$ のとき，α', β' が

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

をみたせば，(α', β') は (I) の正整数解であることを示せ．

(3)　(α, β) が (I) の正整数解なら，$\alpha = x_n, \beta = y_n$ となる自然数 n があることを証明せよ．

（'83　東京慈恵会医大）

$\boxed{8}$ $n=1,2,\ldots$ に対して $(2+\sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$ により自然数 $x_n\,, y_n$ を定義する．

(1) $a\,, b\,, c\,, d$ が有理数で $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ ならば $a=c, b=d$ であることを示せ．

(2) $x_{n+1}\,, y_{n+1}$ を $x_n\,, y_n$ で表せ．

(3) $x_{n+1}>x_n\,, y_{n+1}>y_n$ を示せ．

(4) $x_n^2-3y_n^2=1$ を示せ．

(5) $(2-\sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3}$ を示せ．

(6) $(2-\sqrt{3})^n$ は，適当な自然数 m を用いて $(2-\sqrt{3})^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ と表せることを示せ．

(7) $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{3}$ のよい近似値であること，すなわち，

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{3}\right| < \left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{3}\right|$$

が成り立つことを示せ．

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ を求めよ．

(9) $(2+\sqrt{3})^n$ の小数部分を求めよ．

解 $(2+\sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$①

(1) $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ を変形すると

$$(b-d)\sqrt{3}=c-a \qquad \cdots\cdots(*)$$

$b-d \fallingdotseq 0$ のとき，$\sqrt{3}=\dfrac{c-a}{b-d}$ となる．

$a\,, b\,, c\,, d$ は有理数だから $\dfrac{c-a}{b-d}$ も有理数で，これと等しい $\sqrt{3}$ は有理数となり，無理数であることに反する．

よって，$b-d=0$ となり，これを $(*)$ に代入すると $c-a=0$ を得る．

(2)
$$\begin{aligned} x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{3} &= (2+\sqrt{3})^{n+1} \\ &= (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{n} \\ &= (2+\sqrt{3})(x_n+y_n\sqrt{3}) \\ &= 2x_n+3y_n+(x_n+2y_n)\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

(1) の結果から，

$$x_{n+1}=2x_n+3y_n\ ,\ y_{n+1}=x_n+2y_n\,.$$

(3)　(2) の結果から $x_{n+1}-x_n=x_n+2y_n>0\,,y_{n+1}-y_n=x_n+y_n>0$ であるから $x_{n+1}>x_n\,,y_{n+1}>y_n$ が成り立つ.

(4)　$x_{n+1}^2-3y_{n+1}^2=(2x_n+3y_n)^2-3(x_n+2y_n)^2=x_n^2-3y_n^2\,.$
したがって，$x_1=2\,,y_1=1$ を使うと

$$x_n^2-3y_n^2=x_1^2-3y_1^2=2^2-3\cdot 1^2=1\,.$$

よって，

$$x_n^2-3y_n^2=1\,.$$

(5)　$x_n^2-3y_n^2=1$ から $(x_n-y_n\sqrt{3})(x_n+y_n\sqrt{3})=1$ が成り立つから

$$x_n-y_n\sqrt{3}=\frac{1}{x_n+y_n\sqrt{3}}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^n}=(2-\sqrt{3})^n\,.$$

よって，

$$(2-\sqrt{3})^n=x_n-y_n\sqrt{3}\,. \qquad \cdots\cdots②$$

(6)　(5) から

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{3})^n &= x_n-y_n\sqrt{3} \\ &= \sqrt{x_n^2}-\sqrt{3y_n^2} \\ &= \sqrt{x_n^2}-\sqrt{x_n^2-1} \quad (\because \quad x_n^2-3y_n^2=1)\,. \end{aligned}$$

$m=x_n^2$ とおくと，m は自然数で $(2-\sqrt{3})^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ と表せる.

(7)　$x_n^2 - 3y_n^2 = 1$ を変形した $x_n - y_n\sqrt{3} = \dfrac{1}{x_n + y_n\sqrt{3}} > 0$ から

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{3} &= \frac{1}{y_n(x_n + y_n\sqrt{3}\,)} \\
&> \frac{1}{y_{n+1}(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{3}\,)} \quad (\because \quad x_{n+1} > x_n\,, y_{n+1} > y_n) \\
&= \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{3} > 0\,.
\end{aligned}$$

よって，

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{3}\right| < \left|\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{3}\right|$$

が成り立つ．

(8)　((5) から $x_n/y_n \to \sqrt{3}$ の予測がつくが（5）と同様な変形をする場合には，$|x_{n+1}/y_{n+1} - \sqrt{3}| < r|x_n/y_n - \sqrt{3}|$ となる $r\,(0 < r < 1)$ を見つけなければならない．)

(5) で用いた変形 $x_{n+1} - y_{n+1}\sqrt{3} = \dfrac{1}{x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{3}}$ と $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})(x_n + y_n\sqrt{3})$ を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{3} &= \frac{1}{y_{n+1}(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{y_{n+1}(2+\sqrt{3})(x_n + y_n\sqrt{3})} \\
&< \frac{1}{y_n(2+\sqrt{3})(x_n + y_n\sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{2+\sqrt{3}}\left(\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{3}\right) \\
&= (2-\sqrt{3})\left(\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{3}\right)\,.
\end{aligned}$$

よって，　$0 < \dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{3} < (2-\sqrt{3})\left(\dfrac{x_n}{y_n} - \sqrt{3}\right)$ が成り立つから，

$$0 < \frac{x_n}{y_n} - \sqrt{3} \leqq (2-\sqrt{3})^{n-1}\left(\frac{x_1}{y_1} - \sqrt{3}\right) = (2-\sqrt{3})^n$$

を得る． $\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n=0$ であるから $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{3}=0$ すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{3}\,.$$

(9)　①+②から $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2x_n$.

これを変形すると

$$(2+\sqrt{3})^n=2x_n-(2-\sqrt{3})^n=2x_n-1+1-(2-\sqrt{3})^n\,.$$

$0<(2-\sqrt{3})^n<1$ であるから，$(2+\sqrt{3})^n$ の少数部分は $1-(2-\sqrt{3})^n$ ，

整数部分は $2x_n-1$ となる． ■

[注意]　$(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}$ を満たす自然数 $n\,,y_n$ が存在することは帰納法でも証明できるが，二項定理を使って示すことができる．

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-k}(\sqrt{3})^k\\&=\sum_{k:\text{偶数}}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-k}(\sqrt{3})^k+\sum_{k:\text{奇数}}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-k}(\sqrt{3})^k\\&=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_n\mathrm{C}_{2m}2^{n-2m}3^m+\sqrt{3}\cdot\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-2m-1}3^m\end{aligned}$$

となるから

$$x_n=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_n\mathrm{C}_{2m}2^{n-2m}3^m\ ,\ y_n=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}_n\mathrm{C}_k2^{n-2m-1}3^m$$

とおくと，$x_n\,,y_n$ は自然数で $(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}$ を満たす． ■

[別解] (5)　数学的帰納法で証明することもできる．

$n=1$ のとき $x_1=2\,,y_1=1$ より $2-\sqrt{3}=x_1-y_1\sqrt{3}$ は成り立つ．

$n=k$ のとき $(2-\sqrt{3})^k=x_k-y_k\sqrt{3}$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^k&=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k\\&=(2-\sqrt{3})(x_k-y_k\sqrt{3})\\&=(2x_k+3y_k)-(x_k+2y_k)\sqrt{3}\\&=x_{k+1}-y_{k+1}\sqrt{3}\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも成り立つ．
したがって，$(2-\sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3}$ が成り立つ．
(8)　($x_n\,, y_n$ が求まるからこれを利用することもできる．)

$$x_n + \sqrt{3}\,y_n = (2+\sqrt{3}\,)^n,\ x_n - \sqrt{3}\,y_n = (2-\sqrt{3}\,)^n$$

から

$$x_n = \frac{1}{2}\left\{(2+\sqrt{3}\,)^n + (2-\sqrt{3}\,)^n\right\},\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{(2+\sqrt{3}\,)^n - (2-\sqrt{3}\,)^n\right\}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} &= \sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2+\sqrt{3}\,)^n + (2-\sqrt{3}\,)^n}{(2+\sqrt{3}\,)^n - (2-\sqrt{3}\,)^n} \\ &= \sqrt{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+(2-\sqrt{3}\,)^{2n}}{1-(2-\sqrt{3}\,)^{2n}} = \sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

■

類題 22　平面上に次の条件で定められる点列 $\mathrm{P}_0(x_0\,, y_0)\,, \mathrm{P}_1(x_1\,, y_1)\,, \mathrm{P}_2(x_2\,, y_2)\,,$ $\ldots\,, \mathrm{P}_n(x_n\,, y_n)\,, \ldots$ がある．

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \\ y_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases} \qquad (n = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)$$

(1)　適当な数 a をとると，数列 $\{x_n + ay_n\}$ $(n=0\,,1\,,2\,,\ldots)$ が等比数列となる．このような a を定めよ．

(2)　$n\to\infty$ のとき直線 OP_n (O は原点) の傾きはどんな値に近づくか．

（'69 慶応大・工）

類題 23　正の整数 n に対して $(1+\sqrt{2}\,)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$ が成り立つように整数 $x_n\,, y_n$ を定める．

(1)　$x_{n+1}\,, y_{n+1}$ を $x_n\,, y_n$ で表せ．

(2)　n が偶数なら ${x_n}^2 - 2{y_n}^2 = 1$，n が奇数なら ${x_n}^2 - 2{y_n}^2 = -1$ であることを証明せよ．

(3)　任意の n に対して，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値であることを証明せよ．

（'84 一橋大）

類題 24　自然数 n に対して，a_n と b_n を　$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$　を満たす自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 2$ のとき，a_n および b_n を a_{n-1} と b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$a_n^2 - 2b_n^2$ を求めよ．

(3)　(2) を用いて，$\sqrt{2}$ を誤差 $\dfrac{1}{10000}$ 未満で近似する有理数を 1 つ求めよ．

（'04 名古屋大）

類題 25(1)　$n = 1, 2, \ldots$ に対して $(\sqrt{2}+1)^n = a_n + \sqrt{2}\,b_n$ により自然数 a_n, b_n を定義する．このとき，$(\sqrt{2}-1)^n$ を a_n, b_n を用いて表せ．また，${a_n}^2 - 2{b_n}^2$ の値を求めよ．

(2)　適当な自然数 k_n を用いて，$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{k_n} - \sqrt{k_n - 1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ と表せることを示せ．　（'88 慶応大・理工）

類題 26　自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$(2-\sqrt{3})^n$ という形の数を考える．これらの数はいずれも，それぞれ適当な自然数 m が存在して $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ という表示をもつことを証明せよ．　（'94 東工大 (後期)）

類題 27　n を自然数とするとき

(1)　$(2+\sqrt{2})^n$ は適当な自然数 a, b を用いれば $a + b\sqrt{2}$ と表されることを証明せよ．

(2)　上の a, b を用いれば，次の等式および不等式が成立することを証明せよ．

　[1]　$(2-\sqrt{2})^n = a - b\sqrt{2}$

　[2]　$2a - 1 < (2+\sqrt{2})^n < 2a$

（'70 慶応大・医）

$\boxed{9}$ 関数 $f(x)=x^4-x^3$ について，次の問いに答えよ．

(1) 直線 $y=mx+n$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 2 点で接するような定数 $m\,,n$ の値を求めよ．

(2) (1) で求めた直線 $y=mx+n$ と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) は微分法よりも恒等式を使う方が良い．

解 1 (1) $y=f(x)$ と $y=mx+n$ の相異なる 2 接点の x 座標を $\alpha\,,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

$$x^4-x^3-(mx+n)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}^2\\&=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\}x^2-2(\alpha+\beta)\alpha\beta x+(\alpha\beta)^2\,.\end{aligned}$$

係数を比較して

$$-1=-2(\alpha+\beta)\,,\ 0=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\,,\ -m=-2(\alpha+\beta)\alpha\beta\,,\ -n=(\alpha\beta)^2\,.$$

したがって $\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}\,,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{8}\,,\ m=-\dfrac{1}{8}\,,\ n=-\dfrac{1}{64}\,.$

$\alpha\,,\,\beta$ は $x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}=0$ の解であるから $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\,,\ \beta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ となる．

よって $m=-\dfrac{1}{8}\,,\ n=-\dfrac{1}{64}\,.$

(2) 求める面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{x^4-x^3-(mx+n)\right\}dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx\,.$$

ここで，$x-\alpha=t\,,\gamma=\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\beta-\alpha}t^2\left\{t-(\beta-\alpha)\right\}^2dt=\int_0^\gamma t^2(t-\gamma)^2\,dt\\&=\int_0^\gamma\{t^4-2\gamma t^3+\gamma^2t^2\}\,dt=\left[\frac{t^5}{5}-\frac{1}{2}\gamma t^4+\frac{\gamma^2}{3}\right]_0^\gamma\\&=\frac{\gamma^5}{30}=\frac{3\sqrt{3}}{320}\,.\end{aligned}$$

■

解 2 (1)　$y=x^4-x^3$ より $y'=4x^3-3x^2$.

接点を $\mathrm{A}(\alpha\,,\alpha^4-\alpha^3)$ とおくと，A における接線を l とすると，l の方程式は，$y=(4\alpha^3-3\alpha^2)x+\alpha^4-\alpha^3$ すなわち，

$$y=(4\alpha^3-3\alpha^2)x-3\alpha^4+2\alpha^3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$y=x^4-x^3$ と l から y を消去すると

$$x^4-x^3-(4\alpha^3-3\alpha^2)x+3\alpha^4-2\alpha^3=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x-\alpha)^2\{x^2+(2\alpha-1)x+3\alpha^2-2\alpha\}=0\,.$$

l が曲線と A 以外の点 $\mathrm{B}(\beta\,,\beta^4-\beta^3)$ で再び接するのは，方程式

$$x^2+(2\alpha-1)x+3\alpha^2-2\alpha=0\,. \qquad \cdots\cdots ②$$

が α 以外の重解をもつときである．α を解にもたないから，

$$\alpha^2+(2\alpha-1)\alpha+3\alpha^2-2\alpha \fallingdotseq 0\,,\quad 6\alpha^2-3\alpha \fallingdotseq 0\,.$$

ゆえに，　$\alpha \fallingdotseq 0\,,\dfrac{1}{2}$.

②が重解をもつから

$$D=(2\alpha-1)^2-4(3\alpha^2-2\alpha)=0\,,\quad 8\alpha^2-4\alpha-1=0\,.$$

ゆえに，　$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{4}$.

β は②の重解であるから，$2\beta=-(2\alpha-1)$ から $\beta=\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{4}$ となる．

以下 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\,,\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ とする．

$4\alpha^3-3\alpha^2$ を $8\alpha^2-4\alpha-1$ で割ると，商は $\dfrac{1}{2}\alpha-\dfrac{1}{8}$，余りは $-\dfrac{1}{8}$，

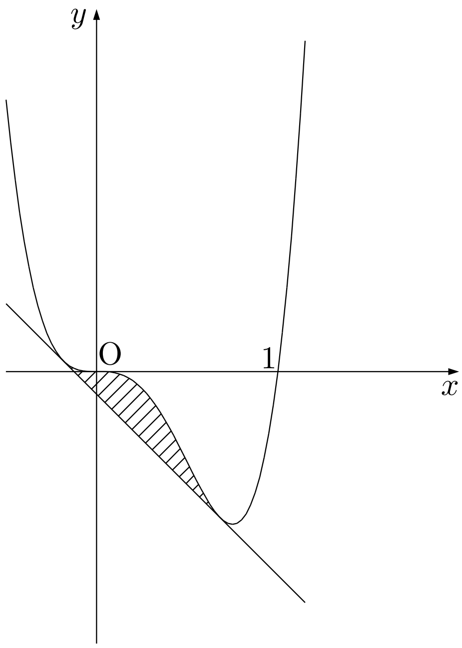
$-3\alpha^4+2\alpha^3$ を $8\alpha^2-4\alpha-1$ で割ると，商は　$-\dfrac{3}{8}\alpha^2+\dfrac{1}{16}\alpha-\dfrac{1}{64}$，余りは $-\dfrac{1}{64}$ であるから，接線の方程式は $y=-\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{64}$ となる．

よって，

$$m=-\frac{1}{8}\,,\,n=-\frac{1}{64}\,.$$

(2)　求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \left\{x^4 - x^3 - (mx+n)\right\}\, dx \\
&= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\, dx \\
&= \frac{2!2!}{(2+2+1)!}(\beta-\alpha)^5 \\
&= \frac{1}{30}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{320}\,.
\end{aligned}
$$



■

［注意］　解 2(2) では，問題 B $\boxed{4}$ の結果を使用した．解 1(2) ではこの公式を使用せずに解いてみた．

類題 28　曲線 $y = x^4 - 2x^3 + x + 2$ について各問に答えよ．

(1)　この曲線に異なる 2 点で接する直線の方程式を求めよ．

(2)　(1) で求めた直線と平行な直線がこの曲線と異なる 4 点で交わるとき，その交点を左から P，Q，R，S とする．このとき PQ = RS が成り立つことを示せ．（’97 同志社大）

$\boxed{10}$ 次の 4 次関数を $f(x)$ とする．$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

いま，直線 $y=px+q$ は曲線 $y=f(x)$ と異なる 2 点で接しているとする．このとき，

(1) 次のような正数 h があることを示せ．
直線 $y=px+q+h$ は曲線 $y=f(x)$ と異なる 4 点で交わる．

(2) 上の (1) のような h に対して，直線 $y=px+q+h$ と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれた領域のうちで，領域 $y \leqq px+q+h$ 内にある 2 つの領域の面積が等しいことを示せ．（'04 京都府立医大）

(3) 上の (1) のような h に対して，直線 $y=px+q+h$ と曲線 $y=f(x)$ との 4 交点を左から P，Q，R，S とすると，PQ=RS が成り立つことを示せ．

解 $C:y=f(x)\,,\,l:y=px+q+h$ とおく．

(1) C と $y=px+q$ のグラフの 2 接点の x 座標を $\alpha\,,\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと

$$f(x)-(px+q)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

とかける．

C と l から y を消去すると $f(x)=px+q+h$ ゆえに，$f(x)-(px+q)=h$．よって，

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=h$$

となるから，$g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ とおくと，C と l の共有点の x 座標は $y=g(x)$ のグラフと 直線 $y=h$ のグラフの共有点の x 座標となる．

$$g'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta)=2(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta)$$

x		α		$\frac{\alpha+\beta}{2}$		β	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗		↘	0	↗

したがって，$0<h<g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ すなわち $0<h<\dfrac{(\beta-\alpha)^4}{16}$ のとき C と l は 4 点で交わる．

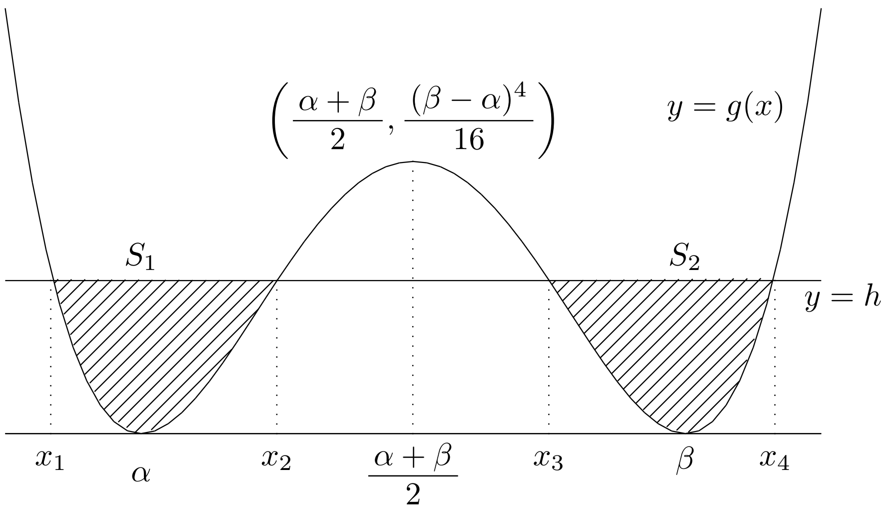
(2)　C と l は 4 点で交わるので，交点の x 座標を x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ とおき，直線 $y = px + q + h$ と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれた領域のうちで，領域 $y \leqq px + q + h$ 内にある 2 つの領域の面積を

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \{px + q + h - f(x)\}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \{h - (x - \alpha)^2(x - \beta)^2\}\,dx$$

$$S_2 = \int_{x_3}^{x_4} \{px + q + h - f(x)\}\,dx = \int_{x_3}^{x_4} \{h - (x - \alpha)^2(x - \beta)^2\}\,dx$$

とおき，$S_1 = S_2$ を示す．

S_1, S_2 は直線 $y = h$ と曲線 $y = g(x)$ とで囲まれた領域のうちで，領域 $y \leqq h$ 内にある 2 つの領域の面積を表すから，$S_1 = S_2$ を示すためには，$y = g(x)$ のグラフが直線 $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ に関して対称なことを言えばよい．



$$\begin{aligned} g(x) &= \left\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\right\}^2 \\ &= \left\{\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \alpha\beta\right\}^2 \end{aligned}$$

と変形できるので，

$$g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right)=\left\{x^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\alpha\beta\right\}^2\,,$$

$$g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x\right)=\left\{x^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\alpha\beta\right\}^2$$

よって，$g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-x\right)=g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+x\right)$ が成り立ち，$y=g(x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ に関して対称である．

したがって， $S_1=S_2$ が成り立つ．

(3)　C と l の 4 交点を左から P，Q，R，S とすると
PQ= $\sqrt{p^2+1}|x_2-x_1|$, RS= $\sqrt{p^2+1}|x_4-x_3|$ で $x_2-x_1=x_4-x_3$ が成り立つので，PQ=RS となる． ■

［注意］　$x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4$ を具体的に求めることができる
$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=h$ から $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=\pm\sqrt{h}$

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\pm\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)^2\pm4\sqrt{h}}}{2}$$

$x_1<x_2<x_3<x_4$ より

$$x_1=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)^2+4\sqrt{h}}}{2}\,,\ x_2=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)^2-4\sqrt{h}}}{2}$$

$$x_3=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)^2-4\sqrt{h}}}{2}\,,\ x_4=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\sqrt{(\beta-\alpha)^2+4\sqrt{h}}}{2}$$

類題 29　すべての実数 x に対して，$|f'(x)| \leqq \dfrac{1}{2}$ なるとき，

(1)　方程式 $f(x)-x=0$ がただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ．
この実数解を α とするとき，

(2)　無限数列 $\{a_n\}$ が $a_n = f(a_{n-1})(n=1\,,2\,,\ldots)$ を満たすならば，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つことを証明せよ．

（'61　東工大 (改題)）

一般化して次のことを示す．（東工大の問題は $k=1/2$ としたものである．）

$\boxed{11}$　すべての実数 x に対して，$|f'(x)| \leqq k < 1$ を満たす定数 k が存在するとき，

(1)　方程式 $f(x)-x=0$ がただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ．
この実数解を α とするとき，

(2)　無限数列 $\{a_n\}$ が $a_n = f(a_{n-1})(n=1\,,2\,,\ldots)$ を満たすならば，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つことを証明せよ．

(3)　a を定数，q を 1 より小さい正の定数とする．

(i)　方程式 $x = q\sin x + a$ はただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(ii)　数列 $\{x_n\}$ を $x_0=0\,, x_n = q\sin x_{n-1} + a$　$(n=1\,,2\,,\ldots)$ と定めるとき，
数列 $\{x_n\}$ は (i) の実数解に収束することを示せ．

解 (1)　$F(x) = x - f(x)$ とおけば $F'(x) = 1 - f'(x) \geqq 1-k > 0$ となるから
$F(x)$ は増加関数である．

次に，平均値の定理から，$x \fallingdotseq 0$ のとき

$$f(x)-f(0) = xf'(t)\,,\ 0<t<x \text{ または } x<t<0$$

となる t が存在する．仮定より

$$|f(x)-f(0)| \leqq k|x|\,.$$

（この不等式は $x=0$ のときも成り立つ．）
したがって，$f(0)-k|x| \leqq f(x) \leqq f(0)+k|x|$ から

$$f(0)-k|x|-x \leqq f(x)-x \leqq f(0)+k|x|-x\,,$$

$$-f(0)-k|x|+x \leqq F(x) \leqq -f(0)+k|x|+x\,.$$

$0 < k < 1$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\{x - k|x| - f(0)\} = \lim_{x\to\infty}\{(1-k)x - f(0)\} = \infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\{x + k|x| - f(0)\} = \lim_{x\to-\infty}\{(1-k)x - f(0)\} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty\,,\ \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty\,.$$

$F(x)$ は増加関数であるから，$F(x) = 0$ すなわち $f(x) = x$ はただ 1 つの実数解をもつ．

(2)　平均値の定理から

$$a_n - \alpha = f(a_{n-1}) - f(\alpha) = f'(t_{n-1})$$

となる t_{n-1} が a_{n-1} と α の間に存在する．（$a_{n-1} = \alpha$ のときには t_{n-1} は何でもよい．）$|f'(t_{n-1})| \leqq k$ を使うと $|a_n - \alpha| \leqq k|a_{n-1} - \alpha|$.
これを繰り返し使うと

$$|a_n - \alpha| \leqq k|a_{n-1} - \alpha| \leqq k^2|a_{n-2} - \alpha| \leqq \cdots \leqq k^n|a_0 - \alpha|\,.$$

$k^n|a_0 - \alpha| \to 0\ (n \to \infty)$ であるから $|a_n - \alpha| \to 0\ (n \to \infty)$.
したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

(3)　$f(x) = q\sin x + a$, $F(x) = x - (q\sin x + a)$ とおく．

(i)　$F'(x) = 1 - q\sin x$. ところで $0 < q < 1$ であるから，$F'(x) > 0$.
よって，$F(x)$ は増加関数である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ であるから，$F(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ．

(ii)　方程式 $x = q\sin x + a$ の実数解を α とおくと，$x_n - \alpha = f(x_{n-1}) - f(\alpha)$.
また，$f'(x) = q\cos x$ より $|f'(x)| \leqq q$ が成り立つ．
平均値の定理から

$$x_n - \alpha = f(x_{n-1}) - f(\alpha) = f'(t_{n-1})$$

となる t_{n-1} が x_{n-1} と α の間に存在する．（$x_{n-1} = \alpha$ のときには t_{n-1} は何でもよい．）$|f'(t_{n-1})| \leqq q$ を使うと

$$|x_n - \alpha| \leqq q|x_{n-1} - \alpha|\,.$$

これを繰り返し使うと

$$|x_n - \alpha| \leqq q|a_{n-1} - \alpha| \leqq q^2|x_{n-2} - \alpha| \leqq \cdots \leqq q^n|x_0 - \alpha| = q^n|\alpha|\,.$$

$q^n|\alpha| \to 0\ (n \to \infty)$ であるから $|x_n - \alpha| \to 0\ (n \to \infty)$.
したがって，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha\,.$$

■

類題を 2 題あげておく．

類題 30　関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$ とする．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　$x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを証明せよ．

(2)　x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,1,\dots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める．$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ．　('05 東京大・理系)

類題 31　関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ をもち，C は 1 より小さい正の定数とする．すべての実数 x に対して，$|f'(x)|\leqq C$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1)　すべての実数 x に対して，$|f(x)|\leqq|f(0)|+C|x|$ が成り立つことを示せ．

(2)　$f(x)=x$ を満たす実数 x がただ 1 つだけ存在することを示せ．

(3)　$f(x)=x$ を満たすただ 1 つの実数を α とする．すべての実数 x に対して，$|f(x)-\alpha|\leqq C|x-\alpha|$ が成り立つことを示せ．

(4)　初項 a_1 を任意の実数として，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$　$(n=1,2,3,\dots)$ で定める．このとき，数列 $\{a_n\}$ は α に収束することを示せ．

(5)　$g(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x^2}\frac{1}{3t^2+1}\,dt$ とするとき，すべての実数 x に対して，$|g'(x)|\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が成り立つことを示せ．また，不等式 $g(x)\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}|x|+k$ がすべての実数 x に対して成り立つ定数 k のうち最小の値を求めよ．　('06 山梨大・医)

$\boxed{12}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a) $g_0(x)=1\,,\,g_1(x)=x\,,\,g_2(x)=\dfrac{x(x-1)}{2!}\,,\,\ldots\,,$

$g_n(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$ と定義する．

(1) すべての整数 k に対して $g_n(k)$ は 整数であることを示せ．

(2) 任意の n 次多項式 $f(x)$ は $f(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_ig_i(x)$ の形で表せることを示せ．

(3) n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする．
$P(0)\,,P(1)\,,\ldots\,,P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ．

(b) (1) $n(\geqq 1)$ 次の整式 $P(x)$ に対して $P(x+1)-P(x)$ は $n-1$ 次の整式となることを示せ．

(2) n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする．
$P(0)\,,P(1)\,,\ldots\,,P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ．

解 (a)(1) $k\geqq n$ のとき　$g_n(k)={}_kC_n$ は整数である．

$0\leqq k<n$ のとき　$g_n(k)=0$ は整数である．

$k<0$ のとき　$l=-k$ とおくと

$$\begin{aligned}g_n(k)&=\frac{-l(-l-1)(-l-2)\cdots(-l-n+1)}{n!}\\&=(-1)^n\frac{l(l+1)\cdots(l+n-1)}{n!}\\&=(-1)^n{}_{l+n-1}C_n\end{aligned}$$

は整数である．

(2) n に関する数学的次帰納法で示す．

(i) $n=0$ のとき，$f(x)=c$ は $f(x)=cg_0(x)$ と表せる．

(ii) $n\leqq m-1$ のとき成り立つとすると，任意の m 次多項式
$f(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$ に対し，$f(x)-b_0m!g_m(x)$ は $m-1$ 次以下の多項式なので，帰納法の仮定から

$f(x)-b_0m!g_m(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}b_ig_i(x)$ とおける．よって，

$f(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}b_ig_i(x)+b_0m!g_m(x)$ となり，$n=m$ のときも成り立つ．

(3)　$P(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_ig_i(x)$ とおくと，

$P(0)=a_0$

$P(1)=a_0+a_1$

$P(2)=a_0+2a_1+a_2$

$P(3)=a_0+3a_1+3a_2+a_3$

$\cdots\cdots$

$P(n)=a_0+{}_nC_1a_1+{}_nC_2a_2+\cdots\cdots+a_n$

$P(0)\,,P(1)\,,\ldots\,,P(n)$ が整数なので，$a_0\,,a_1\,,\ldots\,,a_n$ が整数となる．

また，整数 k に対し，$g_i(k)$ は整数であるから，$P(k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m}a_ig_i(k)$ は整数である．■

解 (b) (1)　$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\,,a_0\fallingdotseq 0$ とおく．

$n=1$ のとき，$P(x)=a_0x+a_1\,,a_0\fallingdotseq 0$ とおくと，$P(x+1)-P(x)=a_0$ で 0 次式となり成り立つ．

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}P(x+1)-P(x)&=a_0\left\{nx^{n-1}+(n-2\text{ 次以下の整式})\right\}\\&\quad+a_1\left\{(n-1)x^{n-2}+(n-3\text{ 次以下の整式})\right\}\\&\quad+\cdots+a_{n-1}\\&=a_0nx^{n-1}+(n-2\text{ 次以下の整式})\end{aligned}$$

よって，$P(x+1)-P(x)$ は $n-1$ 次の整式である．

(2)　$P(x)$ の 次数 n についての数学的帰納法で証明する．

(i)　$n=1$ のとき　$P(x)=ax+b$ について $P(0)=b, P(1)=a+b$ が整数だから $a\,,b$ は整数となる．したがって，すべての整数 k に対し，$P(k)=ak+b$ は整数である．

(ii)　$n=m$ のとき成り立つと仮定する．$m+1$ 次多項式 $P(x)$ に対し，多項式 $Q(x)$ を $Q(x)=P(x+1)-P(x)$ とおく．

$Q(x)$ は m 次の多項式で，
$Q(0)=P(1)-P(0)\,,Q(1)=P(2)-P(1)\,,\ldots\,,$
$Q(m)=P(m+1)-P(m)$ はすべて整数であるから，数学的帰納法の仮定より，すべての整数 k に対し，$Q(k)$ は整数である．
したがって，$P(0)$ が整数であることと
$\cdots\,,P(-1)-P(-2)\,,P(0)-P(-1)\,,P(1)-P(0)\,,P(2)-P(1)\,,\cdots$ がすべて整数であることから，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数である．

■

上の問題は，次の東工大の入試問題にヒントを付ける形式で作成した．

類題 32　n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする．$P(0)\,,P(1)\,,\cdots\cdots\,,P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ．　（'93 東工大）

多項式の次数が $n=2\,,3$ のときの問題も大学入試に出題されているので，一般の n の場合を考える前に解いておく方が良いかもしれない．

類題 33　3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において，$f(-1)\,,f(0)\,,f(1)\,,f(2)$ はすべて整数であるとする．

(1)　$f(x)$ を次のように書き直すとき，$p\,,q\,,r\,,s$ を $a\,,b\,,c\,,d$ を用いて表せ．

$$f(x)=p\,\frac{x(x-1)(x+1)}{6}+q\,\frac{x(x-1)}{2}+rx+s$$

(2)　(1) の $p\,,q\,,r\,,s$ はすべて整数であることを示せ．

(3)　任意の整数 n に対して $f(n)$ は整数であることを示せ．　（'96 甲南大）

$\boxed{13}$ $f(x)$ は連続関数で $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\cdots\cdots(*)$
を満たすものとする.

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\,dy$ において $x+y=t$ とおくことにより
$$\int_0^1 f(x+y)\,dy=\int_0^{x+1} f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt$$
が成り立つことを証明せよ.

(2) $(*)$ を y について 0 から 1 まで積分した等式を利用して，$f(x)$ は微分可能であることを証明せよ．なお，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ は x について微分可能であることを用いてもよい.

(3) $A=f(1)$ とおくとき，$f(x)$ を求めよ.

解 (1) $x+y=t$ とおくと
$$\int_0^1 f(x+y)\,dy=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_0^{x+1} f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt$$

(2) $(*)$ を y について 0 から 1 まで積分すると
$$\int_0^1 f(x+y)\,dy=\int_0^1 f(x)\,dy+\int_0^1 f(y)\,dy$$
$$\int_0^{x+1} f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt=f(x)\int_0^1 dy+\int_0^1 f(y)\,dy$$
ゆえに，$\displaystyle\int_0^{x+1} f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^1 f(y)\,dy=f(x)\,.$

左辺は微分可能であるから，右辺も微分可能である．したがって $f(x)$ は微分可能である.

(3) $(*)$ の両辺を y で微分すると，$f'(x+y)=f'(y)\,.$

$y=0$ とおくと $f'(x)=f'(0)\,.$ ゆえに， $f(x)=f'(0)x+C\,.$
$\cdots\cdots(**)$

$(*)$ で $x=y=0$ とおくことにより $f(0)=0\,.$

$(**)$ で $x=0$ とおくと $f(0)=C\,.$ ゆえに， $C=0\,.$

よって， $f(x)=f'(0)x\,.$

$x=1$ とおくと $f(1)=f'(0)$ が成り立つから $f(x)=Ax\,.$ ■

他の解法については次の 2 つの問題参照.

類題 34　関数 $f(x)$ が，連続かつ $f(1)=1$ であるとする．すべての実数 x_1, x_2 について，

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2) \qquad \cdots\cdots(*)$$

を満たすとする．このとき次の手順に従って，関数 $f(x)$ を求めよ．

(1)　n を自然数とする．n 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$

となることを，n に関する数学的帰納法により示せ．

(2)　$0=0+0$ と $(*)$ を用いて，$f(0)=0$ を示せ．

(3)　$(*)$ を用いて $f(2)=2f(1)$ を示せ．

(4)　(1)，(2) を用いて，すべての整数 m とすべての実数 x について，$f(mx)=mf(x)$ であることを示せ．

(5)　$1=\underbrace{\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}}_{n}$ と (1) を用いて，すべての自然数 n について，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(1)$ であることを示せ．

(6)　(4)，(5) を用いて，すべての有理数 r について，$f(r)=rf(1)$ であることを示せ．

(7)　(6) と $f(1)=1$ と $f(x)$ が連続であることを用いて，関数 $f(x)$ を求めよ．ただし，実数 x に対して，有理数からなる数列 $r_n\,(n=1,2,\ldots)$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n = x$ となるものがあることを用いてよい．　　（'03 鹿児島大・理（推薦））

慶応大・環境情報

類題 35　以下の空欄の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{シ}}$ には，次の選択肢から最も適切なものを選び，その番号を解答欄（省略）に答えなさい．

選択肢　(0)p　(1) 式①　(2) 式②　(3) 式③　(4) 式④　(5)q　(6) 上　(7) 下　(8)$>$　(9)$<$

関数 $f(x)$ が　$f(x+y)=f(x)+f(y), x, y$ はすべての実数　①

を満たすとき，ある定数 k が存在して $f(x)=kx$ と書けることを証明しよう．ただし，$x>0$ のとき，$f(x)>0$ と仮定する．

最初に自然数 $p(\fallingdotseq 0), q$ に対して　$f\left(\dfrac{q}{p}x\right)=\dfrac{q}{p}f(x)$　②

を示す．$p\times f\left(\dfrac{q}{p}x\right)$ は $f\left(\dfrac{q}{\boxed{\text{ア}}}x\right)$ を $\boxed{\text{イ}}$ 個加えたものだから，$\boxed{\text{ウ}}$を繰り返して用いれば，$f\left(\boxed{\text{エ}}x\right)$ となる．ここで再び $\boxed{\text{オ}}$ を繰り返して用いれば，$\boxed{\text{カ}}\ f(x)$ となる．よって式②が得られた．

ここで $0 < x_1 < x_2$ に対して
$$\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2} \qquad ③$$
であるとしてみよう．このとき，
$$x_1 < \frac{q}{p}x_2,\quad f(x_1) > f\left(\frac{q}{p}x_2\right) \qquad ④$$
を満たす自然数 p, q が存在する．

実際，仮定より $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0$ であり，$\boxed{\text{キ}}$ は，原点 $(0,0)$ と点 $(x_1, f(x_1))$ を結ぶ線分 l_1 が，$(0,0)$ と点 $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分 l_2 の $\boxed{\text{ク}}$ 側にあることを意味する．ここで l_2 あるいはその延長と直線 $y = f(x_1)$ の交点の x 座標を A とする．このとき $\dfrac{q}{p}x_2$ が x_1 と A の間になるように，自然数 p, q を選べば，$\boxed{\text{ケ}}$ を用いて式④が成り立つことがわかる．

ところで $\boxed{\text{コ}}$ を用いれば
$$f\left(\frac{q}{p}x_2\right) = f\left(x_1 + \frac{q}{p}x_2 - x_1\right) = f(x_1) + f\left(\frac{q}{p}x_2 - x_1\right) > f(x_1)$$
であるから，$\boxed{\text{サ}}$ に矛盾する．
$$\frac{f(x_1)}{x_1}\boxed{\text{シ}}\frac{f(x_2)}{x_2}$$
としても，同様に矛盾を導くことができる．よって
$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$$
が得られた．x_1, x_2 は任意に選べるので，求める結果が導かれた．

（’03 慶応大・環境情報学部）

$\boxed{14}$ すべての実数で定義されている関数 $f(x)$ は次の 2 つの条件を満たしている．

1° 任意の実数 $x\,,y$ に対して

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

が成り立つ．

2° $f(x)$ は $x=0$ で微分係数をもち $f'(0)=1$ である．

このとき，

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) 任意の実数 x に対して $-1<f(x)<1$ であることを示せ．

(3) 任意の実数 x に対して $f(x)$ は微分可能であることを示し，$f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int f(x)\,dx=x-\log(1+f(x))+C$ となることを示せ．

(5) $f(x)$ を求めよ．

(4) では微分方程式の解法を避けるため，このような工夫をしてみた．

解 (1) 1° で $x=y=0$ とおくと $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+\{f(0)\}^2}$.

ゆえに，$f(0)=0$ または $f(0)=1$ または $f(0)=-1$.

$f(0)=1$ のとき 1° で $y=0$ とおくと $f(x)=\dfrac{f(x)+1}{1+f(x)}=1$.

$f(0)=-1$ のとき 1° で $y=0$ とおくと $f(x)=\dfrac{f(x)-1}{1-f(x)}=-1$.

いずれの場合も $f'(0)=0$ となり $f'(0)=1$ に反する．よって， $f(0)=0$.

(2) 1° で $x\,,y$ に $\dfrac{x}{2}$ を代入すると，$f(x)=\dfrac{2f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2}$.

$$1\pm f(x)=1\pm\frac{2f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2}=\frac{\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\pm 1\right\}^2}{1+\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2}\geqq 0\ (\text{複号同順})\,.$$

より すべての実数 x に対して $-1\leqq f(x)\leqq 1$ が成り立つ．

$-1<f(x)<1$ を証明するために，$f(x)=1$ を満たす x が存在しないことと，

$f(x)=-1$ を満たす x が存在しないことを，背理法で示す．

$f(x)=1$ となる x が存在すると仮定して，$f(a)=1$ とする．

このとき 1° で $y=a$ とおくと $f(x+a)=\dfrac{f(x)+1}{1+f(x)}=1$ となる．この式で $x=-a$ とおくと $f(0)=1$ となり $f(0)=0$ に反する．

同様に $f(x)=-1$ となる x が存在すると仮定して， $f(b)=-1$ とする．

このとき 1° で $y=b$ とおくと $f(x+b)=\dfrac{f(x)-1}{1-f(x)}=-1$ となる．この式で $x=-b$ とおくと $f(0)=-1$ となり $f(0)=0$ に反する．

したがって すべての実数 x に対して $-1<f(x)<1$ が成り立つ．

(3)　$f'(x)$ を定義式から求めるために $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を計算する．

$h \fallingdotseq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)\right\}\\&=\frac{1}{h}\cdot\frac{f(h)\left[1-\{f(x)\}^2\right]}{1+f(x)f(h)}\\&=\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot\frac{\left[1-\{f(x)\}^2\right]}{1+f(x)f(h)}\,.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot\frac{1-\{f(x)\}^2}{1+f(x)f(h)}\right\}\\&=f'(0)\cdot\frac{1-\{f(x)\}^2}{1+f(x)f(0)}=1-\{f(x)\}^2\,.\end{aligned}$$

よって， $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$.

(4)　$f'(x)=1-\{f(x)\}^2$ を変形すると

$$\frac{f'(x)}{1+f(x)}=1-f(x)\,,\qquad\frac{(1+f(x))'}{1+f(x)}=1-f(x)\,.$$

両辺を積分して

$$\int\frac{(1+f(x))'}{1+f(x)}\,dx=\int(1-f(x))\,dx\,.$$

$$\log(1+f(x))=x-\int f(x)dx\,. \qquad \cdots\cdots①$$

したがって，
$$\int f(x)dx=x-\log(1+f(x))+C\,.$$

(5)　$f'(x)=1-\{f(x)\}^2$ から

$$\frac{-f'(x)}{1-f(x)}=-1-f(x)\,,\quad \frac{(1-f(x))'}{1-f(x)}=-1-f(x)\,.$$

よって

$$\int\frac{(1-f(x))'}{1-f(x)}\,dx=\int(-1-f(x))\,dx$$

から

$$\log(1-f(x))=-x-\int f(x)dx\,. \qquad \cdots\cdots ②$$

①−② から

$$\log\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=2x+C_1\,.$$

$f(0)=0$ を使うと $C_1=0$ だから $\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}=e^{2x}$. よって

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,. \qquad ■$$

［注意］　(5) で求めた関数 $f(x)$ は $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\tanh x$ となる.

［補足］　微分方程式 $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$ を解けば次のように $f(x)$ を求めることができる.

$f'(x)=1-\{f(x)\}^2$ から $y=f(x)$ とおけば $\dfrac{dy}{dx}=1-y^2$.

$\displaystyle\int\frac{dy}{1-y^2}=\int dx$ から $\displaystyle\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+y}\,dy+\frac{1}{1-y}dy\right)=\int dx\,.$

$\log(1+y)-\log(1-y)=2x+C_1$ ($\because\ -1<y<1$) から $\dfrac{1+y}{1-y}=Ce^{2x}$

$x=0$ のとき $y=0$ より $C=1$ だから $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. すなわち,

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,. \qquad ■$$

$\boxed{15}$ 関数 $f(x)$ が常に $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ を満たしている．さらに，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0)=1$ である．このとき，

(1) $f(0)=0$ を示せ．

(2) 任意の実数 x に対して $-1<f(x)<1$ であることを示せ．

(3) $f(x)$ はすべての点 x で微分可能であることを示し，$f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(4) $g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ とおき，$g'(x)$ を $g(x)$ を用いて表せ．

(5) $\{e^{-2x}g(x)\}'$ を計算して，$g(x)\,,f(x)$ を求めよ．

解 (1)，(2)，(3) （省略）

(4) $y=f(x)\,,z=g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ とおくと，$z=\dfrac{1+y}{1-y}\,,\dfrac{dy}{dx}=1-y^2$ より

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2}{(1-y)^2}\frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{1+y}{1-y}=2z\,.$$

よって，$\dfrac{dz}{dx}=2z$, すなわち，$g'(x)=2g(x)\,.$

(5) $(e^{-2x}z)'=-2e^{-2x}z+e^{-2x}z'=e^{-2x}(z'-2z)=0$ から $e^{-2x}z=C\,.$

よって，$z=Ce^{2x}$ から $g(x)=Ce^{2x}\,.$

ここで，$g(0)=\dfrac{1+f(0)}{1-f(0)}=1$ を用いると $C=1$ だから

$$g(x)=e^{2x},\ f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,.$$

■

(2) で $g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\,,h(x)=\log g(x)$ とおくと，$\boldsymbol{g(x+y)=g(x)g(y)}$，$\boldsymbol{h(x+y)=h(x)+h(y)}$ という関数方程式に直すことができる．

$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ の形の関数方程式は，岐阜大 (1967 年)，防衛大 (1981 年)，福岡大（1986 年)，明治大 (1994 年)，京都大（2007 年) 等で出題されている．

類題 36　すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が
$f(0)=0\,,f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 $a\,,b$ に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ で
あって $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ を満たしている．

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ．

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ．

（'07 京都大・理）

［補足］ (2) 微分可能性が保証されているので $f'(x)$ を $f(x)$ で表すには，導関数の定義式を利用するのではなく，与えられた等式を微分してもよい．

$f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ の両辺を a で微分すると

$$\begin{aligned} f'(a+b) &= \frac{f'(a)\{1+f(a)f(b)\}-\{f(a)+f(b)\}f'(a)f(b)}{\{1+f(a)f(b)\}^2} \\ &= \frac{f'(a)\left[1-\{f(b)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(b)\}^2}\,. \end{aligned}$$

この式で $a=0$ とおくと

$$f'(b)=\frac{f'(0)\left[1-\{f(b)\}^2\right]}{\{1+f(0)f(b)\}^2}=1-\{f(b)\}^2\,.$$

b は任意であるから，$f'(x)=1-\{f(x)\}^2\,.$
(1) から $\{f(x)\}^2<1$ だから $f'(x)=1-\{f(x)\}^2>0\,.$
よって $f(x)$ は増加関数で $f(0)=0$ より $x>0$ のとき $f(x)>f(0)=0\,.$
したがって，$x>0$ のとき $0<f(x)<1\,.$
さらに $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$ の両辺を x で微分すると $f''(x)=-2f(x)f'(x)$ が成り立つから $x>0$ のとき $f'(x)>0\,,0<f(x)<1$ だから $f''(x)<0\,.$
よって，$y=f(x)$ のグラフは上に凸である．■

$\boxed{16}$ 実数 x の関数 $T_n(x)$ $(n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$ を $T_1(x)=x,\,T_2(x)=2x^2-1,$
$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)\ \ (n \geqq 1)$ により定義する．

(1) $T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$ であることを示せ．

(2) $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$， $T_n(\cosh\theta)=\cosh n\theta$ であることを示せ．
ただし，$\cosh\theta=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ とする．

(3) $|x| \leqq 1$ ならば $|T_n(x)| \leqq 1$ であることを示せ．

(4) $|x|>1$ ならば $|T_n(x)|>1$ であることを示せ．

(5) 方程式 $T_n(x)=0$ の実数解を求めよ．

(6) 方程式 $T_n(x)=1$ の実数解を求めよ．

(4) の証明に工夫が必要である．双曲線関数を使えば，(3) と同様に証明できる．

解 (1) 数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1\,,2$ のとき成立する．（省略）

(ii) $n=k\,,k+1$ のとき成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}T_{k+2}(-x)&=-2xT_{k+1}(-x)-T_k(-x)\\&=-2x(-1)^{k+1}T_{k+1}(x)-(-1)^kT_k(-x)\\&=(-1)^{k+2}\left\{2xT_{k+1}(x)-T_k(x)\right\}\\&=(-1)^{k+2}T_{k+2}(x)\end{aligned}$$

となり，$n=k+2$ のときも成り立つ．

(i),(ii) から，すべての n について成り立つ．

(2) 数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1\,,2$ のとき成立する．（省略）

(ii) $n=k\,,k+1$ のとき成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}T_{k+2}(\cos\theta)&=2xT_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta)\\&=2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta\\&=\cos(k+2)\theta+\cos k\theta-\cos k\theta\\&=\cos(k+2)\theta\,,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{k+2}(\cosh\theta) &= 2xT_{k+1}(\cosh\theta) - T_k(\cosh\theta) \\
&= 2\cosh\theta\cosh(k+1)\theta - \cosh k\theta \\
&= 2\cdot\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\cdot\frac{e^{(k+1)\theta}+e^{-(k+1)\theta}}{2} - \cosh k\theta \\
&= \frac{e^{(k+2)\theta}+e^{-(k+2)\theta}}{2} + \frac{e^{k\theta}+e^{-k\theta}}{2} - \cosh k\theta \\
&= \cosh(k+2)\theta + \cosh k\theta - \cosh k\theta \\
&= \cosh(k+2)\theta
\end{aligned}
$$

となり，$n = k+2$ のときも成り立つ．

(i),(ii) より，すべての n について成り立つ．

(3)　$|x| \leqq 1$ のとき $x = \cos\theta\,(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおける．(2) より

$$|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos n\theta| \leqq 1\,.$$

したがって，$|x| \leqq 1$ ならば $|T_n(x)| \leqq 1$ が成り立つ．

(4)　$x > 1$ のとき　$x = \cosh\theta\,(\theta > 0)$ とおける．

(2) より $T_n(\cosh\theta) = \cosh n\theta$ が成り立つから

$$T_n(x) = T_n(\cosh\theta) = \cosh n\theta > 1\,.$$

$x < -1$ のときは，$|T_n(x)| = |(-1)^n T_n(-x)| = T_n(-x) > 1\,.$

したがって，$|x| > 1$ のとき，$|T_n(x)| > 1$ が成り立つ．

(5)　$|x| > 1$ のとき，$|T_n(x)| > 1$ より $T_n(x) = 0$ の実数解は $[-1\,,1]$ にある．

$x = \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと $T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ より $T_n(x) = 0$ は $\cos n\theta = 0$ となる．これを解いて，

$$n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{から} \theta = \frac{2k+1}{2n}\pi\ (k \text{ は整数})\,.$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $0 \leqq k \leqq n-1$ となる．

よって，方程式 $T_n(x) = 0$ の実数解は $\cos\dfrac{2k+1}{2n}\pi\ (0 \leqq k \leqq n-1)$ である．

■

［注意］(5) $T_n(x)$ は n 次式であるから, 方程式 $T_n(x) = 0$ は $\cos\dfrac{2k+1}{2n}\pi\ (0 \leqq k \leqq n-1)$ 以外の解をもたない．

双曲線関数を使わなければ，(4) の $x>1$ の場合は次のように解くこともできる．

［別解 (4)］　n に関する数学的帰納法で

$x>1$ ならば $T_{n+1}(x)>T_n(x)>1$ $(*)$ を示す．

(i)　$n=1$ のとき，$T_2(x)=2x\cdot x-1>2x-1>x=T_1(x)>1$ より成り立つ．

(ii)　$n=k$ のとき $T_{k+1}(x)>T_k(x)>1$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}T_{k+2}(x)&=2xT_{k+1}(x)-T_k(x)>2T_{k+1}(x)-T_k(x)\\&=T_{k+1}(x)+\{T_{k+1}(x)-T_k(x)\}\\&>T_{k+1}(x)>1\end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) からすべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

$x<-1$ のときは，解答と同じく (1) を用いればよい．　■

双曲線関数は

$$\boldsymbol{\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,,\ \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,,\ \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}}$$

で定義される．双曲線関数の性質として

(1)　$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

(2)　（加法定理）$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$$

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$$

(3)　（微分）$(\cosh x)'=\sinh x$，$(\sinh x)'=\cosh x$，$(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

が成り立つ．

$\boxed{17}$ n は自然数とする．

(1) すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)\,,\ \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

をみたす多項式 $T_n(x)$, $g_n(x)$ が存在することを示せ．

この $T_n(x)$, $g_n(x)$ について，次のことを証明せよ．

(2) $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 2x$,

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$g_{n+2}(x) - 2xg_{n+1}(x) + g_n(x) = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

(3) $T_1(x) = x$, $g_1(x) = 1$,

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) + (x^2-1)g_n(x) \quad \cdots\cdots ③$$

$$g_{n+1}(x) = T_n(x) + xg_n(x) \quad \cdots\cdots ④$$

(4) (i) $T_n(x)$ は係数がすべて整数である n 次の多項式で，x^n の係数は 2^{n-1} である．

また，$T_n(x)$ は n が偶数のとき偶関数で，n が奇数のとき奇関数である．

(ii) $g_n(x)$ は係数がすべて整数である $n-1$ 次の多項式で， x^{n-1} の係数は 2^{n-1} である．また，$g_n(x)$ は n が偶数のとき奇関数で， n が奇数のとき偶関数である．

(5) $T_n'(x) = ng_n(x)$ である．

(6) p を 3 以上の素数とするとき，$T_p(x)$ の $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる．

解 (1)，(2) をまとめて示す．

(1),(2) $\cos\theta = \cos\theta$, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ とおけば $\cos\theta = T_1(\cos\theta)$, $\cos 2\theta = T_2(\cos\theta)$ をみたす．

$n = k-1$, k のとき成り立つと仮定すると

$\cos(k-1)\theta = T_{k-1}(\cos\theta)\,, \cos k\theta = T_k(\cos\theta)$ となる多項式 $T_{k-1}(x)$, $T_k(x)$ が存在するから $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta$ を用いると

$$\cos(k+1)\theta = 2\cos\theta\cos k\theta - \cos(k-1)\theta = 2\cos\theta T_k(\cos\theta) - T_{k-1}(\cos\theta)\,.$$

$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$ とおけば $T_{k+1}(x)$ は $\cos(k+1)\theta = T_{k+1}(\cos\theta)$ をみたす多項式である．

後半も同様に，$\sin\theta = 1\cdot\sin\theta$, $\sin 2\theta = 2\cos\theta\cdot\sin\theta$ より，$g_1(x) = 1$, $g_(x) = 2x$ とおけば $\sin\theta = g_1(\cos\theta)\sin\theta$, $\sin 2\theta = g_2(\cos\theta)\sin\theta$ をみたす．

$n = k-1$, k のとき成り立つと仮定すると

$\sin(k-1)\theta = g_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta$，$\sin k\theta = g_k(\cos\theta)\ \sin\theta$ となる多項式 $g_{k-1}(x)$, $g_k(x)$ が存在するから， $\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\sin n\theta\cos\theta$ を用いると

$$\sin(k+1)\theta = 2\cos\theta\sin k\theta - \sin(k-1)\theta = \sin\theta\{2\cos\theta g_k(\cos\theta) - g_{k-1}(\cos\theta)\}\,.$$

$g_{k+1}(x) = 2xg_k(x) - g_{k-1}(x)$ とおけば $g_{k+1}(x)$ は $\sin(k+1)\theta = g_{k+1}(\cos\theta)\sin\theta$ をみたす多項式である．

(3)　加法定理を用いると $T_n(x)$，$g_n(x)$ の漸化式が得られる．

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta &= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta \\
&= \cos\theta\cos n\theta + (\cos^2\theta - 1)\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \\
&= \cos\theta T_n(\cos\theta) + (\cos^2\theta - 1)\cdot g_n(\cos\theta)\,, \\
g_{n+1}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} &= \frac{\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta}{\sin\theta} \\
&= \cos n\theta + \cos\theta\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \\
&= T_n(\cos\theta) + \cos\theta\cdot g_n(\cos\theta)
\end{aligned}$$

より

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) + (x^2-1)g_n(x)\,,\ g_{n+1}(x) = T_n(x) + xg_n(x)$$

を得る．

(4)　$T_1(x) = x$ は 1 次式で，x の係数は $2^{1-1} = 1$ で，$g_1(x) = 1$ は 0 次の多項式で，定数項は $2^{1-1} = 1$ である．

$T_k(x)$, $g_k(x)$ は整数係数の多項式で，$T_k(x)$ の最高次の項は $2^{k-1}x^k$ ，$g_k(x)$ の最高次の項は $2^{k-1}x^{k-1}$ であると仮定する．③，④から $T_{k+1}(x)$, $g_{k+1}(x)$ は整数係数の多項式である．

③から $T_{k+1}(x)$ の最高次の項は $x\cdot 2^{k-1}x^k + x^2\cdot 2^{k-1}x^{k-1} = 2^kx^{k+1}$ となり，$T_{k+1}(x)$ は $k+1$ 次式で x^{k+1} の係数は 2^k である．また，④から $g_{k+1}(x)$ の最高次の項は $2^{k-1}x^k + x\cdot 2^{k-1}x^{k-1} = 2^kx^k$ となり， $g_{k+1}(x)$ は k 次式で x^k の係数は 2^k である．

$T_1(x)=x$ は奇関数，$g_1(x)=1$ は偶関数である．

次に $T_k(x)=(-1)^kT_k(x)$，$g_k(x)=(-1)^{k+1}g_k(x)$ を仮定すると ③，④から

$$
\begin{aligned}
T_{k+1}(-x)&=(-x)T_k(-x)+(x^2-1)g_k(-x)\\
&=(-1)^{k+1}xT_k(x)+(-1)^{k+1}(x^2-1)g_k(x)\\
&=(-1)^{k+1}T_{k+1}(x)\,,\\
g_{k+1}(-x)&=T_k(-x)+(-x)g_k(-x)\\
&=(-1)^kT_k(x)+(-1)^{k+2}xg_k(x)\\
&=(-1)^{k+2}g_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

となり $n=k+1$ のときも成り立つ．

(5)　$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で微分すると，

$$-n\sin n\theta=T_n'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)\,.$$

すなわち

$$-ng_n(\cos\theta)\sin\theta=-T_n'(\cos\theta)\sin\theta\,.$$

$\sin\theta\fallingdotseq 0$ のとき $ng_n(\cos\theta)=T_n'(\cos\theta)$ となるが，$\sin\theta\fallingdotseq 0$ をみたす θ に対して $\cos\theta$ は無限個の値を取るから

$$ng_n(x)=T_n'(x)\,.$$

(6)　p は 3 以上の素数であるから奇数である．(4)(i)(ii) から

$$T_p(x)=t_px^p+t_{p-2}x^{p-2}\cdots+t_1x,\ g_p(x)=u_{p-1}x^{p-1}+u_{p-3}x^{p-3}+\cdots+u_0\,,$$

$t_p=2^{p-1}$ とおける．(5) より $T_p'(x)=pg_p(x)$ が成り立つから

$$(p-2m)t_{p-2m}=pu_{p-2m-1}\,,\quad m=0,1,\cdots,[p/2]\,.$$

したがって，

$1<m\leqq[p/2]$ のとき p と $p-2m$ は互いに素であるから，$t_{p-2m}=\dfrac{pu_{p-2m-1}}{p-2m}$ が整数になるのは u_{p-2m-1} が $p-2m$ で割り切れるときである．

よって，

$1<m\leqq[p/2]$ のとき $t_{p-2m}=p\cdot\dfrac{u_{p-2m-1}}{p-2m}$ は p の倍数である．　■

$\boxed{18}$ 実数 x の関数 $T_n(x)$ $(n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$ を $T_1(x)=x,\,T_2(x)=2x^2-1,$
$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)\quad(n\geqq 1)$ により定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $T_3(x)\,,T_4(x)$ を求めよ．

(2) $T_n(x)$ は n 次式で最高次の係数は 2^{n-1} であることを示せ．

(3) $L_n=i^{-n}\cdot 2T_n\left(\dfrac{i}{2}\right)$ とおくとき，$\{L_n\}$ の満たす三項間の漸化式を求めよ．

(4) $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ が成り立つことを示せ．

(5) $(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$ が成り立つことを示せ．

(6) $T_n(x)=t_0+t_1x+\cdots+t_nx^n$ とおくと
$n\geqq 2$ のとき

$t_{n-1}=0\,,$

$(n^2-k^2)t_k+(k+2)(k+1)t_{k+2}=0\quad(k=0\,,1\,,\ldots\,,n-2)$

であることを示せ．

(7) $T_n(x)=\displaystyle\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{n}{n-m}{}_{n-m}\mathrm{C}_m2^{n-2m-1}x^{n-2m}$ $(n\geqq 1)$ が成り立つことを示せ．

(8) $L_n=i^{-n}\cdot 2T_n\left(\dfrac{i}{2}\right)$ は $2T_n\left(\dfrac{x}{2}\right)$ の係数の絶対値の和であることを示せ．

解 (1) $T_3(x)=2xT_2(x)-T_1(x)=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x\,,$

$T_4(x)=2xT_3(x)-T_2(x)=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)x=8x^4-8x^2+1\,.$

(2) $T_1(x)=x$ は 1 次式で，x の係数は $2^{1-1}=1$ であり，$T_2(x)=2x^2-1$ は 2 次式で，x^2 の係数は $2^{2-1}=2$ である．

$n\leqq k$ のとき $T_n(x)$ は整数係数の多項式で，$T_n(x)$ の最高次の項は $2^{n-1}x^n$ であると仮定する．

$T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x)$ から $T_{k+1}(x)$ は整数係数の $k+1$ 次の多項式で，x^{k+1} の係数は $2\cdot 2^{k-1}=2^{(k+1)-1}$ である．よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(3) $T_{n+2}\left(\dfrac{i}{2}\right)=iT_{n+1}\left(\dfrac{i}{2}\right)-T_n\left(\dfrac{i}{2}\right)$ の両辺に $2i^{-(n+2)}$ をかけると

$$i^{-(n+2)}2T_{n+2}\left(\frac{i}{2}\right)=i^{-(n+1)}2T_{n+1}\left(\frac{i}{2}\right)+i^{-n}2T_n\left(\frac{i}{2}\right)\,.$$

よって， $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ を得る．

$$L_1 = i^{-1} 2T_1\left(\frac{i}{2}\right) = i^{-1}\cdot 2\cdot\frac{i}{2} = 1\,,$$

$$L_2 = i^{-2}\cdot 2\cdot T_2\left(\frac{i}{2}\right) = -2\cdot\left(2\cdot\frac{i^2}{4}-1\right) = 3\,.$$

(4)　(省略)

(5)　$x=\cos\theta$ とおくと

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta\,. \qquad \cdots\cdots ①$$

したがって，

$$T'_n(x) = \frac{dT_n(\cos\theta)}{d\theta} = -n\sin n\theta\cdot\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right) = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}\,, \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\begin{aligned}
T''_n(x) &= n\cdot\frac{n\cos n\theta\cdot\sin\theta - \sin n\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)\\
&= -n\cdot\frac{1}{1-\cos^2\theta}\left(n\cos n\theta - \cos\theta\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)\\
&= -n\cdot\frac{1}{1-x^2}\left(nT_n(x) - x\cdot\frac{T'_n(x)}{n}\right)\,.
\end{aligned}$$

したがって，

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

(6)　$T_n(x) = t_0 + t_1x + \cdots + t_nx^n$ を③に代入すると

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{n} k(k-1)t_kx^{k-2} - x\sum_{k=0}^{n} kt_kx^{k-1} + n^2\sum_{k=0}^{n} t_kx^k = 0\,.$$

変形すると

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)t_kx^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)t_kx^{k} - \sum_{k=0}^{n} kt_kx^{k} + n^2\sum_{k=0}^{n} t_kx^k = 0\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)t_kx^{k-2} + \sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2)t_kx^k = 0\,.$$

ここで，

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)t_kx^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)t_kx^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)t_{k+2}x^k\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2)t_kx^k=\sum_{k=0}^{n-2}(n^2-k^2)t_kx^k+\left\{n^2-(n-1)^2\right\}t_{n-1}x^{n-1}$$

を用いると，

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)t_{k+2}x^k+\sum_{k=0}^{n-2}(n^2-k^2)t_kx^k+\left\{n^2-(n-1)^2\right\}t_{n-1}x^{n-1}=0\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left\{(k+2)(k+1)t_{k+2}+(n^2-k^2)t_k\right\}x^k+\left\{n^2-(n-1)^2\right\}t_{n-1}x^{n-1}=0\,.$$

これから，

$$t_{n-1}=0\,, \qquad \cdots\cdots ④$$

$$(k+2)(k+1)t_{k+2}+(n^2-k^2)t_k=0 \quad (k=0\,,1\,,\ldots\,,n-2)\,. \qquad \cdots\cdots ⑤$$

(7) ④，⑤から

$$t_{n-(2k+1)}=0 \quad \left(k=0\,,1\,,\ldots\,,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\,. \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤で $k=n-2$ とおき， $t_n=2^{n-1}$ を用いると

$$t_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{n^2-(n-2)^2}t_n=-\frac{n(n-1)}{4(n-1)}\cdot 2^{n-1}=-n2^{n-3}\,.$$

⑤を変形した $(n-k)(n+k)t_k=-(k+2)(k+1)t_{k+2}$ で k のところに $n-2m$ を代入すると

$$4m(n-m)t_{n-2m}=-(n-2m+2)(n-2m+1)t_{n-2(m-1)}\,.$$

両辺に $\dfrac{-(-4)^{m-1}(m-1)!(n-2m)!}{(n-m)!}$ をかけると

$$\frac{(-4)^m m!(n-2m)!}{\{n-(m+1)\}!}t_{n-2m}=\frac{(-4)^{m-1}(m-1)!\{n-2(m-1)\}!}{(n-m)!}t_{n-2(m-1)}\,.$$

これは m によらず一定であるから

$$\frac{(-4)^m m!(n-2m)!}{\{n-(m+1)\}!}t_{n-2m}=\frac{(-4)^1 1!(n-2)!}{(n-2)!}t_{n-2}=n2^{n-1}\,.$$

よって，

$$\begin{aligned}t_{n-2m}&=(-1)^m\cdot\frac{n(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}\cdot 2^{n-2m-1}\\&=(-1)^m\cdot\frac{n(n-m)!}{(n-m)m!(n-2m)!}\cdot 2^{n-2m-1}\\&=(-1)^m\cdot\frac{n}{n-m}\cdot{}_{n-m}\mathrm{C}_m\cdot 2^{n-2m-1}\end{aligned}$$

から

$$t_{n-2m} = (-1)^m \cdot \frac{n}{n-m} \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_m \cdot 2^{n-2m-1} \qquad \left(m = 0\,, 1\,, \ldots\,, \left[\frac{n}{2}\right]\right). \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑥，⑦から

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{n}{n-m} {}_{n-m}\mathrm{C}_m 2^{n-2m-1} x^{n-2m} \ (n \geqq 1) \quad \cdots\cdots ⑧$$

が成り立つ．

(8)　⑧を変形する．

$$2T_n\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{n}{n-m} {}_{n-m}\mathrm{C}_m x^{n-2m}\,. \quad \cdots\cdots ⑨$$

よって

$$\begin{aligned} L_n = i^{-n}\, 2T_n\left(\frac{i}{2}\right) &= i^{-n} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{n}{n-m} {}_{n-m}\mathrm{C}_m i^{n-2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-m} {}_{n-m}\mathrm{C}_m \end{aligned}$$

は ⑨ から $2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$ の係数の絶対値の和である．■

［注意］　B 問題 $\boxed{17}$(5) と $\boxed{18}$(7) の結果から，次の式を得る．

$$g_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^m \frac{n-2m}{n-m} {}_{n-m}\mathrm{C}_m (2x)^{n-2m-1} \ (n \geqq 1)\,.$$

$\boxed{19}$ $\lambda = \cos\dfrac{\pi}{5}$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = 2x$, $g_3(x) = 4x^2 - 1$, $g_4(x) = 8x^3 - 4x$ とする.

(1) $g_2(x) = 2xg_1(x)$, $g_3(x) = 2xg_2(x) - g_1(x)$, $g_4(x) = 2xg_3(x) - g_2(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) $g_k(\lambda) = \dfrac{\sin\frac{k}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ が成り立つことを示せ.

(3) $y_1 = x_1 - g_1(\lambda)x_4 + g_3(\lambda)x_5$, $y_2 = x_2 - g_2(\lambda)x_4 + g_2(\lambda)x_5$, $y_3 = x_3 - g_3(\lambda)x_4 + g_1(\lambda)x_5$ とおくと

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2)\cos\frac{\pi}{5} - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 - x_5x_1)$$

$= (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\cos\dfrac{\pi}{5} - (y_1y_2 + y_2y_3)$ が成り立つことを示せ.

(4) (2) における y_1, y_2, y_3 について,

$$2\lambda({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2) - 2(y_1y_2 + y_2y_3)$$

$$= \frac{g_2(\lambda)}{g_1(\lambda)}\left\{y_1 - \frac{g_1(\lambda)}{g_2(\lambda)}y_2\right\}^2 + \frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2 - \frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2 + \frac{g_4(\lambda)}{g_3(\lambda)}{y_3}^2$$

が成り立つことを示せ.

(5) $x_1, x_2, \ldots, x_5$ が実数のとき，不等式

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2)\cos\frac{\pi}{5} \geqq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 - x_5x_1$$

が成り立つことを示せ.

目標は，(5) の不等式

$$\boldsymbol{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2)\cos\frac{\pi}{5} \geqq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 - x_5x_1}$$

である.

解　$\theta = \dfrac{\pi}{5}$ とおくと，$\lambda = \cos\theta$

(1)　$2xg_1(x) = 2x = g_2(x)\,,\ 2xg_2(x) - g_1(x) = 2x\cdot(2x) - 1 = 4x^2 - 1 = g_3(x)\,,$
$2xg_3(x) - g_2(x) = 2x(4x^2-1) - 2x = 8x^3 - 4x = g_4(x)\,.$

よって，$g_2(x) = 2xg_1(x)\,,\ g_3(x) = 2xg_2(x) - g_1(x)\,,\ g_4(x) = 2xg_3(x) - g_2(x)$ が成り立つ.

(2)　$g_1(\lambda) = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}\,,\ \ g_2(\lambda) = 2\cos\theta = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\,.$

(1) の結果を使うと，

$$
\begin{aligned}
g_3(\lambda) &= 2\lambda g_2(\lambda) - g_1(\lambda) \\
&= 2\cos\theta\cdot\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} - 1 \\
&= \frac{\sin 3\theta + \sin\theta}{\sin\theta} - 1 \\
&= \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\,, \\
g_4(\lambda) &= 2\lambda g_3(\lambda) - g_2(\lambda) \\
&= 2\cos\theta\cdot\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin 4\theta + \sin 2\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\,.
\end{aligned}
$$

よって，$g_k(\lambda) = \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}\quad (k = 1\,,2\,,3\,,4)$ が成り立つ.

(3)　$\lambda({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2) - (y_1y_2 + y_2y_3)$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\Big(x_1 - g_1(\lambda)x_4 + g_3(\lambda)x_5\Big)^2 + \lambda\Big(x_2 - g_2(\lambda)x_4 + g_2(\lambda)x_5\Big)^2 \\
&\qquad + \lambda\Big(x_3 - g_3(\lambda)x_4 + g_1(\lambda)x_5\Big)^2 \\
&\quad - \Big(x_1 - g_1(\lambda)x_4 + g_3(\lambda)x_5\Big)\Big(x_2 - g_2(\lambda)x_4 + g_2(\lambda)x_5\Big) \\
&\qquad - \Big(x_2 - g_2(\lambda)x_4 + g_2(\lambda)x_5\Big)\Big(x_3 - g_3(\lambda)x_4 + g_1(\lambda)x_5\Big)
\end{aligned}
$$

の展開式において， $\lambda({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) - (x_1x_2 + x_2x_3)$ を除いたものを考える.

${x_4}^2, {x_5}^2$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&\lambda\left[\{g_1(\lambda)\}^2+\{g_2(\lambda)\}^2+\{g_3(\lambda)\}^2\right]-g_1(\lambda)g_2(\lambda)-g_2(\lambda)g_3(\lambda)\\
&=\lambda\{g_1(\lambda)\}^2+\frac{2\lambda g_2(\lambda)-g_1(\lambda)}{2}g_2(\lambda)+\frac{2\lambda g_3(\lambda)-g_2(\lambda)}{2}g_3(\lambda)\\
&\qquad-\frac{1}{2}\{g_1(\lambda)g_2(\lambda)+g_2(\lambda)g_3(\lambda)\}\\
&=\lambda\{g_1(\lambda)\}^2+\frac{g_3(\lambda)}{2}\cdot g_2(\lambda)+\frac{g_4(\lambda)}{2}\cdot g_3(\lambda)\\
&\qquad-\frac{1}{2}\{g_1(\lambda)g_2(\lambda)+g_2(\lambda)g_3(\lambda)\}\\
&=\frac{g_4(\lambda)g_3(\lambda)}{2}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\qquad\left(\because\ \sin 4\theta=\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}=\sin\theta\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}\\
&=\cos\theta\\
&=\lambda\,,
\end{aligned}
$$

x_3x_4 の係数は

$$-2\lambda g_3(\lambda)+g_2(\lambda)=-g_4(\lambda)=-\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}=-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}=-1\,,$$

x_4x_5 の係数は

$$
\begin{aligned}
&-2\lambda g_1(\lambda)g_3(\lambda)-2\lambda g_2(\lambda)g_2(\lambda)-2\lambda g_3(\lambda)g_1(\lambda)\\
&\qquad+g_1(\lambda)g_2(\lambda)+g_3(\lambda)g_2(\lambda)+g_2(\lambda)g_1(\lambda)+g_2(\lambda)g_3(\lambda)\\
&=g_1(\lambda)\{-2\lambda g_3(\lambda)+g_2(\lambda)\}+g_2(\lambda)\{g_3(\lambda)-2\lambda g_2(\lambda)+g_1(\lambda)\}\\
&\qquad+g_3(\lambda)\{g_2(\lambda)-2\lambda g_1(\lambda)\}\\
&=g_1(\lambda)\{-g_4(\lambda)\}+g_2(\lambda)\cdot 0+g_3(\lambda)\cdot 0\\
&=g_1(\lambda)\{-g_4(\lambda)\}\\
&=-\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\\
&=-1\,,
\end{aligned}
$$

x_1x_3 の係数は 0,

x_1x_4 の係数は $-2\lambda g_1(\lambda)+g_2(\lambda)=0$,

x_1x_5 の係数は $2\lambda g_3(\lambda)-g_2(\lambda)=g_4(\lambda)=\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}=1\,,$

x_2x_4 の係数は $-2\lambda g_2(\lambda)+g_1(\lambda)+g_3(\lambda)=0\,,$

x_2x_5 の係数は $2\lambda g_2(\lambda)-g_3(\lambda)-g_1(\lambda)=0\,,$

x_3x_4 の係数は $-2\lambda g_3(\lambda)+g_2(\lambda)=-g_4(\lambda)=-1\,.$

x_3x_5 の係数は $2\lambda g_1(\lambda)-g_2(\lambda)=0\,.$

したがって，等式は成り立つ.

(4)　平方完成をする.

$$
\begin{aligned}
&2\lambda({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2)-2(y_1y_2+y_2y_3)\\
&=2\lambda\left(y_1-\frac{y_2}{2\lambda}\right)^2+\frac{4\lambda^2-1}{2\lambda}{y_2}^2-2y_2y_3+2\lambda{y_3}^2\\
&=2\lambda\left(y_1-\frac{y_2}{2\lambda}\right)^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}{y_2}^2-2y_2y_3+2\lambda{y_3}^2 \quad (\because\quad (1))\\
&=2\lambda\left(y_1-\frac{y_2}{2\lambda}\right)^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2-\frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2+\frac{2\lambda g_3(\lambda)-g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}{y_3}^2\\
&=2\lambda\left(y_1-\frac{y_2}{2\lambda}\right)^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2-\frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2+\frac{g_4(\lambda)}{g_3(\lambda)}{y_3}^2 \quad (\because\quad (1))\\
&=\frac{g_2(\lambda)}{g_1(\lambda)}\left\{y_1-\frac{g_1(\lambda)}{g_2(\lambda)}y_2\right\}^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2-\frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2+\frac{g_4(\lambda)}{g_3(\lambda)}{y_3}^2
\end{aligned}
$$

と変形できる.

(5)　$g_1(\lambda)>0\,,g_2(\lambda)>0\,,g_3(\lambda)>0\,,g_4(\lambda)>0$ だから

$$
\begin{aligned}
&2\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2)-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5-x_5x_1)\\
&=2\lambda(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-2(y_1y_2+y_2y_3)\\
&=\frac{g_2(\lambda)}{g_1(\lambda)}\left\{y_1-\frac{g_1(\lambda)}{g_2(\lambda)}y_2\right\}^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2-\frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2+\frac{g_4(\lambda)}{g_3(\lambda)}{y_3}^2\geqq 0\,.
\end{aligned}
$$

■

※　次の不等式が成り立つ.

「$n>2$ とし，$\lambda=\cos\dfrac{\pi}{n}$ とする．任意の実数 $x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n$ に対し，

$$\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n-x_nx_1)\geqq 0\,.」$$

証明については，『不等式への招待』(大関信雄・大関清太　共著)，*pp*.103 − 105 または 柳田五夫 :「チェビシェフの多項式について，数研通信 No.17 ,*pp*.9 − 11」参照.

$\boxed{20}$ (i)　$a\,,b$ が実数のとき，

$$\max(|a|\,,\,|b|)=\frac{|a+b|+|a-b|}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

を示せ．ただし，$\max(p\,,q)$ は $p\,,q$ のうち小さくない方を表す．

(ii)　$s\,,t$ が実数のとき，

$$|s|+|t|=\max(|s+t|\,,\,|s-t|) \qquad \cdots\cdots②$$

を示せ．

(iii)　$|a|<1$ かつ $|b|<1$ ならば $|a+b|+|a-b|<2$ であることを証明せよ．ただし，$a\,,b$ は実数とする．（'81 お茶の水女子大）

$\min(p\,,q)$ は $p\,,q$ のうち大きくない方を表すことにすると，

$$\max(p,q)=\frac{p+q+|p-q|}{2}\,,\ \min(p\,,q)=\frac{p+q-|p-q|}{2}$$

が成り立つ．なぜならば，

$p\geqq q$ のとき，$\max(p\,,q)=p\,,\ \dfrac{p+q+|p-q|}{2}=\dfrac{p+q+p-q}{2}=p$,

$p<q$ のとき，$\max(p\,,q)=q\,,\ \dfrac{p+q+|p-q|}{2}=\dfrac{p+q-(p-q)}{2}=q$

だから $\max(p,q)=\dfrac{p+q+|p-q|}{2}$ が成り立つ．

$\min(p\,,q)=\dfrac{p+q-|p-q|}{2}$ についても同様に示せる．

解 (i)　$f(a\,,b)=\max(|a|\,,|b|)\,,\ g(a\,,\,b)=\dfrac{|a+b|+|a-b|}{2}$ とおくと

$$f(-a\,,b)=f(a\,,-b)=f(-a\,,-b)=f(a\,,b)\,,$$
$$g(-a\,,b)=g(a\,,-b)=g(-a\,,-b)=g(a\,,b)$$

が成り立つから

$a\geqq 0\,,b\geqq 0$ のとき $f(a\,,b)=g(a\,,b)$ すなわち $\max(a\,,\,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ を示せばよく，この式は明らかに成り立つ．

(ii)　(i) で $a=s+t\,,b=s-t$ とおけばよい．

(iii)　(1) より $\dfrac{|a+b|+|a-b|}{2}=\max(|a|\,,\,|b|)<1$．

よって，

$|a|<1$ かつ $|b|<1$ ならば $|a+b|+|a-b|<2$ となる．■

max を使うと $|x|$ は

$$\boxed{\boldsymbol{|x| = \max(x\,, -x)}}$$

と表すことができる．

なぜならば，

　$x \geqq 0$ のとき，$|x| = x$，このとき $x \geqq -x$ だから $\max(x\,, -x) = x$

　$x < 0$ のとき，$|x| = -x$，このとき $x < -x$ だから $\max(x\,, -x) = -x$

となるから $|x| = \max(x\,, -x)$ が成り立つ．

［(ii) の別解 1］　$p \geqq 0\,, q \geqq 0$ のとき $\{\max(p\,, q)\}^2 = \max(p^2\,, q^2)$ が成り立つから

$$\begin{aligned}
\{\max(|s+t|\,,\ |s-t|)\}^2 &= \max(|s+t|^2\,,\ |s+t|^2) \\
&= \max(s^2 + 2st + t^2\,,\ s^2 - 2st + t^2) \\
&= s^2 + t^2 + 2\max(st\,,\ -st) \\
&= s^2 + t^2 + 2|st| \\
&= (|s| + |t|)^2\,.
\end{aligned}$$

$\max(|s+t|\,, |s-t|) \geqq 0$, $|s| + |t| \geqq 0$ だから $|s| + |t| = \max(|s+t|\,, |s-t|)$ が成り立つ．■

［(ii) の別解 2］　$|x| = \max(x\,, -x)$ を利用すると

$$\begin{aligned}
\max(|s+t|\,, |s-t|) &= \max(\max(s+t\,, -s-t)\,, \max(s-t\,, -s+t)) \\
&= \max(s+t\,, -s-t\,, s-t\,, -s+t) \\
&= \max(s+t\,, -s+t\,, s-t\,, -s-t) \\
&= \max\{\max(s+t\,, -s+t)\,, \max(s-t\,, -s-t)\} \\
&= \max\{\max(s\,, -s) + t\,, \max(s\,, -s) - t\} \\
&= \max(|s| + t\,, |s| - t) \\
&= |s| + \max(t\,, -t) \\
&= |s| + |t|\,.
\end{aligned}$$

ただし，$\max(p\,, q\,, r\,, s)$ は $p\,, q\,, r\,, s$ のうち最も大きな値を表す．■

　※①は筆者がある問題を解いているときに見つけたものである．（大学への数学 ,1976 年 6 月号 , $pp.62-63$ 参照）

　$\max(|s+t|\,, |s-t|) = |s| + |t|$ の証明が福井大学（2006 年）で出題されている．

$\boxed{21}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a\,,b$ のうち小さくない方を $\max\{a\,,b\}$ で表すことにする．このとき

$$\max\{|s+t|\,,|s-t|\} = |s|+|t| \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを用いて，

$$\max\{|a|\,,|b|\} = \frac{|a+b|+|a-b|}{2} \qquad \cdots\cdots(**)$$

を証明せよ．

(2) 整式 $f(x)$ に対して $\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)| = \max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f(x)|\,,|f(-x)|\}$ を示せ．

(3) 命題「 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|\,x^2+px+q\,|$ の最大値 $\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|\,x^2+px+q\,|$ は $\dfrac{1}{2}$ 以上である」を証明するのに，次の方法がある．

$f(x)=x^2+px+q\,,f_1(x)=x^2+q\,,g_1(x)=px$ とおくと，(2) より

$$\begin{aligned}\max_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)| &= \max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f(x)|\,,|f(-x)|\}\\ &= \max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f_1(x)+g_1(x)|\,,|f_1(x)-g_1(x)|\}\\ &= \max_{0\leqq x\leqq 1}(|f_1(x)|+|g_1(x)|) \quad (\because \quad (*))\\ &\geqq \max_{0\leqq x\leqq 1}|f_1(x)| = \max_{0\leqq x\leqq 1}|x^2+q|\\ &= \max_{0\leqq z\leqq 1}|z+q|\} \quad (z=x^2)\\ &= \max\{|q|\,,|1+q|\}\\ &= \frac{|2q+1|+1}{2} \quad (\because \quad (**))\\ &\geqq \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

よって，命題は成り立つ．

以上にならって，次の命題を証明せよ．

命題『 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|\,x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,|$ の最大値 $\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|\,x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,|$ は $\dfrac{1}{8}$ 以上である』

解 (1)　$s=\dfrac{a+b}{2}\,,t=\dfrac{a-b}{2}$ とおくと $s+t=a\,,s-t=b$ より

$\max\{|s+t|\,,|s-t|\}=|s|+|t|$ は $\max\{|a|\,,|b|\}=\dfrac{|a+b|+|a-b|}{2}$ となる．

(2)　$M=\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)|$ とおくと，

すべての $-1\leqq x\leqq 1$ に対して $|f(x)|\leqq M$ かつ ある α $(-1\leqq\alpha\leqq 1)$ が存在して $|f(\alpha)|=M$ が成り立つ．

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$|f(x)|\leqq M$ かつ $|f(-x)|\leqq M$ であるから

$$\max\{|f(x)|\,,|f(-x)|\}\leqq M\,.$$

ゆえに，　$\displaystyle\max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f(x)|\,,|f(-x)|\}\leqq M\,.$

また，

$0\leqq\alpha<1$ のとき $f(\alpha)=M$ で，

$-1<\alpha<0$ のとき $0<-\alpha<1$ で $f(-(-\alpha))=M$ となるから

$$\max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f(x)|\,,|f(-x)|\}=M\,.$$

したがって，$\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)|=\max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|f(x)|\,,|f(-x)|\}\,.$

(3)　$F(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d\,,F_1(x)=x^4+bx^2+d\,,G_1(x)=ax^3+cx$ とおくと，(2) より

$$\begin{aligned}\max_{-1\leqq x\leqq 1}|F(x)|&=\max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|F(x)|\,,|F(-x)|\}\\&=\max_{0\leqq x\leqq 1}\max\{|F_1(x)+G_1(x)|\,,|F_1(x)-G_1(x)|\}\\&=\max_{0\leqq x\leqq 1}(|F_1(x)|+|G_1(x)|)\quad(\because\quad(*))\\&\geqq\max_{0\leqq x\leqq 1}|F_1(x)|=\max_{0\leqq x\leqq 1}|x^4+bx^2+d|\\&=\max_{0\leqq y\leqq 1}|\,y^2+by+d\,|\qquad(y=x^2)\,.\end{aligned}$$

$z=2y-1$ とおくと $0\leqq y\leqq 1$ のとき $-1\leqq z\leqq 1$ で

$y^2+by+d=\left(\dfrac{z+1}{2}\right)^2+b\left(\dfrac{z+1}{2}\right)+d=\dfrac{1}{4}(z^2+b_1z+d_1)$ とおける．したがって，

$$\max_{0\leqq y\leqq 1}|\,y^2+by+d\,|=\frac{1}{4}\cdot\max_{-1\leqq z\leqq 1}|\,z^2+b_1z+d_1\,|\geqq\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\,.$$

よって，

$$\max_{-1\leqq x\leqq 1}|F(x)|\geqq\frac{1}{8}\,.$$

■

類題 37　命題「$f(x)=x^2+px+q$ に対して，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値は $\dfrac{1}{2}$ より小さくない」を証明するのに，つぎの方法がある．

1°　公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ によって $g(x)=\dfrac{1}{2}(2x^2-1)$ をつくる．

2°　$F(x)=f(x)-g(x)$ とおく．

3°　命題を否定して　$-1 \leqq x \leqq 1$ でつねに $|f(x)| < \dfrac{1}{2}$ がなりたつと仮定すると，$F(-1)<0$, $F(0)>0$, $F(1)<0$ となり，$F(x)$ がたかだか一次式であることに反する．よって命題はなりたつ．

以上にならって，次の命題を証明せよ．

『$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|\,x^3+ax^2+bx+c\,|$ の最大値は $\dfrac{1}{4}$ より小さくない．ただし，係数はすべて実数とする．』　　（'68 大学への数学　学力コンテスト）

解 1°　3 倍角の公式 $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ によって，

$$g(x)=\frac{1}{4}(4x^3-3)=x^3-\frac{3}{4}x \text{ をつくる．}$$

2°　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して $F(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $F(x)$ は 2 次以下の多項式である．

3°　$-1 \leqq x \leqq 1$ でつねに $|f(x)|<\dfrac{1}{4}$ がなりたつと仮定する．このとき，

$\cos 3\alpha = \pm 1$　$(-\pi \leqq \alpha < \pi)$ となるのは $\alpha = 0\,,\pm\dfrac{\pi}{3}\,,\pm\dfrac{2\pi}{3}$ であるから $\cos\alpha = \pm 1\,,\pm\dfrac{1}{2}$ となる．この値を利用する．

$$g(-1)=-\frac{1}{4}\,,\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\,,\ g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}\,,\ g(1)=\frac{1}{4}$$

である．仮定から，

$$-\frac{1}{4}<f(-1)<\frac{1}{4}\,,\ -\frac{1}{4}<f\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}\,,$$
$$-\frac{1}{4}<f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{4}\,,\ -\frac{1}{4}<f(1)<\frac{1}{4}\,.$$

がなりたつから

$$F(-1)=f(-1)-g(-1)=f(-1)+\frac{1}{4}>0\,,$$
$$F\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}<0\,,$$
$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}>0\,,$$
$$F(1)=f(1)-g(1)=f(1)-\frac{1}{4}<0\,.$$

となり，$F(x)=0$ は $\left(-1\,,-\dfrac{1}{2}\right)\,,\left(-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{2}\right)\,,\left(\dfrac{1}{2}\,,1\right)$ で解を持つことになり

$F(x)$ がたかだか 2 次式であることに反する．よって背理法により命題はなりたつ． ■

類題 38　定数 $a\,,b$ に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=|\,x^2+2ax+b\,|$ と定める．また，$f(x)$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値を M とおく．

(1)　条件 $f(1)<\dfrac{1}{2}$ かつ $f(-1)<\dfrac{1}{2}$ を満たす点 $(a\,,b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示せよ．またこのとき，実数 a および b のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

(2)　実数 $a\,,b$ がどのような値であっても，不等式 $M \geqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3)　$M=\dfrac{1}{2}$ となるような $a\,,b$ の値をすべて求めよ．

（'08 東京理科大・理工）

類題 37 3° で $F(-1)<0\,,F(0)>0\,,F(1)<0$ のように，$1\,,-1\,,0$ を代入しているが，東京理科大の問題でも，この値を (1)，(2) で利用することになる．

$\boxed{22}$ n を正の整数または 0 とする．

(1) 次の式を示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,.$$

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)\,.$$

(3) 次の式を示せ．

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \ \ (n \geqq 1)\,,\ \ I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \ \ (n \geqq 0)$$

ただし，$(2n)!! = 2{\cdot}4{\cdot}6 \cdots 2n$, $(2n+1)!! = 1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (2n+1)$, $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$ と定義する．

(4) $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

(i) $J_{n-1} - \dfrac{2n}{2n-1} J_n = \dfrac{1}{(2n-1)n} I_{2n} \quad (n \geqq 1)\,,$

(ii) $\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} J_{n-1} - \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} J_n = \dfrac{\pi}{4n^2} \quad (n \geqq 1)\,,$

(iii) $J_0 - \dfrac{(2m)!!}{(2m-1)!!} J_m = \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \dfrac{1}{n^2}$ (m は自然数)

(5) 次の式を示せ．

$$J_m < \frac{\pi^2}{4}(I_{2m} - I_{2m+2}) \quad (m \text{ は自然数})\,.$$

なお，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$ すなわち $x < \dfrac{\pi}{2} \sin x$ であることを用いてもよい．

(6) 次の式を示せ．

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} J_m = 0\,.$$

(7) 次の式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

解 (1)　$x = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)(-d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,d\theta\,.$$

ゆえに，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

(2)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)' x\,dx \\
&= \Big[-\sin^{n-1} x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,.
\end{aligned}$$

ゆえに，　$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}\,.$

(3)　$I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$，$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\,.$

(2) の結果から，　$I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)}\,.$

両辺に $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$ をかけると

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} I_{2(n-1)} \quad (n\text{ によらず一定})\,.$$

よって，$\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} = \dfrac{(2)!!}{(1)!!} I_2$ から

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot 2I_2 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

同様にして (2) の結果から $I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} I_{2n-1}\,.$

両辺に $\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$ をかけると

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} I_{2n+1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} I_{2n-1} \quad (n\text{ によらず一定})\,.$$

よって，$\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!} I_{2n+1} = \dfrac{(1)!!}{(0)!!} I_1$ から

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot I_1 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,.$$

(4) $\displaystyle J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx=\frac{\pi^3}{24}$.

(i) $n \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
&J_{n-1}-J_n\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n-2}x\sin^2 x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\left(-\frac{\cos^{2n-1}x}{2n-1}\right)'dx\\
&=\left[-\frac{x^2\sin x\cos^{2n-1}x}{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&\qquad+\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x\sin x+x^2\cos x\right)\cos^{2n-1}x\,dx\\
&=\frac{2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos^{2n-1}x\,dx+\frac{J_n}{2n-1}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos^{2n-1}x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\frac{\cos^{2n}x}{2n}\right)'dx\\
&=\left[-\frac{x\cos^{2n}x}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx\\
&=\frac{I_{2n}}{2n}
\end{aligned}$$

となるから $\displaystyle J_{n-1}-J_n=\frac{1}{(2n-1)n}I_{2n}+\frac{J_n}{2n-1}$.

よって， $\displaystyle J_{n-1}-\frac{2n}{2n-1}J_n=\frac{1}{(2n-1)n}I_{2n}$.

(ii) (i) の結果から

$$\begin{aligned}
J_{n-1}-\frac{2n}{2n-1}J_n&=\frac{1}{(2n-1)n}I_{2n}\\
&=\frac{1}{(2n-1)n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{4n^2}.
\end{aligned}$$

両辺に $\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}$ をかけると

$$\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}J_{n-1}-\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}J_n=\frac{\pi}{4n^2}. \qquad \cdots\cdots ①$$

(iii) ①で $n=1, 2, \ldots, m$ とおき辺々加えると

$$J_0 - \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}J_m = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}. \qquad \cdots\cdots ②$$

(5) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$ すなわち $x < \dfrac{\pi}{2}\sin x$ が成り立つから

$$\begin{aligned} J_m &< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4}\sin^2 x\cos^{2m} x dx \\ &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{2m} x dx \\ &= \frac{\pi^2}{4}(I_{2m} - I_{2m+2}). \end{aligned}$$

したがって $J_m < \dfrac{\pi^2}{4}(I_{2m} - I_{2m+2})$ が成り立つ.

(6) $J_m \geqq 0$ と (5) の結果より

$$\begin{aligned} 0 \leqq \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}J_m &< \frac{\pi^2}{4}\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}(I_{2m} - I_{2m+2}) \\ &= \frac{\pi^2}{4}\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\left\{\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} - \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\right\}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^3}{8}\left(1 - \frac{2m+1}{2m+2}\right). \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\pi^3}{8}\left(1-\frac{2m+1}{2m+2}\right) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}J_m = 0$ が成り立つ.

(7) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}J_m = 0$，$J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$ であるから，②で $m\to\infty$ とすると

$$\frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

すなわち，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \blacksquare$$

類題 39　n を正の整数または 0 とする．

(1)　次の式を示せ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,.$$

(2)　$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)\,.$$

(3)　次の式を示せ．

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots\cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots\cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(4)　$Sn = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

$$S_{n-1} - \frac{2n}{2n-1} S_n = \frac{2}{2n(2n-1)} I_{2n} \quad (n \geqq 1)\,.$$

(5)　次の式を示せ．ただし，N は整数で $N \geqq 1$ とする．

$$S_N = \frac{(2N-1)(2N-3) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right)\,.$$

(6)　次の式を示せ．ただし，N は整数で $N \geqq 1$ とする．

$$S_N \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{(2N-1)(2N-3) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3\,.$$

なお，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ では $x < \frac{\pi}{2} \sin x$ であることを用いてもよい．

(7)　次の式を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

（'03 日本女子大・理（自己推薦））

$\boxed{23}$ n を正の整数または 0 とする．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とおく．次の式を示せ．

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)\,.$$

(2) 次の式を示せ．

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \quad (n \geqq 1)\,.$$

(3) 次の式を示せ．

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \ \ (n \geqq 1)\,,\ \ I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \ \ (n \geqq 0)\,.$$

ただし，$(2n)!! = 2{\cdot}4{\cdot}6{\cdots}2n$, $(2n+1)!! = 1{\cdot}3{\cdot}5{\cdots}(2n+1)$, $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$ と定義する．

(4) 次の式を示せ．

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1\,,$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \pi\,,$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}\,.$

(5) 記号$\sim$を，正の数からなる数列 $\{a_n\}$ ，$\{b_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ を満たすとき，$a_n{\sim}b_n$ と表すことにする．次の式を示せ．

$$_{2n}C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\,.$$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{_{2n}C_n}$ を求めよ．

解 (1) (省略)

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ であるから

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx\,.$$

ゆえに，$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ から $1 < \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}\,.$

(1) の結果から $\dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n}$ となるから

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \quad (n \geqq 1)\,.$$

(3)　(省略)

(4) (i)　(2) の結果から $1 < \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \dfrac{2n+1}{2n}$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ となる．

(ii)　(3) の結果から

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \div \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}(2n+1)\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2.$$

(i) の結果を用いると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}(2n+1)\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 = 1\,.$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$ から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \pi\,.$$

(iii)　$\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \dfrac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!(2n)!!} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ であるから，(ii) の結果を変形した $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi}$ を書き直すと

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}\,.$$

(5)　${}_{2n}C_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ を使い，(4)(iii) の式を変形すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\,{}_{2n}C_n} = \sqrt{\pi}$.

よって，${}_{2n}C_n \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ が成り立つ．

(6)　$a_n = \sqrt[n]{{}_{2n}C_n}$ とおくと

$$\begin{aligned}\log a_n &= \frac{1}{n}\log\left({}_{2n}C_n \Big/ \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\right) + \frac{1}{n}\log\left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\log\left({}_{2n}C_n \Big/ \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\right) + \log 4 + \frac{1}{2n}(\log\pi + \log n) \to \log 4 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 4\,.$$

■

$\boxed{24}$ n を正の整数または 0 とする．

(1) 次の式を示せ．

$x>0$ のとき，$\dfrac{2x}{x+2}<\log(1+x)<\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{x^3}{6(x+1)(x+2)}$.

(2) 次の式を示せ．

$x>0$ のとき，$\dfrac{2}{2x+1}<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{2}{2x+1}+\dfrac{1}{6x(x+1)(2x+1)}$.

(3) $a_n=\dfrac{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^{n-\frac{1}{12n}}}{\sqrt{2\pi}}$, $b_n=\dfrac{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^{n}}{\sqrt{2\pi}}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおく．次の式を示せ．

(i) $a_n<b_n$ $(n=1,2,\ldots)$,

(ii) $\log\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>0$ $(n=1,2,\ldots)$.

(iii) $\log\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<0$ $(n=1,2,\ldots)$,

(4) $\{a_n\}$ は増加数列で $a_n<b_1$, $\{b_n\}$ は減少数列で $b_n>a_1$, であることから $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束することがわかる．

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ とおいたとき $\alpha=\beta$ を示せ．

(5) $a_n<\alpha<b_n$ から $\alpha=\dfrac{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^{n-\frac{\lambda_n}{12n}}}{\sqrt{2\pi}}$ $(0<\lambda_n<1)$ とおける．$2n$ に関して $\alpha=\dfrac{(2n)!(2n)^{-2n-\frac{1}{2}}e^{2n-\frac{\lambda_{2n}}{24n}}}{\sqrt{2\pi}}$ $(0<\lambda_{2n}<1)$ も考えることにより $\alpha=1$ を示せ．なお，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n\pi}(2n)!}=1$ が成り立つことを用いてもよい．

(6) 次の式を示せ．

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\lambda_n}{12n}}\quad(0<\lambda_n<1)\,.$$

(7) 記号$\sim$を，正の数からなる数列 $\{a_n\}$ ，$\{b_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$ を満たすとき，$a_n\sim b_n$ と表すことにする．次の式を示せ．

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\,.$$

(8) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ を求めよ

解 (1) $f(x) = \log(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}\,, g(x) = \dfrac{2x}{x+2} + \dfrac{x^3}{6(x+1)(x+2)} - \log(1+x)$

とおく．

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\,,$$

$$g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{x^2(x^2+6x+6)}{6(x+1)^2(x+2)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^4}{6(x+1)^2(x+2)^2}\,.$$

$x > 0$ のとき $f'(x) > 0\,, g'(x) > 0$ であるから $f(x)\,, g(x)$ はともに $[0\,,\infty)$ において増加関数である．

よって，$x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0\,, g(x) > g(0) = 0$ であるから不等式は成り立つ．

(2) (1) の不等式において，x のところに $\dfrac{1}{x}$ を代入すればよい．

(3) (i) $n - \dfrac{1}{12n} < n$ より明らかに $a_n < b_n$ $(n = 1\,, 2\,, \cdots)$ は成り立つ．

(ii) 対数をとって調べる．

$$\begin{aligned}
\log\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \log\frac{(n+1)!(n+1)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}e^{(n+1)-\frac{1}{12(n+1)}}}{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^{n-\frac{1}{12n}}} \\
&= \log\frac{(n+1)^{-n-\frac{1}{2}}e^{1-\frac{1}{12(n+1)}+\frac{1}{12n}}}{n^{-n-\frac{1}{2}}} \\
&= \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} \\
&= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 + \frac{1}{12n(n+1)} > 0 \quad (\because \quad (2))
\end{aligned}$$

(iii) 同様にして

$$\log\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0 \quad (\because \quad (2))\,.$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{12n}} = 1$ であるから $\alpha = \beta$

(5) $$\alpha = \frac{n!n^{-n-\frac{1}{2}}e^{n-\frac{\lambda_n}{12n}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (0 < \lambda_n < 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\alpha = \frac{(2n)!(2n)^{-2n-\frac{1}{2}}e^{2n-\frac{\lambda_{2n}}{24n}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (0 < \lambda_{2n} < 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

①を平方したものを②で割ると

$$\alpha = \frac{(n!)^2 4^n e^{-\frac{\lambda_n}{6n}+\frac{\lambda_{2n}}{24n}}}{(2n)!\sqrt{n\pi}}\,. \qquad \cdots\cdots ③$$

③で $n \to \infty$ とする．$0 < \dfrac{\lambda_n}{6n} < \dfrac{1}{6n}$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{6n} = 0$ となる．

同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{2n}}{24n} = 0$ を得る．

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n\pi}(2n)!} = 1$ も利用して

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!\sqrt{n\pi}} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{6n}+\frac{\lambda_{2n}}{24n}} = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

(6)　①から $1 = \dfrac{n!n^{-n-\frac{1}{2}} e^{n-\frac{\lambda_n}{12n}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (0 < \lambda_n < 1)\,.$

これを変形して

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\lambda_n}{12n}} \quad (0 < \lambda_n < 1)\,.$$

(7)　(6) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\lambda_n}{12n}} = e^0 = 1\,.$$

よって　　$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ となる．

(8)　$a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ とおき，対数をとると，

$$\begin{aligned}
\log a_n &= \frac{1}{n}\log n! - \log n \\
&= \frac{1}{n}\log\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) + \log\left\{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right\} - \log n \\
&= \frac{1}{n}\log\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) + \frac{1}{2n}(\log 2\pi + \log n) - 1 \to -1 \quad (n \to \infty)\,.
\end{aligned}$$

よって，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$ ■

$\boxed{25}$ (1) 関数 $f(x)$ は $[0\,,1]$ で微分可能で $f'(x)$ は連続であるとする．このとき，

$$\mathit{\Delta} = \frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}-\int_0^1 f(x)\,dx$$

として，次のことを証明せよ．

(i) $\mathit{\Delta} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)f'(\xi_k)\,dx\ \left(\frac{k-1}{n}<\xi_k<x<\frac{k}{n}\right)$ を満たす ξ_k が存在する．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\mathit{\Delta} = \frac{f(1)-f(0)}{2}$ が成り立つ．なお，$f'(x)$ が連続なので $\left[\dfrac{k-1}{n}\,,\dfrac{k}{n}\right]$ における $f'(x)$ の最大値と最小値が存在するから，$M_k\,,m_k$ とおいて利用してもよい．

(iii) (ii) で $f(x)=\log(x+1)$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\ n!\ n^n}{e^n(2n)!}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n\pi}(2n)!}=1$ と (1)(iii) の結果を利用して

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

なお，記号～は，正の数からなる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ を満たすとき，$a_n\sim b_n$ と表す．

解 (1) (i) $\displaystyle\mathit{\Delta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]dx\,.$

平均値の定理から

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)=\left(\frac{k}{n}-x\right)f'(\xi_k)\ \left(\frac{k-1}{n}<\xi_k<x<\frac{k}{n}\right)$$

を満たす ξ_k が存在する．

したがって，

$$\mathit{\Delta} = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)f'(\xi_k)\,dx\ \left(\frac{k-1}{n}<\xi_k<x<\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つ．

(ii) (i) から，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)m_k\,dx \leqq \varDelta \leqq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)M_k\,dx\,.$$

ところで，

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)m_k\,dx=\left[-\frac{m_k}{2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}=\frac{m_k}{2n^2}\ ,$$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)M_k\,dx=\left[-\frac{M_k}{2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}=\frac{M_k}{2n^2}$$

から

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{2n^2}\leqq \varDelta \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{2n^2}\ \text{すなわち}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m_k \leqq \varDelta \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_k$$

が成り立つ．

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}m_k$ と $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}M_k$ はともに，

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=\frac{1}{2}\Big[f(x)\Big]_0^1=\frac{f(1)-f(0)}{2}$$

に収束するから，$\lim\limits_{n\to\infty} n\varDelta=\dfrac{f(1)-f(0)}{2}$ が成り立つ．

(iii)

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{n}+1\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{n+k}{n}\right)$$

$$=\log\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)}{n^n}=\log\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\ ,$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x+1)'\log(x+1)\,dx$$

$$=\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1-\int_0^1 dx$$

$$=2\log 2-1=\log\frac{4}{e}\ ,$$

$$\frac{f(1)-f(0)}{2}=\log\sqrt{2}$$

等を使うと，(ii) は，

$$\log \frac{(2n)!}{n!\, n^n} - n \log \frac{4}{e} = \log \sqrt{2}\,,$$

$$\log \frac{e^n (2n)!}{4^n n!\, n^n} = \log \sqrt{2}$$

となる．よって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n\ n!\, n^n}{e^n (2n)!} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ．

(2)　(1)(iii) の結果 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\, 4^n\ n!\, n^n}{e^n (2n)!} = 1$ を変形すると

$\displaystyle 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\, 4^n\ n!\, n^n}{e^n (2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n\pi}(2n)!} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n n!}$ から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n\pi}(2n)!} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n n!} \bigg/ \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n\pi}(2n)!} = 1\,.$$

よって，

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

が成り立つ．■

※　このスターリングの公式の初等的な導き出し方は黒川信重氏によるものである．

類題 40　$f(x)$ は連続関数で次の条件（イ），（ロ）をみたすものとする．

(イ)　$x_1 < x_2$ のとき $f(x_1) \leqq f(x_2)$

(ロ)　$f(0) \geqq 0$

自然数 n に対して

$$D_n = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) - \int_0^1 f(x)\,dx$$

とおくとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$0 \leqq D_n \leqq \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

('00 奈良女子大)

$\boxed{26}$ (i) $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$ で x^r の係数を比較することにより，次の式を証明せよ．

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \quad (1 \leqq r \leqq n-1)$$

(ii)
$$\left(\frac{x}{2} + \frac{x^{-1}}{2} + 1\right)^n = 2^{-n}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{2n} \qquad \cdots\cdots ①$$

の両辺の定数項を比較することにより，次の等式を証明せよ．

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^{-2k}{}_n\mathrm{C}_{2k} \cdot {}_{2k}\mathrm{C}_k = 2^{-n}{}_{2n}\mathrm{C}_n \qquad \cdots\cdots ②$$

解 (1) $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$ で x^r の係数を比較する．

$(1+x)^n$ の展開式における x^r の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$,$(1+x)^{n-1}$ の展開式における x^r の係数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$，$(1+x)^{n-1}$ の展開式における x^{r-1} の係数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ であるから ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ を得る．

(2) 等式 $\left(\frac{x}{2} + \frac{x^{-1}}{2} + 1\right)^n = \left(\frac{(x^{1/2} + x^{-1/2})^2}{2}\right)^n = 2^{-n}(x^{1/2} + x^{-1/2})^{2n}$
の両辺の定数項を比較する．多項定理を使うと，左辺の一般項は，

$$\frac{n!}{p!q!r!}\left(\frac{x}{2}\right)^p\left(\frac{x^{-1}}{2}\right)^q = \frac{n!}{p!q!r!} \cdot \frac{1}{2^{p+q}}x^{p-q}$$

$$(p \geqq 0, q \geqq 0, r \geqq 0, p+q+r = n)$$

定数項は $q = p$ のときだから $q = p, r = n-2p$ より，p の値の動く範囲は $0 \leqq p \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ となる．したがって，定数項は

$$\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{(p!)^2(n-2p)!} \cdot \frac{1}{2^p} = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^{-2p}{}_n\mathrm{C}_{2p} \cdot {}_{2p}\mathrm{C}_p$$

である．
また，$2^{-n}(x^{1/2} + x^{-1/2})^{2n}$ の一般項は

$$2^{-n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\left(\sqrt{x}\right)^{2n-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = 2^{-n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\left(\sqrt{x}\right)^{2n-2k}$$

となる．これから定数項は $k = n$ のときで $2^{-n}{}_{2n}\mathrm{C}_n$ である．したがって，②が成り立つ． ■

$\boxed{27}$ 正の整数をとる変数 $p\,,q$ に対して，$f(p,q)$ を $f(p,1)=1,\ f(1,q)=2^{1-q}$

$$f(p,q)=\frac{1}{2}\{f(p,q-1)+f(p-1,q)\} \quad \cdots\cdots ①$$

によって定義する．このとき $f(p,q)$ は p,q を用いて

$$f(p\,,q)=\frac{1}{2^{p+q-2}}\sum_{r=0}^{p-1}{}_{p+q-2}\mathrm{C}_r \quad \cdots\cdots ②$$

と表せることを数学的帰納法で証明せよ．

帰納法で証明するには工夫が必要な問題である．

$f(p,q)$ が与えられているので，$(*)$ の形から二重帰納法で証明できる．

二重帰納法とは，すべての正の整数 m,n についての命題 $\mathrm{P}(m\,,n)$ が真であることを証明するのに，次の 1°，2° を証明することである．（以下，$\mathrm{P}(m\,,n)$ が真である，を単に $\mathrm{P}(m\,,n)$ と書くことにする．）

1° $\mathrm{P}(m,1)$, $\mathrm{P}(1,n)$

2° $\mathrm{P}(k\,,l+1),\mathrm{P}(k+1\,,l) \implies P(k+1\,,l+1)$

解 1 $g(p,q)=\dfrac{1}{2^{p+q-2}}\displaystyle\sum_{r=0}^{p-1}{}_{p+q-2}\mathrm{C}_r$ とおき，二重帰納法で $f(p,q)=g(p,q)$ が成り立つことを示す．

1° $g(p\,,1)=\dfrac{1}{2^{p-1}}\displaystyle\sum_{r=0}^{p-1}{}_{p-1}\mathrm{C}_r=\dfrac{1}{2^{p-1}}\cdot 2^{p-1}=1=f(p\,,1)$

$g(1\,,q)=\dfrac{1}{2^{q-1}}\displaystyle\sum_{r=0}^{0}{}_{q-1}\mathrm{C}_r=2^{1-q}=f(1\,,q)$

が成り立つ

2° $f(p\,,q-1)=g(p\,,q-1)\,,\,f(p-1\,,q)=g(p-1\,,q)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} f(p,q)&=\frac{1}{2}\{f(p\,,q-1)+f(p-1\,,q)\}\\ &=\frac{1}{2}\{g(p,q-1)+g(p-1,q)\}\\ &=\frac{1}{2^{p+q-2}}\left(\sum_{r=0}^{p-1}{}_{p+q-3}\mathrm{C}_r+\sum_{r=0}^{p-2}{}_{p+q-3}\mathrm{C}_r\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{p+q-2}}\left(\sum_{r=0}^{p-1}{}_{p+q-3}\mathrm{C}_r + \sum_{r=1}^{p-1}{}_{p+q-3}\mathrm{C}_{r-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{p+q-2}}\left\{\sum_{r=1}^{p-1}\left({}_{p+q-3}\mathrm{C}_r + {}_{p+q-3}\mathrm{C}_{r-1}\right) + {}_{p+q-3}\mathrm{C}_0\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{p+q-2}}\left(\sum_{r=1}^{p-1}{}_{p+q-2}\mathrm{C}_r + {}_{p+q-2}\mathrm{C}_0\right) = \frac{1}{2^{p+q-2}}\sum_{r=0}^{p-1}{}_{p+q-2}\mathrm{C}_r = g(p\,,q)$$

となり，任意の正の整数 p,q に対して $f(p\,,q) = g(p\,,q)$ が成り立つ. ■

$p+q=k$ に対して数学的帰納法を使えば，通常の帰納法で証明できる.

解 2　$p+q=k$ ならば　$f(p\,,q) = \dfrac{1}{2^{k-2}}\displaystyle\sum_{r=0}^{p-1}{}_{k-2}\mathrm{C}_r$ ……③

が成り立つことを証明する.

(1)　$k=2$ のとき $p=q=1$ で $\dfrac{1}{2^0}\displaystyle\sum_{r=0}^{0}{}_0\mathrm{C}_r = 1\,, f(1,1)=1$ であるから ③ は成り立つ.

(2)　$p+q=k$ のとき③が成り立つと仮定する.

$p+q=k+1$ のとき $p+(q-1)=k\,, (p-1)+q=k$ となるから，仮定より

$f(p\,,q-1) = \dfrac{1}{2^{k-2}}\displaystyle\sum_{r=0}^{p-1}{}_{k-2}\mathrm{C}_r\,, f(p-1\,,q) = \dfrac{1}{2^{k-2}}\displaystyle\sum_{r=0}^{p-2}{}_{k-2}\mathrm{C}_r$ が成り立つ.

このとき

$$f(p,q) = \frac{1}{2}\{f(p\,,q-1) + f(p-1\,,q)\}$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}}\left(\sum_{r=0}^{p-1}{}_{k-2}\mathrm{C}_r + \sum_{r=0}^{p-2}{}_{k-2}\mathrm{C}_r\right)$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}}\left(\sum_{r=0}^{p-1}{}_{k-2}\mathrm{C}_r + \sum_{r=1}^{p-1}{}_{k-2}\mathrm{C}_{r-1}\right)$$

$$f(p,q) = \frac{1}{2^{k-1}}\left\{\sum_{r=1}^{p-1}\left({}_{k-2}\mathrm{C}_r + {}_{k-2}\mathrm{C}_{r-1}\right) + {}_{k-2}\mathrm{C}_0\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}}\left(\sum_{r=1}^{p-1}{}_{k-1}\mathrm{C}_r + {}_{k-1}\mathrm{C}_0\right) = \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{r=0}^{p-1}{}_{k-1}\mathrm{C}_r$$

よって，③が成り立つ. ■

$\boxed{28}$ 次の (a) または (b) の問いに答えよ．

(a) (1) 関数 $f(x)$ は，$f(0)=0$ を満たし，常に $f''(x)<0$ であるとする．

$$u(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

とおく．$x>0$ のとき，$u'(x)<0$, $u(x)<0$ であることを示せ．

(2) 関数 $g(x)$ は，常に $g''(x)<0$ を満たすとする．$a<b$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx<(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ を示せ．

（'05 大阪市大・理（後期）（改題））

(3) $a<b$ のとき，不等式 $(b-a)\cdot\dfrac{f(a)+f(b)}{2}<\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を示せ．

(b) 関数 $f(x)$ は，常に $f''(x)<0$ を満たすものとする．

(1) $m=\dfrac{a+b}{2}$ とおくと 不等式

$$f(x)\leqq f'(m)(x-m)+f(m) \qquad \cdots\cdots ①$$

を示せ．

(2) $a<b$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ を示せ．

(3) $a<b$ のとき，不等式 $(b-a)\cdot\dfrac{f(a)+f(b)}{2}<\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を示せ．

解 (a) (1) $u(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{-x} f(t)\,dt$ と変形すると

$$u'(x)=f(x)+f(-x)\,,\ u''(x)=f'(x)-f'(-x)$$

$f''(x)<0$ より $f'(x)$ は減少関数なので，$x>0$ のとき $x>-x$ から $f'(x)<f'(-x)$

したがって $x>0$ のとき $u''(x)<0$ より $u'(x)$ は $[0\,,\infty)$ で減少関数である．

$x>0$ のとき $u'(x)<u'(0)=2f(0)=0$

したがって $x>0$ のとき $u(x)$ は $[0\,,\infty)$ で減少関数であるから

$x>0$ のとき $u(x)<u(0)=0$

(2) $I=\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx-(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^b\left\{g(x)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}dx$

において $x-\dfrac{a+b}{2}=t$ とおくと

$$I=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\left\{g\left(t+\frac{a+b}{2}\right)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}dt$$

$f(x)=g\left(x+\dfrac{a+b}{2}\right)-g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ とおくと $f(0)=0$ で

$I=\displaystyle\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}f(t)\,dt$ となるので，(1) の結果から $u(x)<0$ すなわち

$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx<(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ が成り立つ．

(3)　$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt-\frac{x-a}{2}(f(a)+f(x))$　$(a\leqq x\leqq b)$ とおき，$a<x$ のとき $F(x)>0$ であることを示せばよい．

$$F'(x)=\frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(x-a)}{2}\,,F''(x)=-\frac{(x-a)}{2}f''(x)$$

$a<x$ のとき，$F''(x)>0$ より $F'(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ で増加関数となる．

したがって，$a<x$ のとき $F'(x)>F'(a)=0$ より $F(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ で増加関数となる．

よって，$a<x$ のとき $F(x)>F(a)=0$ より $F(b)>0$ となる．■

解 (b) (1)　$g(x)=f(x)-\{f'(m)(x-m)+f(m)\}$ とおくと，$g'(x)=f'(x)-f'(m)$

で $f''(x)<0$ より $f'(x)$ は減少関数だから，$g'(x)$ は $x=m$ の前後で符号を正から負に変えるので，$g(x)\leqq g(m)=0$ で，等号は $x=m$ のときだけである．

(2)　① を $a\leqq x\leqq b$ で積分して，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx&<\int_a^b\{f'(m)(x-m)+f(m)\}\,dx\\&=\left[f'(m)\frac{(x-m)^2}{2}+f(m)x\right]_a^b\\&=f'(m)(b-a)\,.\end{aligned}$$

(3)　（省略）■

$\boxed{29}$ $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,\theta$ とおく．一般に $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ が存在するとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$ と書く．次の問いに答えよ．

(1) 0 でない実数 x に対して不等式 $e^x > x+1$ を示せ．

(2) 0 でない実数 x に対して不等式 $1-x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ を示せ．

(3) $\displaystyle I = \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ が存在するとき，$\displaystyle I = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx$ を示せ．

(4) $$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$
を示せ．

(5) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = I_{2n+1}\,,\ \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{2n-2}$ を示せ．

(6) $\displaystyle I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad (n \geqq 2)\,,\ I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ を示せ．

(7) $\displaystyle 1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}\quad (n \geqq 1)\,,\ \lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ を示せ．

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_{2n+1}$ を求めよ．

(9) $\displaystyle I = \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ が存在するとき，I の値を求めよ．

$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示すのが目標である．

解 (1) $f(x) = e^x-(x+1)$ とおくと，$f'(x) = e^x - 1$．

増減表から $x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$．

x		0	
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2)　$x \fallingdotseq 0$ のとき $x^2 \fallingdotseq 0$ であるから，(1) の不等式より

$e^{-x^2} > -x^2+1$, $e^{x^2} > x^2+1$ すなわち，

$$1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

が成り立つ．

(3)　$I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ において $t=\sqrt{n}x$ とおくと，

$$I = \int_0^\infty e^{-nx^2}\,(\sqrt{n}dx) = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx\,.$$

(4)　(2) から $0<x<1$ のとき，$(1-x^2)^n < e^{-nx^2}$ が成り立つから

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx < \int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx$$

(2) から $0<x$ のとき，$e^{-nx^2} < \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ が成り立つから

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx < \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx\,.$$

したがって，

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

が成り立つ．

(5)　$x=\sin\theta$ とおくと，

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^n(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\cos\theta\,d\theta = I_{2n+1}\,.$$

$x=\tan\theta$ とおくと，

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^n}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n}\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = I_{2n-2}\,.$$

(6) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$，$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\,.$

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)' x\,dx \\
&= \Big[-\sin^{n-1} x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,.
\end{aligned}
$$

ゆえに，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つ．両辺に nI_{n-1} をかけると

$$nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}\ (\,n\text{ によらず一定}\,)$$

よって $nI_nI_{n-1} = I_1I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ から

$$I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n}\,.$$

(7) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ であるから

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx\,.$$

$$0 < I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}\,,\ 1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}\,.$$

(6) の結果から $\dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n}$ となるから

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \quad (n \geqq 1)\,.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ となる，

(8) (6) から $I_{2n}I_{2n+1} = \dfrac{\pi}{4n+2}\,.$

これを変形して $\sqrt{n}\,I_{2n+1} = \sqrt{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n+2}} \div \sqrt{\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}} \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\,n \to \infty\,)\,.$

(9) (4)，(5) から $\sqrt{n}\,I_{2n+1} < I < \sqrt{n}\,I_{2n-2}$ で $n \to \infty$ のとき，

$\sqrt{n}\,I_{2n+1} \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\sqrt{n}\,I_{2n-2} = \sqrt{n-1}\,I_{2n-1} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \cdot \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n-2}} \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$

よって，$\quad I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$ ■

［補足］　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ が存在することの説明

$x \geqq 1$ のとき，　$x^2 \geqq x$ より $e^{-x^2} \leqq e^{-x}$ だから，任意の正の数 $R(>1)$ に対して

$$\int_1^R e^{-x^2}\,dx \leqq \int_1^R e^{-x}\,dx$$

が成り立つ．$\displaystyle\int_1^R e^{-x}\,dx$ は R について増加関数で，

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}(e^{-1}-e^{-R}) = e^{-1}$$

が成り立つ．したがって，不等式

$$\int_1^R e^{-x^2}\,dx \leqq e^{-1}$$

が成り立つ．$\displaystyle\int_1^R e^{-x^2}\,dx$ は R について増加関数で，その値は e^{-1} 以下であるから，$R \to \infty$ のときの極限が存在して，

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R e^{-x^2}\,dx \leqq e^{-1}$$

が成り立つ．よって，$\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ が存在するから，

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

は存在する．■

※　$\sqrt{n}I_{2n+1} < \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \sqrt{n}I_{2n-2}$ から $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ を求める初等的な解法は，「高木貞治 :『解析概論』改訂第三版　, 岩波書店 ,$p.117$」による．

$\boxed{30}$ 次の問いに答えよ．なお，Rolle の定理「$f(x)$ が $[a\,,b]$ で連続，$(a\,,b)$ で微分可能であって，さらに，$f(a)=f(b)$ ならば，$f'(c)=0\,,a<c<b$ を満たす c が存在する．」を用いてもよい．

(1) $f(x)\,,f'(x)\,,\dots\,,f^{(n-1)}(x)$ が $[a\,,b]$ で連続，$(a\,,b)$ で $f^{(n)}(x)$ が存在するとき

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

を満たす $c\,(\,a<c<b\,)$ が存在することを示せ．(Taylor の定理)

(2) $f(x)\,,f'(x)\,,\dots\,,f^{(n-1)}(x)$，$g(x)\,,g'(x)\,,\dots\,,g^{(n-1)}(x)$ が $[a\,,b]$ で連続，$(a\,,b)$ で $f^{(n)}(x)\,,g^{(n)}(x)$ が存在して ，$g^{(n+1)}(x)\fallingdotseq 0$ ならば

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\dfrac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)-\dfrac{(b-a)^2}{2!}g''(a)-\cdots-\dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a)}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)} \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす $c\,(\,a<c<b\,)$ が存在することを示せ．

(3) (2) を用いて（1）を示せ．

(4) $f(x)\,,f'(x)\,,\dots\,,f^{(n-1)}(x)$，$g(x)\,,g'(x)\,,\dots\,,g^{(n-1)}(x)$ が $[p\,,q]$ で連続，$(p\,,q)$ で $f^{(n)}(x)\,,g^{(n)}(x)$ が存在して ，$g^{(n+1)}(x)\fallingdotseq 0$ かつ $a\in(p\,,q)$ で $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0\,,$

$$g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(n-1)}(a)=0$$

ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}\,.$$

解 (1) $$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

$$+\frac{(b-a)^n}{n!}k$$

とおき，

$$g(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots$$
$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)-k\frac{(b-x)^n}{n!}$$

とおく．$g(x)$ は Rolle の定理の仮定を満たすから，$g(x)$ に対して Rolle の定理を適用する．

$$g'(x)=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+k\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$ より

$$g'(c)=-\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c)+k\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}=0\,,\ a<c<b$$

を満たす c が存在する．これから

$$k=f^{(n)}(c)$$

を得る．よって．

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

を満たす $c\,(\,a<c<b\,)$ が存在する．

(2) Taylor の定理から

$$g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}g''(a)-\cdots-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a)$$
$$=\frac{(b-a)^n}{n!}g^{(n)}(\xi)\quad(\,a<\xi<b\,)$$

となる ξ が存在する．仮定より $g^{(n)}(\xi)\fallingdotseq 0$ だから①の左辺の分母は 0 にならない．

①の左辺を k とおき，

$$h(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$
$$-k\left\{g(b)-g(x)-(b-x)g'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}g''(x)-\cdots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(x)\right\}$$

とおく．$h(x)$ は Rolle の定理の仮定を満たすから，$h(x)$ に対して Rolle の定理を適用する．

$$h'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + k\left\{\frac{(b-x)^n}{n!}g^{(n)}(x)\right\} \text{ より}$$
$$h'(c) = -\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n)}(c) + k\left\{\frac{(b-c)^n}{n!}g^{(n)}(c)\right\} = 0\,,\ a < c < b$$

を満たす c が存在する．これから

$$k = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$$

を得る．よって

$$\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dfrac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots - \dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)}{g(b) - g(a) - (b-a)g'(a) - \dfrac{(b-a)^2}{2!}g''(a) - \cdots - \dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a)}$$
$$= \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$$

を満たす $c\,(\,a < c < b\,)$ が存在する．

(3)　$g(x) = (x-a)^n$ より，

$$\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dfrac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots - \dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)}{(b-a)^n}$$
$$= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

を満たす $c\,(\,a < c < b\,)$ が存在する．この式を変形すると (1) の等式となる．

(4)　(2) の結果を使うと

$\dfrac{g(a)}{g(b)} = \dfrac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$ を満たす $c\,(\,a < c < b\,)$ が存在する．$b \to a$ のとき，$c \to a$ であるから

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c\to a}\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}\,. \qquad \blacksquare$$

$\boxed{31}$ $f(x)=a^x$ ($a>0\,,a\neq 0$) とおき，
$f_1(x)=f(x)\,,f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ $(n=2\,,3\,,\dots)$ で $f_n(x)$ を定義する．
次に，方程式 $f_n(x)=x$ の実数解の集合を F_n とおく．すなわち

$$\mathrm{F}_n=\{x\,|\,f_n(x)=x\,,x\text{ は実数 }\}.$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a>1$ のとき $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1$ を示せ．
(2) $f_2(x)\,,f_4(x)\,,\dots$ は増加関数であることを示せ．
(3) n が偶数のとき $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_2$ を示せ．
(4) n が奇数のとき $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1$ を示せ．
(5) F_1 の要素の個数を調べよ．
(6) F_2 の要素の個数を調べよ．

解 (1) $f(x_0)\neq x_0 \Longrightarrow f_n(x_0)\neq x_0$ $(*)$ を示す．
$a>1$ のとき $f_1(x)=f(x)=a^x$ は増加関数である．
(ア) $x_0<f_1(x_0)$ の場合 $f_1(x_0)<f(f_1(x_0))$ すなわち $f_1(x_0)<f_2(x_0)$．
同様にして $f_2(x_0)<f_3(x_0)\dots$ が成り立つから

$$x_0<f_1(x_0)<f_2(x_0)<\cdots<f_n(x_0)\,,$$

すなわち，$x_0<f_n(x_0)$ が成り立つ．
(イ) $x_0>f_1(x_0)$ の場合は $x_0>f_n(x_0)$ が成り立つ．
(ア)，(イ) より $(*)$ が成り立つ．$(*)$ の対偶をとると

$$f_n(x_0)=x_0 \Longrightarrow f_1(x_0)=x_0$$

よって $\mathrm{F}_n\subset\mathrm{F}_1$．
$\mathrm{F}_1\subset\mathrm{F}_n$ は明らかに成り立つから $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}_1$．

(2) $x_1<x_2$ とする．
(i) $a>1$ のとき
$f(x)$ は増加関数であるから，$f(x_1)<f(x_2)$ より $f(f(x_1))<f(f(x_2))$．
よって，$f_2(x_1)<f_2(x_2)$．
(ii) $0<a<1$ のとき
$f(x)$ は減少関数であるから，$f(x_1)>f(x_2)$ より $f(f(x_1))<f(f(x_2))$．
よって，$f_2(x_1)<f_2(x_2)$．

(i)，(ii) から $f_2(x)$ は増加関数である．

$f_{2m}(x)$ $(m \geqq 1)$ が増加関数であると仮定すると，$f_{2m}(x_1) < f_{2m}(x_2)$ が成り立つ．

$f_2(x)$ は増加関数であるから $f_2(f_{2m}(x_1)) < f_2(f_{2m}(x_2))$ すなわち $f_{2m+2}(x_1) < f_{2m+2}(x_2)$ となり $f_{2m+2}(x)$ は増加関数である．

したがって，帰納法により，$f_2(x)\,, f_4(x)\,, \ldots$ は増加関数である．

(3)　$f(x_0) \fallingdotseq x_0 \Longrightarrow f_n(x_0) \fallingdotseq x_0$　$(**)$ を示す．

(i)　$x_0 < f_2(x_0)$ の場合

$f_2(x)$ は増加関数であるから $f_2(x_0) < f_2(f_2(x_0))$ すなわち $f_2(x_0) < f_4(x_0)$.

同様にして $f_4(x_0) < f_6(x_0) \ldots$ が成り立つから

$$x_0 < f_2(x_0) < f_4(x_0) < \cdots < f_n(x_0)$$

すなわち，$x_0 < f_n(x_0)$ が成り立つ．

(ii)　$x_0 > f_2(x_0)$ の場合

(i) と同様にして $x_0 > f_n(x_0)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より $(**)$ が成り立つ．$(**)$ の対偶をとると

$$f_n(x_0) = x_0 \Longrightarrow f_2(x_0) = x_0$$

よって $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_2$.

$\mathrm{F}_2 \subset \mathrm{F}_n$ は明らかに成り立つから $\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_2$.

(4)　(1) から $a > 1$ のときは $\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_1$ だから，$0 < a < 1\,, n \geqq 3$ のとき証明すればよい．

$x_0 < f(x_0)$ と仮定すると，(2) から $f_{n-1}(x)$ は増加関数だから

$$f_{n-1}(x_0) < f_{n-1}(f(x_0)) = f_n(x_0)\,. \qquad \cdots\cdots①$$

$x_0 \geqq f_n(x_0)$ が成り立つとすれば，①から $f_{n-1}(x_0) < x_0$.

$f(x)$ は減少関数であるから，$f_n(x_0) = f(f_{n-1}(x_0)) > f(x_0)$.

$x_0 \geqq f_n(x_0)$ を用いると $x_0 \geqq f(x_0)$ となり $x_0 < f(x_0)$ に反する．

よって，$x_0 < f_n(x_0)$. が成り立つ．

$x_0 > f(x_0)$ のときは同様にして $x_0 > f_n(x_0)$ が成り立つ．

以上のことから $f(x_0) \fallingdotseq x_0 \Longrightarrow f_n(x_0) \fallingdotseq x_0$ が言えたから $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_1$

明らかに $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_n$. は成り立つから，$\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_2$.

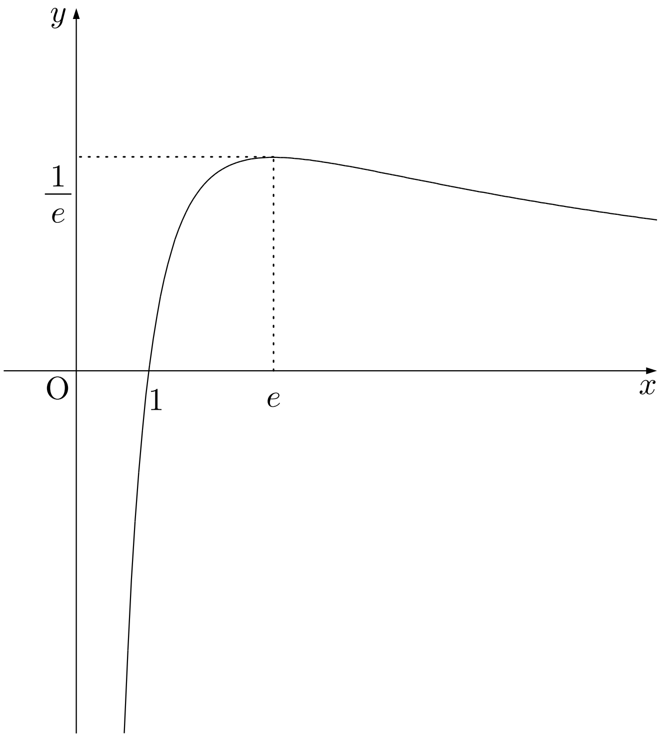
(5)　$a^x = x$ の実数解の個数を調べる．

$$a^x = x \Longleftrightarrow \log a = \frac{\log x}{x}$$

$y = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと $y' = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$.

x	0		e	
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$x=e$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる．また，$\displaystyle\lim_{x\to+0} y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y=0$



$y = \dfrac{\log x}{x}$ と $y = \log a$ $(\log a \fallingdotseq 0)$ のグラフの共有点の個数を調べることにより，

$\log a < 0$ のとき 1 個 ，
$0 < \log a < \dfrac{1}{e}$ のとき 2 個，
$\log a = \dfrac{1}{e}$ のとき 1 個 ，
$\dfrac{1}{e} < \log a$ のとき 0 個，
したがって，
$0 < a < 1$ のとき 1 個 ，
$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき 2 個，
$a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき 1 個 ，
$e^{\frac{1}{e}} < a$ のとき 0 個

(6) $a^{a^x} = x$ の実数解の個数を調べる．

(I) $a > 1$ のとき

すべての自然数 n について $\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_1$ だから $\mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_1$ である．

(II) $0 < a < 1$ のとき

$$a^{a^x} = x \Longleftrightarrow a^x = \log_a x \Longleftrightarrow a^x \log a = \log x$$

$F(x) = a^x \log a - \log x$ とおくと $F'(x) = \dfrac{xa^x(\log a)^2 - 1}{x}$

ここで，$g(x) = xa^x(\log a)^2 - 1$ とおくと

$$\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1, \quad \left(\because \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1/a)^x} = 0\right)$$

$$g'(x) = a^x(\log a)^3\left(x + \frac{1}{\log a}\right).$$

$0 < x < -\dfrac{1}{\log a}$ で $g'(x) > 0$, $-\dfrac{1}{\log a} < x$ で $g'(x) < 0$ となるから

$x = -\dfrac{1}{\log a}$ で極大値 $g\left(-\dfrac{1}{\log a}\right) = \dfrac{-\log a - e}{e}$ をとる.

(i) $0 < a < \dfrac{1}{e^e}$ のとき

$-\log a - e > 0$ となるから $g\left(-\dfrac{1}{\log a}\right) > 0$.

よって, $g(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつから, これを α, β ($\alpha < \beta$)

とおくと $\alpha < -\dfrac{1}{\log a} < \beta, -\dfrac{1}{\log a} < \dfrac{1}{e}$.

ここで, $p_0 = -\dfrac{1}{\log a}$ とおくと $\alpha < p_0 < \beta, p_0 < \dfrac{1}{e}$ が成り立つ.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$		↘	極小	↗	極大	↘

また $\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x) = +\infty, F(1) = a\log a < 0$ が成り立つ.

$F(\alpha) < 0, F(\beta) > 0$ を直接示すのが難しいので $F(p_0) > 0$, $F\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0$

から間接的に $F(\alpha) < 0, F(\beta) > 0$ を示そう.

$p_0 = -\dfrac{1}{\log a}$ から $a^{p_0} = \dfrac{1}{e}$ で

$$F(p_0) = a^{p_0}\log a - \log p_0 = \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{p_0}\right) - \log p_0 = \frac{1}{p_0}\left(\frac{1}{e} + p_0\log p_0\right),$$

$$F\left(\frac{1}{e}\right) = a^{\frac{1}{e}}\log a + 1 = e\left(a^{\frac{1}{e}}\log a^{\frac{1}{e}} + \frac{1}{e}\right).$$

$0 < p_0 < \dfrac{1}{e}$, $0 < a^{\frac{1}{e}} < \dfrac{1}{e}$ であるから,

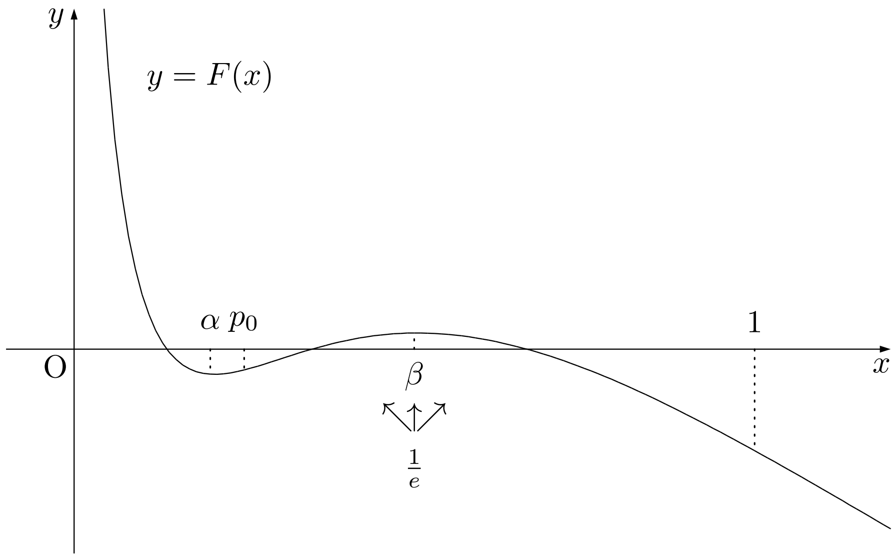
$h(x) = x\log x + \dfrac{1}{e}\left(0 < x \leqq \dfrac{1}{e}\right)$ とおく.

$0 < x < \dfrac{1}{e}$ のとき $h'(x) = \log x + 1 < 0$ である.

よって,

$0 < x < \dfrac{1}{e}$ のとき $h(x) > h\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$ から $F(p_0) > 0, F\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0$.

以上のことから, $y = F(x)$ のグラフをかくと次のようになる.



したがって，

$F(x)=0$ すなわち $f_2(x)=x$ の実数解は 3 個ある．

(ii) $\dfrac{1}{e^e} \leqq a < 1$ のとき

$-\log a - e < 0$ となるから $g\left(-\dfrac{1}{\log a}\right) \leqq 0$.

よって， $F'(x) \leqq 0$ となり $F(x)$ は減少関数である．

$\displaystyle\lim_{x\to+0} F(x) = +\infty$, $F(1) = a\log a < 0$ から方程式 $F(x)=0$ すなわち $f_2(x)=x$ の実数解は 1 個である．

$0 < a < \dfrac{1}{e^e}$ のとき　3 個，　$\dfrac{1}{e^e} \leqq a < 1$ のとき　1 個，

$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき　2 個，　$a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき　1 個，

$a > e^{\frac{1}{e}}$ のとき　0 個　■

［注意］　(6)(II)(i) で $F(\alpha) < 0\,, F(\beta) > 0$ を直接示すのが難しいので $F(p_0) > 0$, $F\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0$ から間接的に $F(\alpha) < 0\,, F(\beta) > 0$ を示したが，ここでは，直接的に示すことを考えてみる．最初に $F(\beta) > 0$ を示す．

『$g(\beta) = \beta a^\beta (\log a)^2 - 1 = 0\,, -\dfrac{1}{\log a} < \beta\,, 0 < a < \dfrac{1}{e^e}$ のとき

$$F(\beta) = a^\beta \log a - \log\beta = \frac{1}{\beta(\log a)^2}\cdot\log a - \log\beta = \frac{1-\beta\log\beta\log a}{\beta\log a} > 0』$$

を証明すればよい．

$$0<a<\frac{1}{e^e}\,,\beta>-\frac{1}{\log a}\,,\beta a^\beta(\log a)^2=1\longrightarrow 1-\beta\log\beta\log a<0$$

$$\Longleftrightarrow\quad b>e^e\,,\beta>\frac{1}{\log b}\,,\beta(\log b)^2=b^\beta\longrightarrow 1+\beta\log\beta\log b<0\ \left(b=\frac{1}{a}\text{とおいた}\right)$$

$$\Longleftrightarrow\quad c>e\,,\beta>\frac{1}{c}\,,\beta c^2=e^{c\beta}\longrightarrow 1+\beta c\log\beta<0\quad(c=\log b\text{ とおいた})$$

$$\Longleftrightarrow\quad c>e\,,\gamma>1\,,\gamma c=e^\gamma\longrightarrow 1+\gamma\log\frac{\gamma}{c}<0\quad(\gamma=c\beta\text{とおいた})$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{e^\gamma}{\gamma}>e\,,\gamma>1\longrightarrow 1+\gamma\log\gamma-\gamma(\gamma-\log\gamma)<0\quad(c\text{ を消去})$$

$$\Longleftrightarrow\quad \gamma-1>\log\gamma\,,\gamma>1\longrightarrow 0<\gamma^2-2\gamma\log\gamma-1$$

$$\Longleftrightarrow\quad \gamma>1\longrightarrow 0<\gamma^2-2\gamma\log\gamma-1\quad(\gamma\fallingdotseq 1\text{ で常に}\gamma-1>\log\gamma\text{は成立 }(*))$$

$G(\gamma)=\gamma^2-2\gamma\log\gamma-1\ (\gamma\geqq 1)$ とおくと

$r>1$ のとき $G'(\gamma)=2\gamma-2\log\gamma-2=2(\gamma-1-\log\gamma)>0$．（$\because\quad(*)$）

$G(\gamma)$ は $[1\,,\infty)$ で増加関数で， $\gamma>1$ のとき $G(\gamma)>G(1)=0$．

ゆえに，$F(\beta)>0$．

$F(\alpha)<0$ も同様に示すことができる． ■

［$(*)$ の証明］ $H(\gamma)=\gamma-1-\log\gamma\ (\gamma>0)$ とおくと，$H'(\gamma)=1-\dfrac{1}{\gamma}$．

$0<\gamma<1$ のとき $H'(\gamma)<0$, $1<\gamma$ のとき $H'(\gamma)>0$ であるから

$\gamma=1$ で極小かつ最小で $H(1)=0$．

したがって，

$\gamma\fallingdotseq 1$ のとき $\gamma-1-\log\gamma)>0$ すなわち $\gamma-1>\log\gamma$ が成り立つ． ■

$\boxed{32}$ 次の記号を導入する．

$$\left\|\begin{array}{llll} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{array}\right\| = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{l=1}^{m} x_{l\,k}\right)$$

$$= x_{11}x_{21}\dots x_{m1} + x_{12}x_{22}\dots x_{m2} + \dots\dots + x_{1n}x_{2n}\dots x_{mn}$$

（縦に掛けてから加える）

次に，実数 $r_1, r_2, \dots, r_n$ を大きい順に並べたものを $s_1, s_2, \dots, s_n$ とするとき，

$$\overline{r_1,\, r_2,\, \dots,\, r_n} = s_1,\, s_2,\, \dots,\, s_n \ \left[\overline{r_1\, r_2\, \dots\, r_n} = s_1\, s_2\, \dots\, s_n\right]$$

と書くことにする．［$\overline{}$ は大きい順に並べる操作を表す.］たとえば,

$$\overline{2.5,\ \frac{3}{4},\ -\frac{10}{3},\ \sqrt{5}} = 2, 5,\ \sqrt{5},\ \frac{3}{4},\ -\frac{10}{3}\ .$$

この記号に関して次のことが成り立つ．

> $n \geqq 3$ のとき
>
> $$\overline{r_1\, r_2\, \dots\, r_{n-1}\, r_n} = \overline{r_1\, \overline{\overline{r_2\, \dots\, r_{n-1}}\, r_n}}$$
>
> が成り立つ．

(1)　次の不等式を二重帰納法で証明せよ．

$m,\, n$ は自然数で，$x_{ij} \geqq 0,\ (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ のとき

$$\left\|\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ & & \dots & \\ & & \dots & \\ & & \dots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{array}\right\| \leqq \left\|\begin{array}{c} \overline{x_{11} \quad x_{12} \quad \dots \quad x_{1n}} \\ \overline{x_{21} \quad x_{22} \quad \dots \quad x_{2n}} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \overline{x_{m1} \quad x_{m2} \quad \dots \quad x_{mn}} \end{array}\right\| .$$

(2)　$a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, \dots, a_n \geqq 0$ のとき不等式

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n \geqq n a_1 a_2 \cdots a_n$$

が成り立つことを証明せよ．

解 (1)　命題を $P(m\,,n)$ として，二重帰納法によって証明する．

左辺の式において，列の入れ替えを行うことによって，$x_{1\,1} \geqq x_{1\,2} \geqq x_{1\,3} \geqq \cdots \geqq x_{1\,n}$ と仮定しても一般性を失わない．このとき

$$z_{1\,j} = x_{1\,j} - x_{1\,n}\,(1 \leqq j \leqq n-1) \quad \text{とおくと} \quad z_{1\,1} \geqq z_{1\,2} \geqq z_{1\,3} \geqq \cdots \geqq z_{1\,n-1} \geqq 0\,.$$

また，$\overline{x_{i1},\, x_{i2},\, \ldots,\, x_{in}} = r_{i1},\, r_{i2},\, \ldots,\, r_{in}$,$\overline{x_{i1},\, x_{i2},\, \ldots,\, x_{in-1}} = r^*_{i1},\, r^*_{i2},\, \ldots,\, r^*_{in-1}$ $(2 \leqq i \leqq m)$ とおくと

$$r^*_{i1} \leqq r_{i1},\, r^*_{i2} \leqq r_{i2},\, \ldots,\, r^*_{in-1} \leqq r_{in-1} \quad (1 \leqq i \leqq m)\,.$$

よって

$$\begin{gathered} r^*_{21}r^*_{31}\cdots r^*_{m1} \leqq r_{21}r_{31}\cdots r_{m1} \\ r^*_{22}r^*_{32}\cdots r^*_{m2} \leqq r_{22}r_{32}\cdots r_{m2} \\ \cdots\cdots \\ r^*_{2n-1}r^*_{3n-1}\cdots r^*_{mn-1} \leqq r_{2n-1}r_{3n-1}\cdots r_{mn-1}\,. \end{gathered} \tag{$*$}$$

(i)　$P(m,\ 1)$，$P(1,\ n)$ とも等号が成り立ち真である．

(ii)　$P(m,\ n-1)$，$P(m-1,\ n)$ がともに真であると仮定して，$m,\ n$ のときを考える．

$m,\ n$ のときの左辺

$$= \left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1\,n-1} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} \end{matrix} \right\| + x_{1n}x_{2n}\cdots x_{mn}$$

$$= \left\| \begin{matrix} z_{11}+x_{1n} & z_{12}+x_{1n} & \ldots & z_{1\,n-1}+x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2\,n-1} \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ & & \ldots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{m\,n-1} \end{matrix} \right\| + x_{1n}x_{2n}\cdots x_{mn}$$

$$
= \left\| \begin{array}{cccc} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1\,n-1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m\,n-1} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cccc} x_{1n} & x_{1n} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m\,n-1} \end{array} \right\|
$$

$$
+ x_{1n} x_{2n} \cdots x_{mn}
$$

$$
= \left\| \begin{array}{cccc} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1\,n-1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m\,n-1} \end{array} \right\| + x_{1n} \left\| \begin{array}{ccccc} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\,n-1} & x_{2\,n} \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m\,n-1} & x_{m\,n} \end{array} \right\|
$$

(ここで，$P(m,\ n-1)$, $P(m-1,\ n)$ が真であることを使う．)

$$
\leqq \left\| \begin{array}{cccc} \hline z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1\,n-1} \\ \hline x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & & \\ \hline x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m\,n-1} \end{array} \right\| + x_{1n} \left\| \begin{array}{ccccc} & & & & \\ \hline x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\,n-1} & x_{2n} \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & & & \\ \hline x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m\,n-1} & x_{mn} \end{array} \right\|
$$

$$
= \left\| \begin{array}{cccc} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1\,n-1} \\ r^*_{21} & r^*_{22} & \dots & r^*_{2\,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & & \\ r^*_{m1} & r^*_{m2} & \dots & r^*_{m\,n-1} \end{array} \right\| + x_{1n} \left\| \begin{array}{ccccc} r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2\,n-1} & r_{2n} \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & & & \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{m\,n-1} & r_{mn} \end{array} \right\|
$$

$$
\overset{(*)}{\leqq} \left\| \begin{array}{cccc} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1\,n-1} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2\,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & & \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{m\,n-1} \end{array} \right\| + x_{1n} \left\| \begin{array}{ccccc} r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2\,n-1} & r_{2n} \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & & & \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{m\,n-1} & r_{mn} \end{array} \right\|
$$

$$
= \left\| \begin{array}{cccc} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1\,n-1} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccccc} x_{1n} & x_{1n} & \cdots & x_{1n} & x_{1\,n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} & r_{2n} \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1} & r_{mn} \end{array} \right\|
$$

$$
= \left\| \begin{array}{cccc} z_{11}+x_{1n} & z_{12}+x_{1n} & \cdots & z_{1\,n-1}+x_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1} \end{array} \right\|
$$

$$
+\, x_{1n}r_{2n}r_{3n}\cdots r_{mn}
$$

$$
= \left\| \begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1\,n-1} & x_{1\,n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,n-1} & r_{2\,n} \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{m\,n-1} & r_{m\,n} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \hline x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \hline x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ \\ \hline x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \right\| .
$$

したがって，$P(m,\ n)$ も真である.

(i)，(ii) からすべての自然数 $m,\ n$ について，$P(m,\ n)$ は真である.

(2)　n を自然数，$a_i \geqq 0,\ (1 \leqq i \leqq n)$ のとき

$$
\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{array} \right\| \leqq \left\| \begin{array}{cccc} \hline a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \\ \hline a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array} \right\| .
$$

したがって，$a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, \ldots, a_n \geqq 0$ のとき不等式

$$
a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geqq n a_1 a_2 \cdots a_n \quad \text{が成り立つ.}
$$

■

［別解 (1)］　数学的帰納法で証明する．

(I)　$n=2$ の場合

(i)　$m=1$ のとき，明らかに不等式は成り立つ．（等号が成立する．）

(ii)　$m-1\,(\geqq 1)$ のとき成り立つと仮定すると，m のときの不等式の右辺において

$$\left\|\begin{array}{cc}\hline x_{11} & x_{12}\\ \hline x_{21} & x_{22}\\ \vdots & \vdots\\ \\ \hline x_{m\,1} & x_{m\,2}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\\ \vdots & \vdots\\ r_{m\,1} & r_{m\,2}\end{array}\right\|.$$

すなわち，

$$\overline{x_{11},\,x_{12}} = r_{11},\,r_{12},\quad \overline{x_{21},\,x_{22}} = r_{21},\,r_{22},\,\ldots,\,\overline{x_{m\,1},\,x_{m\,2}} = r_{m\,1},\,r_{m\,2}$$

$$P = r_{11}r_{21}\cdots r_{m\,1} + r_{12}r_{22}\cdots r_{m\,2} - (x_{11}x_{21}\cdots x_{m\,1} + x_{12}x_{22}\cdots x_{m\,2})$$

とおき，$P\geqq 0$ を示す．

$x_{m\,1}\geqq x_{m\,2}$ のとき，$r_{m\,1}=x_{m\,1},\,r_{m\,2}=x_{m\,2}$ で

$$\begin{aligned}P &= r_{11}r_{21}\cdots r_{m-1\,1}x_{m\,1} + r_{12}r_{22}\cdots r_{m-1\,2}x_{m\,2}\\ &\qquad - (x_{11}x_{21}\cdots x_{m-1\,1}x_{m\,1} + x_{12}x_{22}\cdots x_{m-1\,2}x_{m\,2})\\ &= (r_{11}r_{21}\cdots r_{m-1\,1} - x_{11}x_{21}\cdots x_{m-1\,1})x_{m\,1}\\ &\qquad + (r_{12}r_{22}\cdots r_{m-1\,2} - x_{12}x_{22}\cdots x_{m-1\,2})x_{m\,2}\end{aligned}$$

$(r_{11}r_{21}\cdots r_{m-1\,1} - x_{11}x_{21}\cdots x_{m-1\,1}\geqq 0$, $x_{m\,1}\geqq x_{m\,2}$ であるから$)$

$$\begin{aligned}&\geqq (r_{11}r_{21}\cdots r_{m-1\,1} - x_{11}x_{21}\cdots x_{m-1\,1})x_{m\,2}\\ &\qquad + (r_{12}r_{22}\cdots r_{m-1\,2} - x_{12}x_{22}\cdots x_{m-1\,2})x_{m\,2}\\ &= \{(r_{11}r_{21}\cdots r_{m-1\,1} + r_{12}r_{22}\cdots r_{m-1\,2})\\ &\qquad - (x_{11}x_{21}\cdots x_{m-1\,1} + x_{12}x_{22}\cdots x_{m-1\,2})\}\,x_{m\,2}\\ &\geqq 0 \quad (\because \quad \text{仮定}\,, x_{m2}\geqq 0)\end{aligned}$$

$x_{m\,1}\leqq x_{m\,2}$ のときも同様に示せる．

(II)　$n-1\ (\geqq 2)$ のとき成り立つと仮定すると仮定から

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \right\| \leqq \left\| \begin{array}{c} x_{11}\quad \overline{x_{12}\quad \cdots\quad x_{1n}} \\ x_{21}\quad \overline{x_{22}\quad \cdots\quad x_{2n}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{m1}\quad \overline{x_{m2}\quad \cdots\quad x_{mn}} \end{array} \right\| .$$

が成り立つ．また右辺の式については，

$$\left\| \begin{array}{c} x_{11}\quad \overline{x_{12}\quad \cdots\quad x_{1n}} \\ x_{21}\quad \overline{x_{22}\quad \cdots\quad x_{2n}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{m1}\quad \overline{x_{m2}\quad \cdots\quad x_{mn}} \end{array} \right\| \leqq \left\| \begin{array}{c} \overline{x_{11}\quad \overline{x_{12}\quad \cdots\quad x_{1n}}} \\ \overline{x_{21}\quad \overline{x_{22}\quad \cdots\quad x_{2n}}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \overline{x_{m1}\quad \overline{x_{m2}\quad \cdots\quad x_{mn}}} \end{array} \right\|$$

$$\leqq \left\| \begin{array}{c} \overline{x_{11}\quad \overline{\overline{x_{12}\quad \cdots\quad x_{1n}}}} \\ \overline{x_{21}\quad \overline{\overline{x_{22}\quad \cdots\quad x_{2n}}}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \overline{x_{m1}\quad \overline{\overline{x_{m2}\quad \cdots\quad x_{mn}}}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \overline{x_{11}\quad x_{12}\quad \cdots\quad x_{1n}} \\ \overline{x_{21}\quad x_{22}\quad \cdots\quad x_{2n}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \overline{x_{m1}\quad x_{m2}\quad \cdots\quad x_{mn}} \end{array} \right\| .$$

■

※　ここで導入した新記号と，別解の（II）は月刊「大学への数学」1970 年 9 月号の特別研究室に掲載された，当時高校 2 年生の寺西　功氏の「ある不等式の証明」によるものである．

$\boxed{33}$ 次の (a) または (b) または (c) の問いに答えよ.

(a) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ とする.

(1) すべての i, j に対して $a_ib_i + a_jb_j \geqq a_ib_j + a_jb_i$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i + a_jb_j)$ と $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j + a_jb_i)$ を計算することにより

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

を証明せよ.

(b) (1) 任意の数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ に対して

$$n\sum_{i=1}^{n} c_id_i - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} d_j\right) = \sum_{1\leqq i<j\leqq n}(c_i - c_j)(d_i - d_j) \qquad (*)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき，不等式

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

を証明せよ.

(c) (1) $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$, $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ とし, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を並べかえたものを $z_1, z_2, \ldots, z_n$ とするとき，不等式

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ のとき，不等式

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

を証明せよ.

解 (a) (1)　すべての $i\,,j$ に対して $(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqq 0$.

左辺を展開して変形すると，$a_ib_i+a_jb_j\geqq a_ib_j+a_jb_i$ が成り立つ.

(2)　すべての $i\,,j$ について考え

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j)\geqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i)\,.\qquad\cdots\cdots①$$

左辺と右辺を計算する.

$$\begin{aligned}
\text{左辺}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\\
&=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\sum_{j=1}^{n}+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\cdot n+n\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)\\
&=2n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_jb_i\\
&=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j+\sum_{i=1}^{n}b_i\sum_{j=1}^{n}a_j\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\\
&=2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\,.
\end{aligned}$$

①から

$$2n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqq 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right).$$

すなわち，

$$n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\,.\qquad\blacksquare$$

解 (b) (1)　数学的帰納法で証明する．

(i)　$n=2$ のとき

$$2(c_1d_1+c_2d_2)-(c_1+c_2)(d_1+d_2)=c_1d_1+c_2d_2-(c_1d_2+c_2d_1)$$
$$=(c_1-c_2)(d_1-d_2)$$

となり，$(*)$ は成り立つ．

(ii)　$n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する．

$$(k+1)\sum_{i=1}^{k+1}c_id_i-\left(\sum_{i=1}^{k+1}c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k+1}d_j\right)$$
$$=(k+1)\left(\sum_{i=1}^{k}c_id_i+c_{k+1}d_{k+1}\right)-\left(\sum_{i=1}^{k}c_i+c_{k+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}d_j+d_{k+1}\right)$$
$$=k\sum_{i=1}^{k}c_id_i-\left(\sum_{i=1}^{k}c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{k}d_j\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{k}c_id_i+kc_{k+1}d_{k+1}-d_{k+1}\sum_{i=1}^{k}c_i-c_{k+1}\sum_{j=1}^{k}d_j$$
$$=\sum_{1\leqq i<j\leqq k}(c_i-c_j)(d_i-d_j)\qquad(\because\ \text{仮定})$$
$$+\sum_{i=1}^{k}c_id_i+\sum_{i=1}^{k}c_{k+1}d_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}c_id_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}c_{k+1}d_i$$
$$=\sum_{1\leqq i<j\leqq k}(c_i-c_j)(d_i-d_j)+\sum_{i=1}^{k}(c_id_i+c_{k+1}d_{k+1}-c_id_{k+1}-c_{k+1}d_i)$$
$$=\sum_{1\leqq i<j\leqq k}(c_i-c_j)(d_i-d_j)+\sum_{i=1}^{k}(c_i-c_{k+1})(d_i-d_{k+1})$$
$$=\sum_{1\leqq i<j\leqq k+1}(c_i-c_j)(d_i-d_j).$$

したがって $n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

(iii)　(i), (ii) から 2 以上の自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ．

(2)　$$n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)=\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqq 0$$

から 不等式は成り立つ．　■

$z_1 \neq y_1$ のとき, $x_1z_1 + x_jy_1\,(j \neq 1)$ について $x_1 \geqq x_j, y_1 \geqq z_1$ だから, $(x_1 - x_j)(y_1 - z_1) \geqq 0$ 1 より $x_1y_1 + x_jz_1 \geqq x_1z_1 + x_jy_1$. よって, かける相手を交換して x_1y_1 があるようにしたほうが大きいかまたは等しい. 残りの項について, 同様にして x_2y_2 があるほうが大きいかまたは等しい. これを繰り返すと $x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n$ は $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ 以下であることがわかる. ここでは帰納法を用いて証明しておく.

解(c)(1)　$n = 1$ のときは等号が成り立つ.

$n = k$ のとき成り立つと仮定して，$n = k + 1$ のときを考える.

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_k \geqq x_{k+1}\,, y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_k \geqq y_{k+1}$ とし,

$y_1\,, y_2\,, \ldots\,, y_k\,, y_{k+1}$ を 並べかえたものを $z_1\,, z_2\,, \ldots\,, z_k\,, z_{k+1}$ とする.

$z_{k+1} = y_{k+1}$ ならば，仮定から

$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k \geqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_kz_k$ が成り立つから,

両辺に $x_{k+1}y_{k+1} (= x_{k+1}z_{k+1})$ を加えると

$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} \geqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_kz_k + x_{k+1}y_{k+1}$.

$z_{k+1} = y_l\ (l \leqq k)$ のとき,

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_iz_i = \sum_{i=1}^{k} x_iz_i + x_{k+1}z_{k+1}$$

(帰納法の仮定)

$\leqq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{l-1}y_{l-1} + x_ly_{l+1} + \cdots + x_ky_{k+1} + x_{k+1}y_l$

(y_{k+1} と y_l を交換)

$\leqq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{l-1}y_{l-1} + x_ly_{l+1} + \cdots + x_ky_l + x_{k+1}y_{k+1}$

(帰納法の仮定)

$\leqq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{l-1}y_{l-1} + x_ly_l + \cdots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1}$.

(2)　$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n) + (a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + \cdots + a_nb_1)$

$+(a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_5 + \cdots + a_nb_2) + \cdots\cdots$

$+(a_1b_{n-1}+a_2b_n+a_3b_1+\cdots+a_nb_{n-2})+(a_1b_n+a_2b_1+a_3b_2+\cdots+a_nb_{n-1})$

展開した式の第 2 項からはすべて $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$ 以下であるから

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leqq n(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

が成り立つ. ■

$\boxed{32}$ で導入した記号を用いて書き直すと，(c)(1) は次のようになる．

次の不等式が成り立つ．

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{array} \right\| \leqq \left\| \begin{array}{cccc} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{\dots} & \overline{x_n} \\ \overline{y_1} & \overline{y_2} & \overline{\dots} & \overline{y_n} \end{array} \right\| .$$

［注意］　(c)(1) の結果から，$\boxed{33}$(1) で $m = 2$ のときは，$x_{ij} \geqq 0$ の仮定はいらない．

(並べ替えの不等式)

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$, $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ とし，$y_1, y_2, \dots, y_n$ を並べかえたものを $z_1, z_2, \dots, z_n$ とするとき．不等式

$$x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \leqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n \leqq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

が成り立つ．

解　右側の不等式の証明は省略．（$\boxed{33}$(c)(1) 参照）

（左側の不等式の証明）

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$, $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ のとき，
$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$, $-y_n \geqq -y_{n-1} \geqq \cdots \geqq -y_1$ であるから 右側の不等式を用いると

$$x_1(-y_n) + x_2(-y_{n-1}) + \cdots + x_n(-y_1) \geqq x_1(-z_1) + x_2(-z_2) + \cdots + x_n(-z_n)$$

したがって，

$$x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \leqq x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n$$

が成り立つ．■

5　問題 C

$\boxed{1}$　$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}<1$ を満たす自然数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ の最大値 M_n を求めよ．

$$
\begin{aligned}
n=2 \text{ のとき } M_2 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\,,\\
n=3 \text{ のとき } M_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{5}{6}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}\,,\\
n=4 \text{ のとき } M_4 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}=\frac{41}{42}+\frac{1}{43}=\frac{1805}{1806}\,,\\
n=5 \text{ のとき } M_5 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}\\
&= \frac{1805}{1806}+\frac{1}{1807}\\
&= \frac{3263441}{3263442}
\end{aligned}
$$

となる．

（柳田五夫:「$1/a+1/b+1/c+1/d+1/e<1$ を満たす自然数 a, b, c, d, e に対して $1/a+1/b+1/c+1/d+1/e$ の最大値について 」数研通信 No.66 , $pp.10-13$ 参照）

これから，$p_1=2\,, p_{n+1}=p_n(p_n+1)$ で定義された $\{p_n\}$ を考えると， $M_n=\dfrac{p_n-1}{p_n}$ となることが予測される．

（予想）　$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}<1$ を満たす自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ の最大値 M_n は $M_n=\dfrac{p_n-1}{p_n}$, $p_1=2\,, p_{n+1}=p_n(p_n+1)$ で与えられる．

（予想）は $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ の最大値を求めるとき，次の**戦略**が正しいことと同じことである．具体的に $n=6$ とする．

$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_6$, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_6}<1$ を満たす自然数 $x_1, x_2, \ldots, x_6$ に対して，　$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_6}$ を最大にすることを考える．

$\dfrac{1}{x_1} \geqq \dfrac{1}{x_2} \geqq \cdots \geqq \dfrac{1}{x_6}$ だから $\dfrac{1}{x_1}$ を大きくとる．すなわち x_1 を小さくとる．

$\dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_6} < 1$ より $x_1 > 1$.　　$\therefore\ x_1 \geqq 2$.

$x_1 = 2$ ととると　$\dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \cdots + \dfrac{1}{x_6} < \dfrac{1}{2}$ より $x_2 > 2$.　　$\therefore\ x_2 \geqq 3$.

$\dfrac{1}{x_2} \geqq \dfrac{1}{x_3} \geqq \cdots \geqq \dfrac{1}{x_6}$ だから $\dfrac{1}{x_2}$ を大きくとる．すなわち x_2 を小さくとる．

$x_2 = 3$ ととると　$\dfrac{1}{x_3} < \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} + \dfrac{1}{x_5} + \dfrac{1}{x_6} < \dfrac{1}{6}$ より $x_3 > 6$.　　$\therefore\ x_3 \geqq 7$.

$\dfrac{1}{x_3} \geqq \dfrac{1}{x_4} \geqq \dfrac{1}{x_5} \geqq \dfrac{1}{x_6}$ だから $\dfrac{1}{x_3}$ を大きくとる．すなわち x_3 を小さくとる．

$x_3 = 7$ ととると　$\dfrac{1}{x_4} < \dfrac{1}{x_4} + \dfrac{1}{x_5} + \dfrac{1}{x_6} < \dfrac{1}{42}$ より $x_4 > 42$.　$\therefore\ x_4 \geqq 43$.

$\dfrac{1}{x_4} \geqq \dfrac{1}{x_5} \geqq \dfrac{1}{x_6}$ だから $\dfrac{1}{x_4}$ を大きくとる．すなわち x_4 を小さくとる．

$x_4 = 43$ ととると　$\dfrac{1}{x_5} < \dfrac{1}{x_5} + \dfrac{1}{x_6} < \dfrac{1}{1806}$ より $x_5 > 1806$.　　$\therefore\ x_5 \geqq 1807$.

$\dfrac{1}{x_5} \geqq \dfrac{1}{x_6}$ だから $\dfrac{1}{x_5}$ を大きくとる．すなわち x_5 を小さくとる．

$x_5 = 1807$ ととると　$\dfrac{1}{x_6} < \dfrac{1}{3263442}$ より $x_6 > 3263442$.　　$\therefore\ x_6 \geqq 3263443$

$x_6 = 3263443$ ととると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \frac{1}{3263443} \\
=& \frac{3263441}{3263442} + \frac{1}{3263443} \\
=& \frac{10650056950805}{10650056950806}
\end{aligned}$$

が最大である（？）．

Karamata の不等式を用いてこの問題が解けるが，Karamata の不等式の証明を経由しないで考えてみる．いくつかの補題が必要となる．

補題 1　任意の実数 $x\,, y$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$e^x - e^y \geqq (x - y)e^y \qquad \cdots\cdots ①$$

等号は，$x = y$ のときに限り成り立つ．

［証明］ (i)　$x = y$ の場合，明らかに不等式は成り立つ．

(ii)　$x > y$ の場合

$f(x)=e^x$ として平均値の定理を使うと，$f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$, $y<c<x$ となる c が存在する．$f'(x)$ は増加関数だから，$f'(c)>f'(y)$.
したがって，$f(x)-f(y)>(x-y)f'(y)$ が成り立つ．

(iii)　$x<y$ の場合
$f(x)=e^x$ として平均値の定理を使うと，$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)$, $x<c<y$ となる c が存在する．$f'(x)$ は増加関数だから，$f'(c)<f'(y)$.
したがって，$f(y)-f(x)<(y-x)f'(y)$ から $f(x)-f(y)>(x-y)f'(y)$ が成り立つ．■

補題 2　(Abel formula) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ が実数のとき，次の等式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1-a_2)b_1+(a_2-a_3)(b_1+b_2)+(a_3-a_4)(b_1+b_2+b_3) + \cdots + (a_{n-1}-a_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

［証明］　$c_i=b_1+b_2+\cdots+b_i$ とおくと，$2 \leqq i \leqq n$ のとき，$c_i-c_{i-1}=b_i$.

$$\begin{aligned}
&(a_1-a_2)b_1+(a_2-a_3)(b_1+b_2)+(a_3-a_4)(b_1+b_2+b_3)\\
&\quad + \cdots + (a_{n-1}-a_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right) + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\\
&=(a_1-a_2)c_1+(a_2-a_3)c_2+(a_3-a_4)c_3+\cdots+(a_{n-1}-a_n)c_{n-1}+a_nc_n\\
&=c_1a_1+(c_2-c_1)a_2+\cdots+(c_n-c_{n-1})a_n\\
&=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n
\end{aligned}$$

■

補題 2 で $z_i=x_i-y_i$ とおくと，補題 2 は次のようになる．

補題 3　$a_1, a_2, \ldots, a_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が実数のとき，次の等式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)a_i = (x_1-y_1)(a_1-a_2)+(x_1+x_2-y_1-y_2)(a_2-a_3)+\cdots + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)(a_{n-1}-a_n) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)a_n$$

補題 4　$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$, $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ を 2 つの単調減少列とする．すべての $j\,(1 \leqq j \leqq n)$ に対して，$x_1 + x_2 + \cdots + x_j \geqq y_1 + y_2 + \cdots + y_j$ ならば

$$e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n} \geqq e^{y_1} + e^{y_2} + \cdots + e^{y_n} \,.$$

等号は，$x_i = y_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．

［証明］ $f(x) = e^x$ とおくと，補題 1 より $f(x_i) - f(y_i) \geqq (x_i - y_i)f'(y_i)$ が成り立つ．
$i = 1\,, 2\,, \cdots\,, n$ とおいたものの辺々を加えると

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \geqq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)f'(y_i) \,.$$

等号は，$x_i = y_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．
補題 3 より

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)f'(y_i) \\
&= (x_1 - y_1)\,(f'(y_1) - f'(y_2)) + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2)\,(f'(y_2) - f'(y_3)) + \cdots \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)(f'(y_{n-1}) - f'(y_n)) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) f'(y_n) \\
&= (x_1 - y_1)\,(f'(y_1) - f'(y_2)) + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2)\,(f'(y_2) - f'(y_3)) + \cdots \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)(f'(y_{n-1}) - f'(y_n))
\end{aligned}$$

と変形できる．
仮定から，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \geqq \sum_{i=1}^{k} y_i\ (k = 1\,, 2\,, \ldots\,, n-1)\,.$
$f'(x)$ は増加関数だから，$f'(y_k) \geqq f'(y_{k+1})\ (k = 1\,, 2\,, \ldots\,, n-1)\,.$
よって，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)f'(y_i) \geqq 0$ から $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \geqq 0$ となる． ■

補題 5　$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n > 0$, $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n > 0$ を正の実数からなる 2 つの単調減少列とする．すべての $j\,(1 \leqq j \leqq n)$ に対して，$x_1 x_2 \cdots x_j \geqq y_1 y_2 \cdots y_j$ ならば

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq y_1 + y_2 + \cdots + y_n \,.$$

等号は，$x_i = y_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．

［証明 1］　$s_i=\log x_i\,,\, t_i=\log y_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，すべての $j\,(1 \leqq j \leqq n)$ に対して，$s_1+s_2+\cdots s_j \geqq t_1+t_2\cdots+t_j\,.$ $f(x)=e^x$ とおくと，$f''(x)=e^x>0$ より $f(x)$ は狭義凸関数である．補題 4 から

$$f(s_1)+f(s_2)+\cdots+f(s_n) \geqq f(t_1)+f(t_2)\cdots+f(t_n)$$

すなわち

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqq y_1+y_2+\cdots+y_n$$

が成り立つ．等号は，$\log x_i=\log y_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ すなわち，$x_i=y_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．■

［証明 2］　$z_j=\dfrac{x_j}{y_j}\,,\, t_j=(z_1-1)+(z_2-1)+\cdots+(z_j-1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{j} z_i-j \quad (1 \leqq j \leqq n)$ とおくと，相加平均・相乗平均の不等式より

$$\frac{z_1+z_2+\cdots+z_j}{j} \geqq \sqrt[j]{z_1z_2\cdots z_j}=\sqrt[j]{\frac{x_1x_2\cdots x_j}{y_1y_2\cdots y_j}} \geqq 1\,.$$

よって，$t_j \geqq 0 \quad (1 \leqq j \leqq n)$．
したがって

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+\cdots+x_n-(y_1+y_2+\cdots+y_n)\\
&=(z_1-1)y_1+(z_2-1)y_2+\cdots+(z_n-1)y_n\\
&=t_1y_1+(t_2-t_1)y_2+\cdots+(t_n-t_{n-1})y_n\\
&=t_1(y_1-y_2)+t_2(y_2-y_3)+\cdots+t_{n-1}(y_{n-1}-y_n)+t_ny_n \geqq 0
\end{aligned}$$

から

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqq y_1+y_2+\cdots+y_n\,.$$

等号は

$$t_1(y_1-y_2)=t_2(y_2-y_3)=\cdots=t_{n-1}(y_{n-1}-y_n)=t_ny_n=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

のときに限る．

$t_n=0$ から $z_1=z_2=\cdots=z_n=1$ となる．このとき，$t_1=t_2=\cdots=t_{n-1}=0$ となるから，$(*)$ は成り立つ．また，$z_1=z_2=\cdots=z_n=1$ から，$x_j=y_j\ (1 \leqq j \leqq n)$ となる．
したがって，等号は，$x_i=y_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．■

補題 6　　$A>B>0$ のとき，$\dfrac{A-1}{A}>\dfrac{B-1}{B}$ が成り立つ．

［証明］　$f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ $(x>0)$ とおくと，$f'(x)=x^{-2}>0$ より $f(x)$ が増加関数であることから，証明すべき不等式は成り立つ．■

次に，シルベスターの数列 (Sylvester's sequence) を定義しておく．シルベスターの数列は

$$a_1=2\ ,\ a_{n+1}=1+a_1a_2\cdots a_n\ (n\geqq 1)$$

で定義される．正の整数列 $\{a_n\}$ は

$$2\,,3\,,7\,,43\,,1807\,,3263443\,,10650056950807\,,113423713055421844361000443\,,\cdots$$

のようになっている．

補題 7　$\{a_n\}$ がシルベスターの数列のとき，次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\,.$$

［証明］　数学的帰納法で証明する．

(i)　$n=1$ のとき，左辺 $=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$, 右辺 $=1-\dfrac{1}{a_1}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ より 左辺=右辺．

(ii)　$n=k$ のとき成り立つと仮定する．$n=k+1$ の場合を考えると

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}&=1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\\&=1-\frac{a_{k+1}-a_1a_2\cdots a_k}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}\\&=1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}\,.\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数について成り立つ．■

K.Soundararajan は Approximating 1 from below using n egyptian fractions で次のことを示した．

「自然数列 $x_1\,,x_2\,,\ldots\,,x_n$ が $x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}<1$ を満たすならば

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\leqq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\,.$$

そして，等号は $x_i=a_i$ $(1\leqq i\leqq n)$ のときに限り成り立つ．ただし，$\{a_n\}$ はシルベスターの数列 とする．」このことから，$x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}<1$

を満たす自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$ の最大値 M_n は，$x_i=a_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のとき

$$M_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$$

となることがわかる．

ここでは，K.Soundararajan の結果を補題 5 を利用して証明する．

定理 1　自然数列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}<1$ を満たすならば

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n} \leqq \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \qquad \cdots\cdots ①$$

そして，等号は，$x_i=a_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ のときに限り成り立つ．ただし，$\{a_n\}$ はシルベスターの数列とする．

［証明］　数学的帰納法で証明する．

(i)　$n=1$ のとき，$\dfrac{1}{x_1}<1$ より $x_1>1$. x_1 は自然数だから，$x_1 \geqq 2$. よって，

$$\frac{1}{x_1} \leqq \frac{1}{2}=\frac{1}{a_1}\,.$$

(ii)　$n \leqq m-1$ で不等式①が成り立つと仮定する．$n=m$ のときを考え，自然数列 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ は $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_m$, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_m}<1$ を満たすものとする．

$x_1x_2\cdots x_m<a_1a_2\cdots a_m$ の場合

$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_m}=\dfrac{P}{Q}$ $(P, Q$ は互いに素な自然数で$, P<Q)$ とおくと $Q \leqq x_1x_2\cdots x_m$ だから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_m} &\leqq \frac{Q-1}{Q} \\
&\leqq \frac{x_1x_2\cdots x_m-1}{x_1x_2\cdots x_m} \quad (\text{補題 } 6\ ) \\
&< \frac{a_1a_2\cdots a_m-1}{a_1a_2\cdots a_m} \quad (\text{補題 } 6\ ) \\
&= \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m} \quad (\text{補題 } 7\ )
\end{aligned}$$

となり，不等式①が成り立つ．

$x_1x_2\cdots x_m \geqq a_1a_2\cdots a_m$ の場合

　$x_jx_{j+1}\cdots x_m \geqq a_ja_{j+1}\cdots a_m$ を満たす最大の自然数を l $(1 \leqq l \leqq m)$ とする．
$l = m$ の場合，$x_m \geqq a_m$ だから，仮定より

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{m-1}} \leqq \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}}\,.$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{m-1}}+\frac{1}{x_m} &\leqq \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{x_m}\\ &\leqq \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{a_m}\end{aligned}$$

となり，不等式①が成り立つ．等号は，$x_i = a_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ のときに限り成り立つ．
$1 \leqq l \leqq m-1$ の場合，l の定義から

$$\begin{aligned}
x_lx_{l+1}\cdots x_m &\geqq a_la_{l+1}\cdots a_m && \cdots\cdots(*)\\
x_{l+1}x_{l+2}\cdots x_m &< a_{l+1}a_{l+2}\cdots a_m && \cdots\cdots(1)\\
x_{l+2}x_{l+3}\cdots x_m &< a_{l+2}a_{l+3}\cdots a_m && \cdots\cdots(2)\\
&\ \vdots\\
x_{m-1}x_m &< a_{m-1}a_m && \cdots\cdots(m-l-1)\\
x_m &< a_m && \cdots\cdots(m-l)
\end{aligned}$$

が成り立つ．
$(*)$ と (1) から

$$\frac{x_l}{a_l} \geqq \frac{a_{l+1}a_{l+2}\cdots a_m}{x_{l+1}x_{l+2}\cdots x_m} > 1\,.$$

$(*)$ と (2) から

$$\frac{x_lx_{l+1}}{a_la_{l+1}} \geqq \frac{a_{l+2}a_{l+3}\cdots a_m}{x_{l+2}x_{l+3}\cdots x_m} > 1\,.$$

$$\vdots$$

$(*)$ と $(m-l)$ から

$$\frac{x_lx_{l+1}\cdots x_{m-1}}{a_la_{l+1}\cdots a_{m-1}} \geqq \frac{a_m}{x_m} > 1\,.$$

したがって，

$$x_l > a_l\,,\,x_l x_{l+1} > a_l a_{l+1}\,,\cdots,\,x_l x_{l+1}\cdots x_{m-1} > a_l a_{l+1}\cdots a_{m-1}\,.$$

補題 5 が適用できるように

$$p_1 = \frac{1}{a_l}\,,p_2 = \frac{1}{a_{l+1}}\,,\cdots,p_{m-l+1} = \frac{1}{a_m}\,,$$

$$q_1 = \frac{1}{x_l}\,,q_2 = \frac{1}{x_{l+1}}\,,\cdots,q_{m-l+1} = \frac{1}{x_m}$$

とおくと，$p_1 > p_2 > \cdots > p_{m-l+1} > 0$, $q_1 > q_2 > \cdots > q_{m-l+1} > 0$ で

$$p_1 > q_1\,,p_1p_2 > q_1q_2\,,\cdots,p_1p_2\cdots p_{m-l+1} > q_1q_2\cdots q_{m-l+1}$$

を満たすから，補題 5 より

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-l+1} > q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-l+1}$$

すなわち

$$\frac{1}{x_l} + \frac{1}{x_{l+1}} + \cdots + \frac{1}{x_m} < \frac{1}{a_l} + \frac{1}{a_{l+1}} + \cdots + \frac{1}{a_m} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

自然数列 $x_1\,,x_2\,,\ldots,x_{l-1}$ は

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_{l-1}\ ,\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{l-1}} < 1-\frac{1}{x_l}-\frac{1}{x_{l+1}}-\cdots-\frac{1}{x_m} < 1$$

を満たすので，帰納法の仮定から

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{l-1}} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{l-1}} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．②+③ から

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_m} \leqq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m}\,.$$

よって，$n = m$ のときも不等式①が成り立つ．

(i)，(ii) からすべての自然数 n について不等式①が成り立つ． ■

［注］　最大値 M_n は

$$M_n = \frac{a_1a_2\cdots a_n - 1}{a_1a_2\cdots a_n}$$

となるから，$p_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, $p_1 = 2$ とおくと $M_n = \dfrac{p_n - 1}{p_n}$.

$\{p_n\}$ の漸化式は

$$p_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n (1 + a_1 a_2 \cdots a_n) = p_n (1 + p_n)$$

より，$p_1 = 2$,

$$p_{n+1} = p_n (1 + p_n)$$

となる.

6　基礎理論

6.1　$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot\cdots\cdot(k+p-1)$ について

$n\,,p$ を自然数とするとき次の等式が成り立つ．

$$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot p+2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdots\cdot(p+1)+\cdots\cdots+n(n+1)\cdot\cdots\cdot(n+p-1)$$
$$=\frac{1}{p+1}n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p)\,.$$

上の式で $p=1\,,2\,,3$ とおくと，次の等式を得る．

n を自然数とするとき

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\,,$$
$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\,,$$
$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\,.$$

［証明］　等式

$$\boldsymbol{k(k+1)}\cdot\cdots\cdots\cdot\boldsymbol{(k+p-1)}(k+p)-(k-1)\boldsymbol{k(k+1)}\cdot\cdots\cdots\cdot\boldsymbol{(k+p-1)}$$
$$=(p+1)\boldsymbol{k(k+1)}\cdot\cdots\cdots\cdot\boldsymbol{(k+p-1)}$$

で，$k=1\,,2\,,3\,,\cdots\,,n$ を代入した等式の各辺をそれぞれ加えると，

$$\begin{aligned}&1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot(1+p)-0\cdot1\cdot2\cdot\cdots\cdots\cdot p\\&+2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdots\cdot(2+p)-1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot(1+p)\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p)-(n-1)n(n+1)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p-1)\\&=(p+1)\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdot\cdots\cdots\cdot(k+p-1)\,.\end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot\cdots\cdots\cdot(k+p-1) = \frac{1}{p+1} n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p)$$

が成り立つ． ■

証明は技巧的に見えるかもしれない．しかし，数学的帰納法の証明で n のときの成立を仮定すると

$$\begin{aligned}&1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot p + 2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdots\cdot(p+1) + \cdots\cdots + n(n+1)\cdot\cdots\cdot(n+p-1)\\ &= \frac{1}{p+1} n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p)\end{aligned}$$

が成り立つ．

両辺に $(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p)$ を加えて，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p+1} n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p) + (n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p)\\ &= \frac{1}{p+1}(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+p+1)\end{aligned}$$

の成立を示すことになるので，証明で利用した恒等式と本質的には同じものである．

類題をあげておく．

例題 1 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right)\right\}$ は n の多項式になる．この多項式を因数分解せよ．

（'66 一橋大）

解

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right)\right\} &= \sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{l(l+1)}{2}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)(m+2)}{3}\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\\ &= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

■

6.2　空間における角について

4 点 O，A，B，C が同一平面上にない場合は次の定理が成り立つ．

定理 1　三角錐 O-ABC で $\alpha = \angle$BOC，$\beta = \angle$COA，$\gamma = \angle$AOB とおくと，次の不等式が成り立つ．

(1)　$\beta + \gamma > \alpha\,,\ \gamma + \alpha > \beta\,,\ \alpha + \beta > \gamma\,.$

(2)　$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi\,.$

[証明] (1)　$\beta + \gamma > \alpha$ を示す．

$\gamma \geqq \alpha$ のときは $\beta+\gamma > \alpha$ は明らかに成り立つから，$\gamma < \alpha$ の場合を考える．$\angle$BOC 内に半直線 OD を $\angle$BOD$= \gamma$ となるように引く．半直線 OB，OC 上にそれぞれ点 M，N をとり，MN と OD の交点を K とする．次に，半直線 OA 上に OL=OK となる点 L をとる．

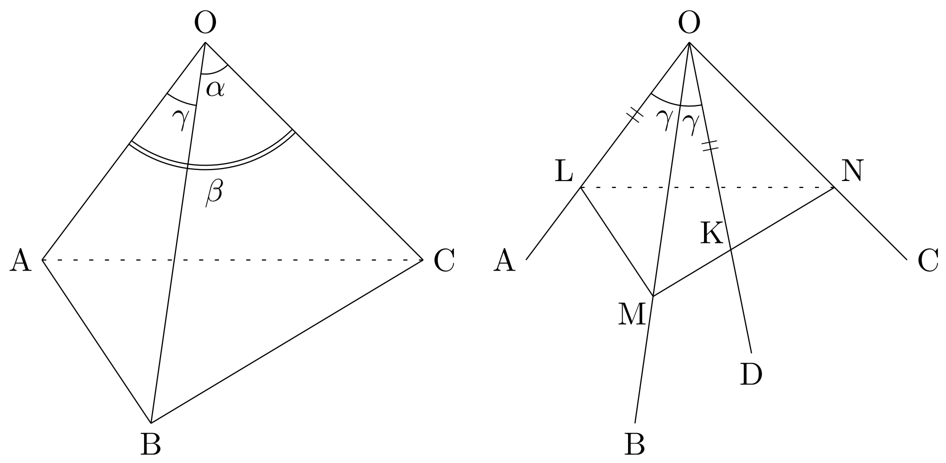
$\beta > \alpha - \gamma$ すなわち $\angle$LON $>\angle$KON を示す．

$\triangle$ OLM $\equiv$ $\triangle$ OKM から LM=KM .

$\triangle$ LMN において

　LM+LN $>$ MN=MK+KN=LM+KN .

ゆえに，　LN $>$ KN .



$\triangle$ OLN と $\triangle$ OKN において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{LON} &= \frac{\mathrm{OL}^2+\mathrm{ON}^2-\mathrm{LN}^2}{2\mathrm{OL}\cdot\mathrm{ON}} \\ &< \frac{\mathrm{OL}^2+\mathrm{ON}^2-\mathrm{KN}^2}{2\mathrm{OK}\cdot\mathrm{ON}} \\ &= \cos\angle\mathrm{KON}\,.\end{aligned}$$

したがって，$\angle\mathrm{LON}>\angle\mathrm{KON}$，すなわち，$\beta+\gamma>\alpha$ が成り立つ．

(2)　1 点 O に集まる角についての (1) の不等式をそれぞれ A，B，C に適用すると

$\angle\mathrm{OAB}+\angle\mathrm{OAC}>\angle\mathrm{BAC}$,

$\angle\mathrm{OBC}+\angle\mathrm{OBA}>\angle\mathrm{ABC}$,

$\angle\mathrm{OCB}+\angle\mathrm{OCA}>\angle\mathrm{ACB}$.

辺々加えると

$$(\angle\mathrm{OAB}+\angle\mathrm{OBA})+(\angle\mathrm{OAC}+\angle\mathrm{OCA})+(\angle\mathrm{OBC}+\angle\mathrm{OCB})>\pi\,.$$

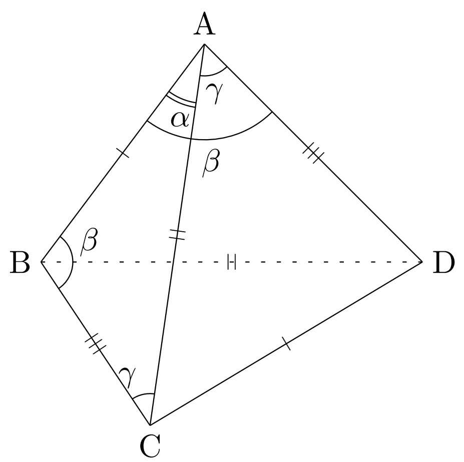
$$(\pi-\gamma)+(\pi-\beta)+(\pi-\alpha)>\pi\,.$$

ゆえに，$\alpha+\beta+\gamma<2\pi$．　■

補題 1　四面体 ABCD において，AB=CD，AC=BD，AD=BC が成立するならば，三角形 ABC は鋭角三角形であることを証明せよ．　('89 名古屋大)

解　点 A に集まる角について $\beta+\gamma>\alpha$, $\gamma+\alpha>\beta$, $\alpha+\beta>\gamma$ が成り立つ．

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ であるから，$\beta+\gamma>\alpha$ より $180^\circ-\alpha>\alpha$．ゆえに，$\alpha<90^\circ$．同様にして，$\beta<90^\circ$, $\gamma<90^\circ$ となるから $\triangle$ ABC は鋭角三角形である．　■



四面体 ABCD において，AB=CD，AC=BD，AD=BC が成立するとき 4 つの面は合同である．この四面体を等面四面体という．

逆に，$\triangle$ ABC が鋭角三角形のとき，各面すべてが $\triangle$ ABC と合同な四面体が存在する．（直方体に埋め込んで考えるとよい．）

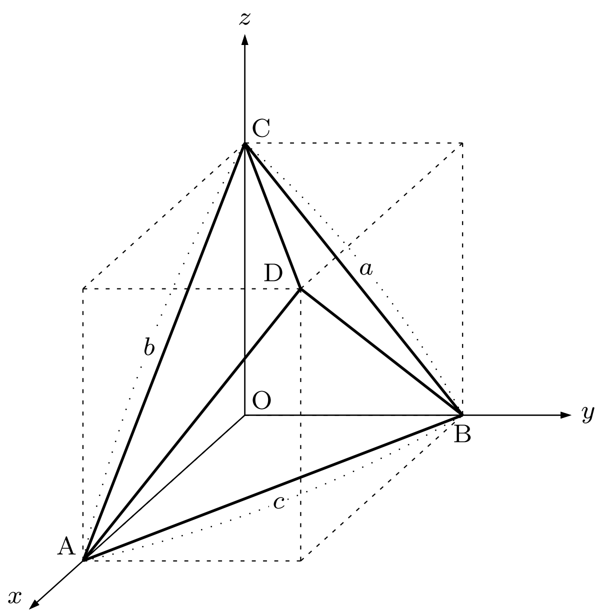
補題 2　等面四面体 ABCD において，4 頂点 A，B，C，D は適当な直方体の 4 頂点となる．

［証明］　補題 1 から△ ABC は鋭角三角形である．BC=a，CA=b，AB=c，A$(x\,,0\,,0)$，B$(0\,,y\,,0)$，C$(0\,,0\,,z)$，D$(x\,,y\,,z)$ とおき，次の式を考える．

$$x^2+y^2=c^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y^2+z^2=a^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$z^2+x^2=b^2 \qquad \cdots\cdots ③$$



(①+②+③)÷2 から

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \qquad \cdots\cdots ④$$

④−①，④−②，④−③から，

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\,,$$

$$y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\,,$$

$$z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\,.$$

△ ABC は鋭角三角形であるから $b^2+c^2-a^2>0\,,c^2+a^2-b^2>0\,,a^2+b^2-c^2>0\,.$

したがって，①，②，③ を満たす正の実数 $x\,,y\,,z$ が存在するから，等面四面体 ABCD において，4 頂点 A，B，C，D は適当な直方体の 4 頂点となる．　■

補題 2 の証明方法で次の京都大学の問題が解ける．

類題 1　△ ABC は鋭角三角形とする．このとき，各面すべてが△ ABC と合同な四面体が存在することを示せ．　('99 京都大・後期)

補題 1 と補題 2 を含む問題が大阪大で出題されている．

類題 2　合同な 4 つの三角形を用いて，これらを 4 つの面とする四面体（三角すい）を作りたい．三角形の 3 辺を $a\,,b\,,c\,(a\geqq b\geqq c)$ とするとき，四面体を作ることができるための必要十分条件を求めよ．　('68 大阪大)

類題を 3 題あげておく．

類題 3　三角形 ABC の各辺の中点を P，Q，R とする．この三角形を線分 PQ，QR，RP で折りまげ 3 頂点 A，B，C を 1 点に集めて四面体を作りたい．それができるためには，もとの三角形が満たすべき必要十分条件を求めよ．（'84 岐阜大）

類題 4　すべての面が合同な四面体 ABCD がある．頂点 A，B，C はそれぞれ $x\,,y\,,z$ 軸上の正の部分にあり，辺の長さは

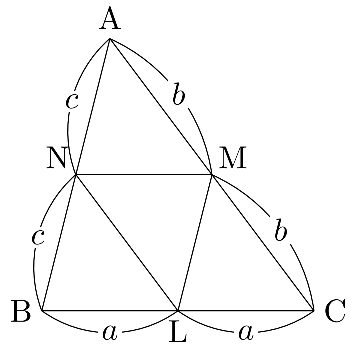
$$\mathrm{AB}=2l-1\,,\mathrm{BC}=2l\,,\mathrm{CA}=2l+1\,(l>2)$$

である．四面体 ABCD の体積を $V(l)$ とするとき，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{l\to 2}\frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

（'93 東京大）

類題 5　3 辺の長さが $\mathrm{BC}=2a\,,\mathrm{CA}=2b\,,\mathrm{AB}=2c$ であるような鋭角三角形△ ABC の 3 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L，M，N とする．線分 LM，MN，NL に沿って三角形を折り曲げ，四面体をつくる．その際，線分 BL と CL， CM と AM，AN と BN はそれぞれ同一視されて，長さが $a\,,b\,,c$ の辺になるものとする．



(1)　線分 MN，BL の中点をそれぞれ P，Q とする．四面体を組み立てたとき，空間内の線分 PQ の長さを求めよ．

(2)　この四面体の体積を $a\,,b\,,c$ を用いて表せ．

（'96 東京大・後期）

6.3 相加平均と相乗平均の不等式

（相加平均と相乗平均の不等式）n 個の任意の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ について

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

が成り立つ．等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限り成り立つ．

証明方法は多数あるが，筆者にとって最も印象的であった方法と，道具を使わない方法を紹介しておく．

例題 2　「n 個の任意の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ について，

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

が成り立つ」という命題を $P(n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$P(2)$ が正しいことを証明せよ．

(2)　$P(k)$ が正しいとき，$P(2k)$ も正しいことを証明せよ．

(3)　$P(k+1)$ が正しいとき，$P(k)$ も正しいことを証明せよ．

（'87 横浜国立大）

解 (1)　$\dfrac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\dfrac{\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2}{2} \geqq 0$ から $P(2)$ は正しい．

(2)　$P(k)$ が正しいと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}{2k}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}{k}\right)\\
&\geqq \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{2k}}\right)\\
&\geqq \sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{2k}}}\\
&= \sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}\,.
\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}{2k} \geqq \sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}$$

が成り立つから $P(2k)$ も正しい．

(3) k 個の正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ に対して $a_{k+1} = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$ とおくと

$$\frac{1}{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}) = \frac{1}{k+1}(ka_{k+1}+a_{k+1}) = a_{k+1}\,.$$

一方，$P(k+1)$ の仮定により

$$\frac{1}{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}) \geqq \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}\,,$$

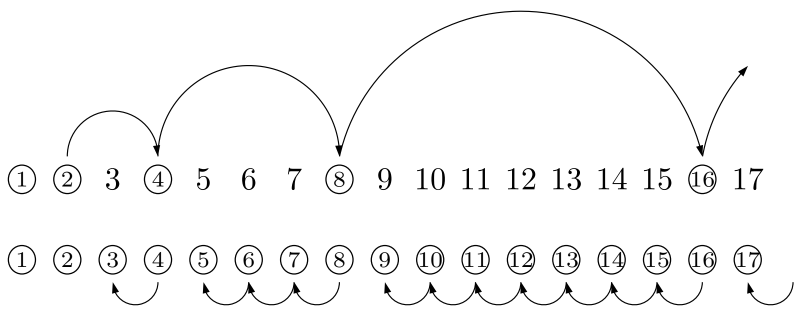
$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\geqq \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}\,,\\
(a_{k+1})^{k+1} &\geqq a_1a_2\cdots a_k\cdot a_{k+1}\,,\\
a_{k+1}^k &\geqq a_1a_2\cdots a_k\,,\\
a_{k+1} &\geqq \sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_k}\,.
\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \geqq \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$$

が成り立つから $P(k)$ も正しい． ■

以上のことから，下図のようにして，すべての自然数 n について $P(n)$ が正しいことがわかる．



例題 3 (1)　$a \geqq 1,\, b \leqq 1$ である任意の正の数 $a,\, b$ に対し，$a+b \geqq 1+ab$ となることを証明せよ．

(2)　$a_1a_2\cdots a_n=1$ である任意の n 個の正の数 $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ に対し，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq n$$

となることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3)　(2) を用いて，任意の n 個の正の数 $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ に対し，

$$\frac{{a_1}^n+{a_2}^n+\cdots+{a_n}^n}{n} \geqq a_1a_2\cdots a_n$$

となることを証明せよ．　（'80 秋田大）

解 (1)　$a+b-(1+ab)=(a-1)(1-b)$．$a-1 \geqq 0,\, 1-b \geqq 0$ あるから

$a+b-1-ab \geqq 0$．

ゆえに，

$a+b \geqq 1+ab$．

(2)　「$a_1a_2\cdots a_n=1 \Longrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq n$」という命題を $P(n)$ とおく．
$P(1)$ は，明らかに成立する．

$n=2$ のときは，相加平均・相乗平均の不等式の関係を使うと

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1a_2}=1$$

だから $a_1+a_2 \geqq 2$ となり $P(2)$ は成立する．

$P(k)(k \geqq 2)$ が成立すると仮定する．すなわち，

$$\boldsymbol{x_1x_2\cdots x_k=1,\, x_i>0\ (1 \leqq i \leqq k) \Longrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_k \geqq k}$$

が成立するとして，$P(k+1)$ が成立することを証明する．

$a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k,\, a_{k+1}$ は

$$a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす $k+1$ 個の正の数 とする．(1) を使うために $a_i \geqq 1,\, a_j \leqq 1$ となる $i\,,j$ を見つける．

①から $a_i \geqq 1$ となる a_i と，$a_j \leqq 1$ となる a_j がそれぞれ少なくとも 1 つ存在しなければならない．なぜなら，もしすべての i について $0 < a_i < 1$ とすると，$a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} < 1$ となり①に反する．すべての j について $a_j > 1$ としても ①に反する．そこで $a_i \geqq 1$ となる a_i と，$a_j \leqq 1$ となる a_j を 1 つずつ選べる．$i = j$ のときは $a_i = 1$ である．a_i を除く $k\,(\geqq 2)$ 個に対して $a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_{k+1} = 1$ だから，同じ論法で $a_{i'} \geqq 1$ となる $a_{i'}$ と，$a_{j'} \leqq 1$ となる $a_{j'}$ がそれぞれ少なくとも 1 つ存在する．$i \fallingdotseq j'$ であるから，最初から $i \fallingdotseq j$ と仮定しても一般性を失わない．
番号の付け替えだけなので，$i = 1, j = 2$ と考える．つまり $a_1 \geqq 1, a_2 \leqq 1$ とする．

(1) から

$$a_1 + a_2 \geqq 1 + a_1 a_2 \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．$a_1 a_2$ を 1 つの正の数と考えれば，k 個の正の数 $a_1 a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_k,\, a_{k+1}$ の積が 1 であるから，帰納法の仮定より（$x_1 = a_1 a_2,\, x_2 = a_3,\, \cdots,\, x_k = a_{k+1}$ とおけばよい．）

$$a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq k \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．②，③から

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} + 1 \geqq k + 1\,.$$

すなわち， $P(k+1)$ は成り立つ．

以上のことから，すべての自然数 n に対して $P(n)$ は成り立つ．

(3)　$b_k = \dfrac{{a_k}^n}{a_1 a_2 \cdots a_n}(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ とおけば，正の数 $b_1,\, b_2,\, \cdots,\, b_n$ について $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$ が成り立つから，(2) より $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqq n$．

すなわち， $\dfrac{{a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_n}^n}{n} \geqq a_1 a_2 \cdots a_n$． ■

［注意］　(3) で $b_k = \dfrac{a_k}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ とおけば，正の数 $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$ について $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$ が成り立つから，(2) より $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqq n$．
すなわち，$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ を得る．

(2) の $\boxed{}$ の中は，次のように考えることもできる．

①から $a_i \geqq 1$ となる a_i と，$a_j \leqq 1$ となる a_j がそれぞれ少なくとも 1 つ存在しなければならない．なぜなら，もしすべての i について $0 < a_i < 1$ とすると，①に反する．すべての j について $a_j > 1$ としても ①に反する．そこで $a_i \geqq 1$ となる a_i と，$a_j \leqq 1$ となる a_j を 1 つずつ選べる．

$i = j$ のときは $a_i = 1$ である．
①から $a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_{k+1} = 1$ であるから，仮定から
$a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{k+1} \geqq k$
両辺に $1 = a_i$ を加えると

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq k + 1$$

次に $i \neq j$ の場合を考える．番号の付け替えだけなので，$i = 1, j = 2$ と考える．つまり $a_1 \geqq 1, a_2 \leqq 1$ とする．

$0 < a_1 \leqq 1, 0 < a_2 \leqq 1, \cdots, 0 < a_{k+1} \leqq 1$ とすると，$a_1a_2 \cdots a_{k+1} \leqq 1$ が成り立つ．①より等号が成り立つから $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1} = 1$ となる．このとき，不等式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq k + 1$ は明らかに成り立つ．
「$0 < a_1 \leqq 1, 0 < a_2 \leqq 1, \ldots, 0 < a_{k+1} \leqq 1$ 」でないとすると，$a_i > 1$ となる a_i が存在する．$a_1 > 1, a_2 > 1, \cdots, a_{k+1} > 1$ とすると①に反するから $a_j \leqq 1$ となる a_j が存在する．明らかに $i \neq j$ である．番号の付け替えだけなので，$i = 1, j = 2$ と考える．つまり $a_1 > 1, a_2 \leqq 1$ とする．

$a_1 = 1, a_2 = 1, \ldots, a_{k+1} = 1$ とすると，このとき，
不等式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \geqq k + 1$ は明らかに成り立つ．
「$a_1 = 1, a_2 = 1, \cdots, a_{k+1} = 1$」でないとき，$a_l > 1$ か $a_l < 1$ が成り立つ a_l が存在する．

$a_l > 1$ のとき，$a_1 > 1, a_2 > 1, \ldots, a_{k+1} > 1$ とすると①に反するから $a_j \leqq 1$ となる a_j が存在する．明らかに $l \neq j$ である．番号の付け替えだけなので，$l = 1, j = 2$ と考える．つまり $a_1 > 1, a_2 \leqq 1$ とする．

$a_l < 1$ のとき，$0 < a_1 < 1, 0 < a_2 < 1, \ldots, 0 < a_{k+1} < 1$ とすると①に反するから $a_i \geqq 1$ となる a_i が存在する．明らかに $i \neq l$ である．番号の付け替えだけなので，$i = 1, l = 2$ と考える．つまり $a_1 \geqq 1, a_2 < 1$ とする．

6.4　凸関数について

定理 2　開区間 $(a\,,b)$ において，$f''(x)>0$ のとき，すなわち，$f(x)$ が区間 $(a\,,b)$ で下に凸であるとき，

$a<x_i<b\ (\,i=1\,,2\,,\dots\,,n\,)$ ならば，$\alpha_i>0\,,\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ に対して

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\leqq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

が成り立つ．　等号は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限り成り立つ．

これを証明するために，次の補題を証明する．

[補題 3]　　開区間 $(a\,,b)$ において，$f''(x)>0$ のとき，
$\xi\in(a\,,b)$ とすると，任意の $x\in(a\,,b)$ に対して，不等式

$$f(x)\geqq f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)$$

が成り立つ．等号は $x=\xi$ のときに限り成り立つ．

［補題 3 の証明］　$F(x)=f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi)$ とおくと

$$F'(x)=f'(x)-f'(\xi)\ ,F''(x)=f''(x)\,.$$

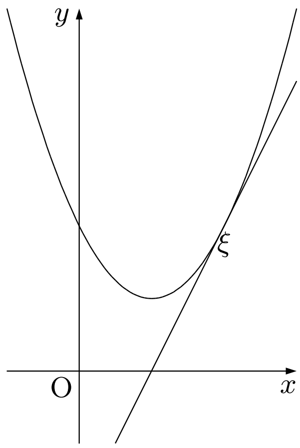
仮定から $(a\,,b)$ において，$F''(x)>0$ となり $F'(x)$ は $(a\,,b)$ で増加関数である．$F'(\xi)=0$ であるから，$a<x<\xi$ のとき $F'(x)<0$ ，$\xi<x<b$ のとき $F'(x)>0$ となる．

x	a	$\cdots$	ξ	$\cdots$	b
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$x\in(a\,,b)$ に対して，不等式 $F(x)\geqq F(\xi)=0$. すなわち，$f(x)\geqq f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)$ が成り立つ．等号は $x=\xi$ のときに限り成り立つ．■

補題の意味することは，下に凸な区間で $y=f(x)$ 上の点 $(\xi\,,f(\xi))$ で接線を引くと点 $(\xi\,,f(\xi))$ を除いて，接線は $y=f(x)$ のグラフの下側にあるということである．

［定理 2 の証明］　$\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ とおくと $a < \xi < b$ である．補題 3 から



$$f(x_i) \geqq f(\xi) + f'(\xi)(x_i - \xi) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

両辺に α_i をかけて i について和をとると

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \geqq f(\xi) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + f'(\xi) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - \xi) = f(\xi).$$

よって，

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

が成り立つ．　等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限り成り立つ．　■

$f(x)$ が上に凸の場合は $-f$ に定理 2 を適用すれば次の結果を得る．

定理 3　開区間 (a, b) において，$f''(x) < 0$ のとき，すなわち，$f(x)$ が区間 (a, b) で上に凸であるとき，

$a < x_i < b$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば，$\alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ に対して

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \geqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

が成り立つ．　等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限り成り立つ．

定理 4　n を 2 以上の自然数とし，$x_i > 0,\ \alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ に対して，　$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ G = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ とおくと，

$$A \geqq G$$

が成り立つ．　等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限り成り立つ．

［証明］　$f(x) = \log x$ $(x > 0)$ とおくと，$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ から $f(x)$ は上にに凸だ

から，

$$\log\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \geqq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \log x_i = \sum_{i=1}^{n}\log x_i^{\alpha_i} = \log\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\,.$$

よって，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \geqq \prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$ が成り立つ． ■

$\alpha_i = 1/n\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ のとき，よく知られている相加平均・相乗平均の不等式となる．

練習問題を何題かあげておく．

類題 6　A，B，C，D はいずれも 0 と π の間にあるとする．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(i)　$\sin A + \sin B + \sin C + \sin D \leqq 4\sin\dfrac{A+B+C+D}{4}$.

(ii)　$\sin A + \sin B + \sin C \leqq 3\sin\dfrac{A+B+C}{3}$.

(iii)　$\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \leqq \sin\dfrac{A+B+C}{3}$.

$f(x) = \sin x\ (0 < x < \pi)$ とおくと $f''(x) = -\sin x < 0$ である．

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)+f(D)}{4} \leqq f\left(\frac{A+B+C+D}{4}\right),$$

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \leqq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

から (i)，(ii) の不等式は得られる．

(iii) は $g(x) = \log\sin x\ (0 < x < \pi)$ とおくと，$g''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} < 0$ であるから

$$\frac{g(A)+g(B)+g(C)}{3} \leqq g\left(\frac{A+B+C}{3}\right),$$

$$\frac{\log\sin A + \log\sin B + \log\sin C}{3} \leqq \log\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right),$$

$$\log\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \leqq \log\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right).$$

よって，(iii) の不等式を得る．((ii) と (ii) の左辺に相加平均と相乗平均の不等式を用いて証明することもできる．)

類題 7　実数 $a\,,b\ \left(0 \leqq a < \dfrac{\pi}{4}\,,\, 0 \leqq b < \dfrac{\pi}{4}\right)$ に対し次の不等式の成り立つことを示せ.

$$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leqq \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}(\tan a + \tan b)$$

('91 京都大)

右側の不等式は，$f(x) = \tan x\ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}\right)$ が下に凸であることから得られる.

左側の不等式は，$0 < a < \dfrac{\pi}{4}\,,\, 0 < b < \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leqq \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \iff \frac{\log\tan a + \log\tan b}{2} \leqq \log\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$g(x) = \log\tan x\ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$g'(x) = \dfrac{1}{\tan x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$,

$g''(x) = -\dfrac{4\cos 2x}{\sin^2 2x} < 0$ であるから， $g(x)$ が下に凸であることから得られる.

あとは，$a = 0$ または $b = 0$ のとき不等式が成り立つことを示せばよい.

類題 8　$x_i\,(i = 1\,,2\,,\ldots\,,n)$ を正数とし，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = k$ をみたすとする．このとき不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k \log\frac{k}{n}$$

を証明せよ.　('90 東工大)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k\log\frac{k}{n} \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \frac{k}{n}\log\frac{k}{n}$$

$[\, f(x) = x\log x\ (\,x > 0\,)$ とおく $]$

$$\iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \quad (*)$$

ところで，$f'(x) = \log x + 1\,,\, f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ から，$f(x)$ は下に凸だから，不等式 $(*)$ は成り立つ.

7　おわりに

思い出に残る問題をあげておきたい．最初に取り上げるのは，1989 年に東京大学で出題された入試問題である．

> $f(x) = \pi x^2 \sin \pi x^2$ とする。 $y = f(x)$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は $V = 2\pi \displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$ で与えられることを示し，この値を求めよ。　（'89　東京大）

いわゆるバームクーヘン積分の問題である．当時筆者が勤務していた栃高（栃木高校）の高校 3 年生 A 君が，数学科に持ち込んだ問題と本質的に同じ問題であった．その問題とは，A 君が受けてきたある予備校の夏期講習のものである．同僚の寺岡　潔先生と一緒に解法を検討して，近似と部分積分による 2 つの解法を授業で紹介した．3 月の入試に出題された時には驚いたが，予備校の夏季講習で扱われていたことはあまり話題にはならなかったようである．

次に，1990 年に東工大で出題された類題 8 である．この問題と全く同じものを，柳田五夫 :「ある不等式の証明について」数研通信 No.8 , $pp.7-12$, で 3 つの証明方法を示してある．この冊子は東工大で出題された年の 2 月に発行されている．この入試問題は栃高の 3 年生から質問された問題

> n 個の正の数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ が $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ を満たすとき，不等式
> $$p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2 + \cdots + p_n \log p_n \geqq -\log n$$
> が成り立つ．また，等号は $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$ のときに限り成り立つ．

を次の形に一般化したものである．

> n 個の正の数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ に対して，不等式
> $$p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2 + \cdots + p_n \log p_n \geqq (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \log \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$$
> が成り立つ．また，等号は $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ のときに限り成り立つ．

さらに，次の不等式を得ている．

$2n$ 個の正の数 $a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, b_1\,, b_2\,, \ldots, b_n$ に対して，不等式

$$\begin{aligned} & a_1 \log a_1 + a_2 \log a_2 + \cdots + a_n \log a_n \\ & \quad - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \log(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ \geqq\ & a_1 \log b_1 + a_2 \log b_2 + \cdots + a_n \log b_n \\ & \quad - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \log(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \end{aligned}$$

が成り立つ．また，等号は $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \cdots = \dfrac{b_n}{a_n}$ のときに限り成り立つ．

最後は，極座標における回転体の体積の公式化についての課題である. 曲線が極座標で表されている場合，図の斜線部分を始線のまわりに 1 回転して得られる立体の体積が

$$V = \int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta\, d\theta$$

で与えられることを，名古屋市大の入試問題を解いているときに見つけたので，2013 年 1 月に数研通信に投稿した. その年の慶応大学医学部の入試に出題されたので，3 月の校正の時に，その旨を追記したものが，柳田五夫 :「極座標における回転体の体積の公式について」数研通信 No.73 , $pp.17-19$ に掲載された.