三角形に対する不等式を証明するために必要な
三角関数（標準）

柳田 五夫

まえがき

ここでは，三角形に対する不等式を証明するために必要となる三角関数と三角形に関する事柄を扱う。
特に

2.8　三角形の 3 辺の長さ a,b,c の対称式を s,r,R を使って表す

2.9　三角形における三角関数の対称式を s,r,R を使って表す

は発展編で使用する。

2021 年 8 月

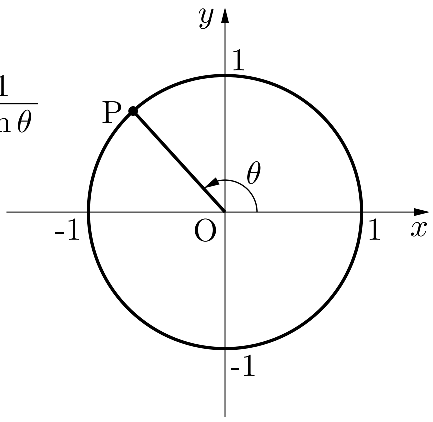
著者

目次

1　三角関数

1.1　三角関数の定義

単位円（原点 O を中心とし，半径 1 の円）をかき，これと角 θ の動経との交点を P とする。このとき P の座標は角 θ によって定まるから，$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ とかく。



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

で, それぞれ θ の *tangent*（タンジェント），*cotangent*（コタンジェント）， *secant*（セカント）， *cosecant*（コセカント）とよぶ。

問 1　$\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cdots + \cos^2 90^\circ$ の値を求めよ。

1.2　加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{1.1}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{1.2}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}. \tag{1.3}$$

(1.1)，(1.2)，(1.3) において β を $-\beta$ に置き換えると，$\sin(-\beta) = -\sin\beta, \cos(-\beta) = \cos\beta, \tan(-\beta) = -\tan\beta$ であるから，次の公式が得られる。

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$

問 2　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$　　(2) $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

(3) $\cot\alpha + \cot\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$　　(4) $\cot\alpha - \cot\beta = -\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

問 3　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x.$$

問 4　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\cos(x+y+z) = \cos x\cos y\cos z - \cos x\sin y\sin z - \sin x\cos y\sin z - \sin x\sin y\cos z$

(2) $\sin(x+y+z) = \sin x\cos y\cos z + \cos x\sin y\cos z + \cos x\cos y\sin z - \sin x\sin y\sin z$

(3) $\tan(x+y+z) = \dfrac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x\tan y\tan z}{1-(\tan x\tan y + \tan y\tan z + \tan z\tan x)}$

1.3　2 倍角・3 倍角・半角の公式

加法定理 (1.1)，(1.2)，(1.3) において $\beta = \alpha$ とすると

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

これらを 2 倍角の公式という。

問 5　次の等式が成り立つことを証明せよ。これらを 3 倍角の公式という。

(1) $\boldsymbol{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$

(2) $\boldsymbol{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^2\alpha}$

(3) $\boldsymbol{\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}}$

問 6　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\left(4\cos^2 9^\circ - 3\right)\left(4\cos^2 27^\circ - 3\right) = \tan 9^\circ.$$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ から

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

ここで，α の代わりに $\dfrac{\alpha}{2}$ とおくと

$$\boldsymbol{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\ \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

したがって

$$\boldsymbol{\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

これらを半角の公式という。

例題 1　　$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

解 $18^\circ = \theta$ とすると $5\theta = 90^\circ$　　$2\theta = 90^\circ - 3\theta$

$$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta.$$

$$2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3 - 3\cos\theta$$

$\cos\theta \fallingdotseq 0$ だから，両辺を $\cos\theta$ で割ると

$$2\sin\theta = 4\cos^2 - 3\theta$$

$$2\sin\theta = 4(1-\sin^2\theta) - 3$$

$$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

$\sin\theta = \sin 18^\circ > 0$ だから

$$\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}. \qquad \blacksquare$$

1.4　三角関数の和と積の公式

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\ ,\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

の辺々をそれぞれ加え，または減ずると

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\},$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}.$$

同様に余弦に関する加法定理によって

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right\}.$$

これらの公式によって，積を和または差に変形することができる。

上の公式において，$\alpha+\beta=A, \alpha-\beta=B$ とおくと $\alpha=\dfrac{A+B}{2}, \beta=\dfrac{A-B}{2}$ となるから，和または差を積にかえる次の公式が得られる。

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

例題 2　　$A+B+C=\pi$ であるとき，次の式を積の形に変形せよ。

$$P=\sin A+\sin B+\sin C.$$

解 $\sin A+\sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$,

$$\sin C = \sin(\pi-(A+B)) = \sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

だから

$$\begin{aligned} P &= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right) \\ &= 4\sin\frac{\pi-C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \\ &= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}. \end{aligned}$$

よって　　$P=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.　■

問 7　$A+B+C=\pi$ であるとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

(2)　$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

(3)　$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

(4)　$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

(5)　$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

1.5　三角関数の合成

加法定理を利用すると $a\sin\theta+b\cos\theta\quad(a^2+b^2\fallingdotseq 0)$ を

$$r\sin(\theta+\alpha)\quad(r>0,-\pi<\alpha\leqq\pi)$$

の形に変形できる。

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

と変形して，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となるように角 α をとると

$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).\end{aligned}$$

このような変形を三角関数の合成という。

座標が (a,b) である点 P をとり，OP が x 軸の正の向きとのなす角を α としてとればよいことがわかる。

問 8　$A\cos\theta+B\sin\theta\quad(A^2+B^2\fallingdotseq 0)$ を

$$r\cos(\theta-\beta)\quad(r>0,-\pi<\beta\leqq\pi)$$

の形に変形せよ。

2　三角形と三角関数

2.1　和の記号 $\sum\limits_{cyclic}$ と $\sum\limits_{sym}$ 等いくつかの定義

定義　和の記号 $\sum\limits_{cyclic}$ と $\sum\limits_{sym}$ を導入する。$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数とするとき

$$\sum_{cyclic} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + f(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_1) + \cdots + f(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

と $\boldsymbol{n}$ 項の和で $\sum\limits_{cyclic}$ を定義する。$\sum\limits_{cyclic}$ を $\sum\limits_{cyc}$ で表記する場合もある。

$$\sum_{sym} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n) + f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n-1}) + \cdots + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1)$$

と $\boldsymbol{n!}$ 項の和で $\sum\limits_{sym}$ を定義する。正確には

$$\sum_{sym} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

によって定義される．ただし，S_n は $\{1, 2, \ldots, n\}$ の順列全体の集合とする．

$n = 3$ の場合は，$P(x, y, z)$ を 3 変数 x, y, z の関数とするとき

$$\sum_{cyclic} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y),$$

$$\sum_{sym} P(x, y, z) = \underbrace{P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y) + P(z, y, x)}_{3!=6}$$

で定義される。

たとえば 3 変数 x, y, z のとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{cyclic} x^3 &= x^3 + y^3 + z^3, \\
\sum_{cyclic} x^2 y &= x^2 y + y^2 z + z^2 x, \\
\sum_{cyclic} xy^2 &= xy^2 + yz^2 + zx^2, \\
\sum_{cyclic} xyz &= xyz + yzx + zxy = 3xyz. \\
\sum_{sym} x^3 &= x^3y^0z^0 + x^3z^0y^0 + y^3x^0z^0 + y^3z^0y^0 + z^3x^0y^0 + z^3y^0x^0 \\
&= 2(x^3 + y^3 + z^3), \\
\sum_{sym} x^2 y &= x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y, \\
\sum_{sym} xy^2 &= xy^2 + xz^2 + yx^2 + yz^2 + zx^2 + zy^2 = \sum_{sym} x^2 y, \\
\sum_{sym} xyz &= xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx = 6xyz.
\end{aligned}
$$

上の例では $\sum_{cyclic} xyz \left(= xyz \sum_{cyclic} 1 \right) = 3xyz$ のようにすることができる。

[注意] $\prod_{i=1}^{n} a_i$ は $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$ で定義されるが，$\prod_{cyc}$ は和が積にかわるだけで $\sum_{sym}$ と同様に定義される。

すなわち，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数とするとき

$$
\begin{aligned}
\prod_{cyclic} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} & f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \cdot f(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_1) \\
& \cdot \cdots \cdot f(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})
\end{aligned}
$$

と $\boldsymbol{n}$ **項の積で** $\prod_{cyclic}$ を定義する。$\prod_{cyclic}$ を $\prod_{cyc}$ で表記する場合もある。

たとえば 3 変数 x, y, z のとき $\prod_{cyclic} (y + z) = (y + z)(z + x)(x + y.)$

2.2　三角形関係の記号について

△ABC について

G	重心	centroid			
O	外心	circumcenter	R	外接円の半径	radius of circumcircle
I	内心	incenter	r	内接円の半径	radius of incircle
H	垂心	orthocenter			
$\mathrm{I_A}, \mathrm{I_B}, \mathrm{I_C}$	傍心	excentres	r_a, r_b, r_c	傍接円の半径	radii of excircles

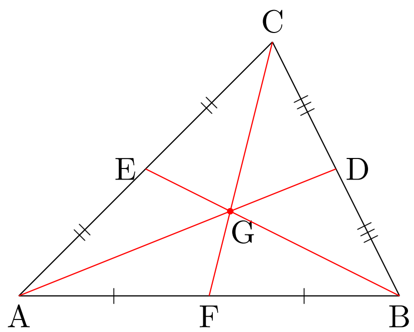
h_a, h_b, h_c	高さ	altitudes
m_a, m_b, m_c	中線の長さ	medians
l_a, l_b, l_c または w_a, w_b, w_c	角の二等分線の長さ	angle-bisectors

その他の記号

[ABC]　△ABC の面積

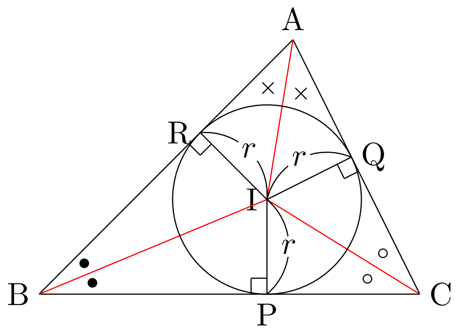
s　△ABC の半周長　$s = \dfrac{a+b+c}{2}$

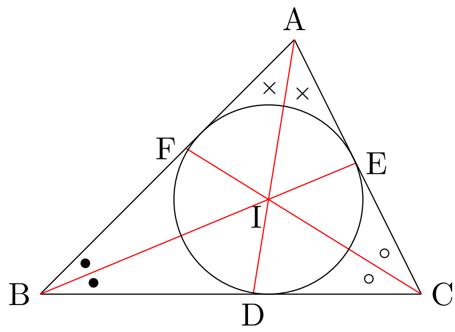
重心　三角形の 3 本の中線の交点 G を，この三角形の重心という。



$$m_a = \mathrm{AD}, m_b = \mathrm{BE}, m_c = \mathrm{CF}$$

内心　三角形の 3 つの内角の二等分線の交点 I を，この三角形の内心という。 I は △ABC の内接円の中心である。





$$\mathrm{IP} = r, \mathrm{IQ} = r, \mathrm{IR} = r,$$

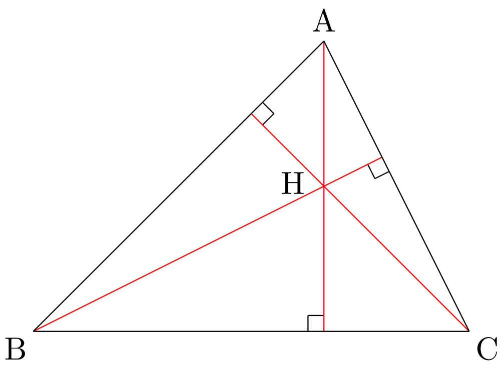
$$w_a = \mathrm{AD}, w_b = \mathrm{BE}, w_c = \mathrm{CF}.$$

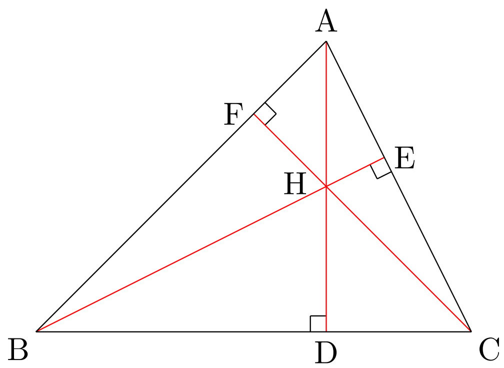
△ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{IBC} + \triangle\mathrm{ICA} + \triangle\mathrm{IAB} \\ &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= r \cdot \frac{a+b+c}{2} \\ &= rs \end{aligned}$$

から $S = rs$ を得る。

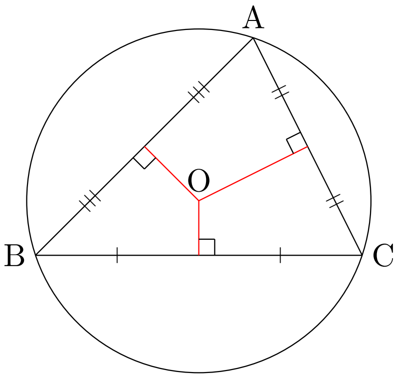
垂心　　三角形の 3 頂点から対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線の交点Hを，三角形の垂心という。

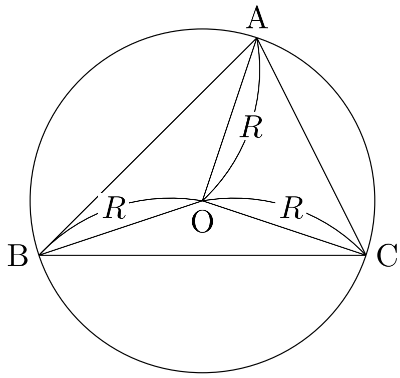




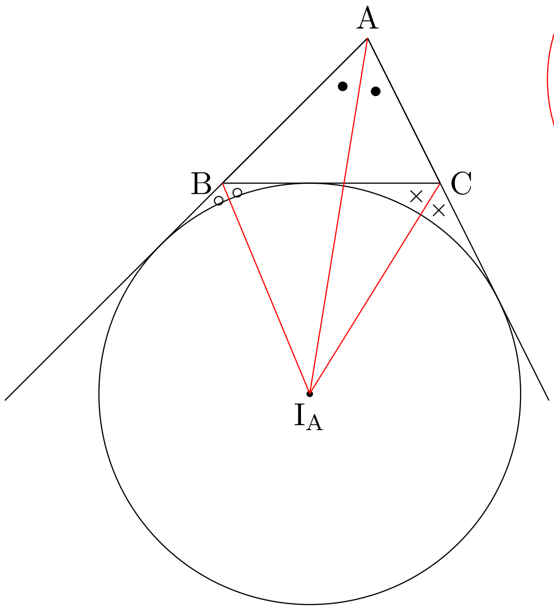
$$h_a = \mathrm{AD}, h_b = \mathrm{BE}, h_c = \mathrm{CF}$$

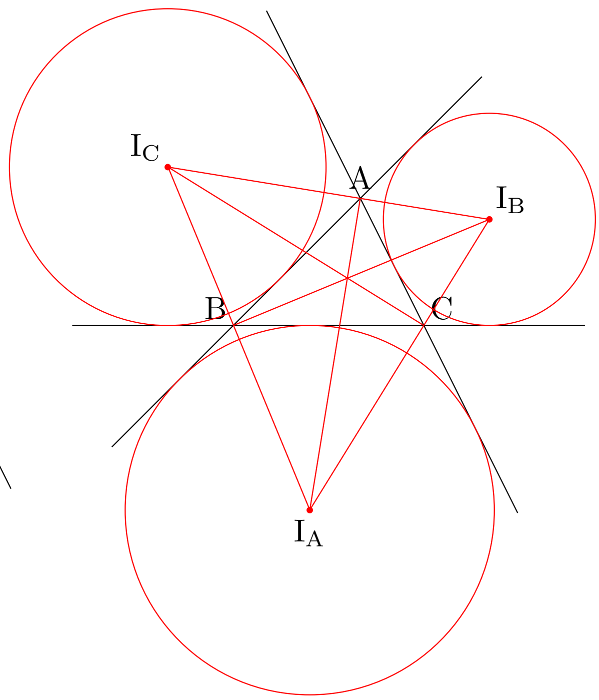
外心　　三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点 O を，この三角形の外心という。O は △ABC の外接円の中心である。





傍心　　△ABC の 1 つの内角の二等分線と，他の 2 つの外角の二等分線の交点を傍心という。 △ABC の傍心は 3 つある。3 直線 AB， BC， CA に接する傍接円の中心である。



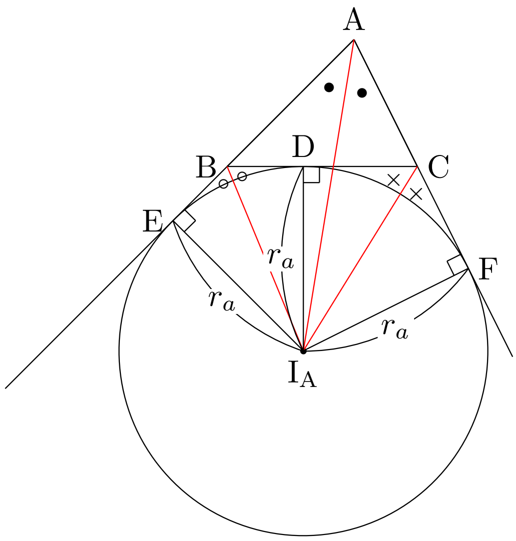


△ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{ABI_A} + \triangle \mathrm{ACI_A} - \triangle \mathrm{BCI_A} \\ &= \frac{1}{2}c \cdot r_a + \frac{1}{2}b \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a \\ &= \frac{1}{2}r_a(b+c-a) \\ &= r_a(s-a). \end{aligned}$$

同様にして次の公式を得る。

$$\boldsymbol{S = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c.}$$



2.3 正弦定理と余弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

これを正弦定理という。

△ABC において次の等式が成り立つ。

$$a = b\cos C + c\cos B, \tag{2.1}$$
$$b = c\cos A + a\cos C, \tag{2.2}$$
$$c = a\cos B + b\cos A. \tag{2.3}$$

これらを第 1 余弦定理という。

問 9 正弦定理と加法定理を利用して (2.1) を証明せよ。

(2.1)，(2.2)，(2.3) に順に $a, -b, -c$ をかけ，これらを加え合わせて $\cos B, \cos C$ を消去すると，$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$ すなわち $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を得る。
同様にして次の公式が得られる。

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{aligned}$$

これらを第 2 余弦定理という。

2.4　三角形の面積

$\triangle$ABC の面積を S とする。

$$
\begin{aligned}
&S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c,\\
&S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C,\\
&S=rs,\\
&S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\\
&S=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c.
\end{aligned}
$$

問 10　$\triangle$ABC の面積を S とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$

(2)　$S=\dfrac{abc}{4R}$

(3)　$S=\dfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}$

(4)　$S=\sqrt{rr_ar_br_c}$

2.5　三角形への応用

例題 3　$\triangle$ABC について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$
\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{r_a-r}{4R}}.
$$

解 半角の公式と余弦定理により

$$
\begin{aligned}
\sin^2\frac{A}{2}&=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\\
&=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}=\frac{(2s-2b)(2s-2c)}{4bc}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}.
\end{aligned}
$$

$0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\sin\dfrac{A}{2}>0.$

ゆえに $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$

また

$$\frac{(s-b)(s-c)}{bc}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{bcs(s-a)}=\frac{S^2}{bcs(s-a)}=\frac{S}{abc}\cdot\frac{aS}{s(s-a)}$$
$$=\frac{1}{4R}\cdot\left(\frac{S}{s-a}-\frac{S}{s}\right)=\frac{1}{4R}(r_a-r)$$

であるから $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}=\sqrt{\dfrac{r_a-r}{4R}}$ は成立する。 ■

問 11　△ABC について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}=\sqrt{\dfrac{r_b r_c}{bc}}$

(2)　$\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\dfrac{r}{s-a}=\dfrac{r_a}{s}$

問 12　△ABC について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{4R}$

(2)　$\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{s}{4R}$

(3)　$\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

例題 4　△ABC において ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，

$$\mathrm{AD}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

であることを示せ。

解 △ABD+△ACD=△ABC より

$$\frac{1}{2}\cdot c\cdot\mathrm{AD}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\mathrm{AD}\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$(b+c)\mathrm{AD}\sin\frac{A}{2}=bc\sin A$$

$$(b+c)\mathrm{AD}\sin\frac{A}{2}=2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

両辺を $(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$ で割ると

$$\mathrm{AD}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$ ■

問**??**(1) と例題 4 から

$$w_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{bcs(s-a)}$$

すなわち

$$\boldsymbol{w_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}, w_b = \frac{2\sqrt{cas(s-b)}}{c+a}, w_c = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}} \tag{2.4}$$

を得る。

また

$$\begin{aligned} w_a^2 &= \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}{(b+c)^2} \\ &= bc\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \end{aligned}$$

から

$$\boldsymbol{w_a^2 = bc\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)}$$

のように変形できる。

2.6　練習問題 1

問題 1　$\triangle$ABC が直角三角形でないとき，以下を示せ。

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

逆に，正の実数 x, y, z が $x+y+z=xyz$ をみたすとき，ある鋭角三角形 ABC が存在して，$x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$ をみたす。

解　$$\tan C=\tan(180^\circ-A-B)=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

両辺に $1-\tan A\tan B$ をかけると

$$(1-\tan A\tan B)\tan C=-\tan A-\tan B$$

より $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

$x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C\quad\left(0<A,B,C<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。

$x+y+z=xyz$ を $(1-xy)z=-(x+y)$ と変形すると，右辺は負だから $1-xy\fallingdotseq 0.$
z について解くと

$$z=-\frac{x+y}{1-xy}=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan(A+B)$$

となり

$$0=\tan(A+B)+\tan C=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B)\cos C}$$

$0<A+B+C<\dfrac{3\pi}{2}$ だから $A+B+C=\pi.$

したがって，ある鋭角三角形 ABC が存在して，$x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$ をみたす。 ■

問題 2　$\triangle$ABC に対して，以下を示せ。

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.$$

逆に，正の実数 x, y, z が $xy+yz+zx=1$ をみたすとき，ある鋭角三角形 ABC が存在して，$x=\cot A, y=\cot B, z=\cot C$ をみたす。

解　$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ……①
とおく。

三角形 ABC が直角三角形のとき，たとえば $A=90^\circ$ としても一般性は失われない。このとき

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=\cot B\cot C=\frac{\cos B}{\sin B}\cdot\frac{\cos C}{\sin C}$$
$$=\frac{\cos B}{\sin B}\cdot\frac{\cos(90^\circ-B)}{\sin(90^\circ-B)}=\frac{\cos B}{\sin B}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=1$$

となり①は成り立つ。

$\triangle$ABC が直角三角形でないときは，$\tan A,\tan B,\tan C$ が定義され 0 ではないから

$$① \iff \frac{1}{\tan A\tan B}+\frac{1}{\tan B\tan C}+\frac{1}{\tan C\tan A}=1$$
$$\iff \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C. \quad \cdots\cdots ②$$

$$\tan C=\tan(180^\circ-A-B)=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

両辺に $1-\tan A\tan B$ をかけると

$$(1-\tan A\tan B)\tan C=-\tan A-\tan B$$

より $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

逆に，正の実数 x,y,z が $xy+yz+zx=1$ をみたすとき，

$$x=\cot A, y=\cot B, z=\cot C \quad \left(0<A,B,C<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおく。
$xy+yz+zx=1$ を z について解く。

$$(x+y)z=1-xy$$

$x+y>0$ だから

$$\cot C=z=\frac{1-xy}{x+y}=\frac{1-\dfrac{1}{\tan A}\cdot\dfrac{1}{\tan B}}{\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}}=-\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}$$
$$=-\frac{1}{\tan(A+B)}=-\cot(A+B).$$

よって

$$0=\cot(A+B)+\cot C=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin(A+B+C)}{\sin(A+B)\sin C}.$$

$0 < A+B+C < \dfrac{3\pi}{2}$ だから $A+B+C=\pi$.

したがって，A，B，C はある鋭角三角形の 3 つの内角で $x=\cot A, y=\cot B, z=\cot C$ をみたす。 ■

問題 3　△ABC に対して，以下を示せ。

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

逆に，正の実数 x,y,z が $xy+yz+zx=1$ をみたすとき，ある三角形 ABC が存在して，$x=\tan\dfrac{A}{2}, y=\tan\dfrac{B}{2}, z=\tan\dfrac{C}{2}$ をみたす。

解 $\tan\dfrac{C}{2}=\tan\dfrac{\pi-(A+B)}{2}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}}$.

両辺に $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}$ をかけると

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

整理して

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

逆に，正の実数 x,y,z が $xy+yz+zx=1$ をみたすとき，

$$x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, z=\tan\frac{C}{2}\quad(0<A,B,C<\pi)$$

とおく。

$xy+yz+zx=1$ を z について解く。

$$(x+y)z=1-xy$$

$x+y>0$ だから

$$z=\frac{1-xy}{x+y}=\frac{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\dfrac{A+B}{2}}=\tan\frac{\pi-(A+B)}{2}$$

から

$$\tan\frac{C}{2}=\tan\frac{\pi-(A+B)}{2}.$$

$0<\dfrac{C}{2}, \dfrac{\pi-(A+B)}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ で $\tan\theta$ は $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ で増加関数だから

$$\frac{C}{2}=\frac{\pi-(A+B)}{2}$$

すなわち $A+B+C=\pi$ を得る。
したがって，A，B，C はある三角形の 3 つの内角で $x=\tan\dfrac{A}{2}, y=\tan\dfrac{B}{2}, z=\tan\dfrac{C}{2}$ をみたす。 ■

問題 4　△ABC に対して，以下を示せ。

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

逆に，正の実数 x, y, z が $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ をみたすとき，ある鋭角三角形 ABC が存在して，$x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$ をみたす。

解

$$\begin{aligned}&\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C\\
&=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2A}{2}+\cos^2 C\\
&=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2 C\\
&=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C\\
&=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C\\
&=1-\cos C\,(\cos(A-B)-\cos C)\\
&=1-\cos C\,(\cos(A-B)+\cos(A-B))\\
&=1-2\cos C\cos A\cos B\end{aligned}$$

から　$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$

逆に，正の実数 x, y, z が

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

をみたすとき，①から $0<x, y, z<1$ だから

$$x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C \qquad \left(0<A, B, C<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおける。
これらを①に代入すると

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1. \qquad \cdots\cdots ②$$

$C' = \pi - A - B > 0$ とおくと，$0 < C' < \pi$ で $A + B + C' = \pi$ だから A, B, C' を 3 つの内角とする三角形が存在して

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C' + 2\cos A \cos B \cos C' = 1 \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。
② − ③ から

$$\cos^2 C - \cos^2 C' + 2\cos A \cos B(\cos C - \cos C') = 0$$

$$(\cos C - \cos C')(\cos C + \cos C' + 2\cos A \cos B) = 0$$

ところで，$0 < C < \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2} < A - B < \dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\begin{aligned} \cos C + \cos C' + 2\cos A \cos B &= \cos C + \cos(\pi - A - B) + 2\cos A \cos B \\ &= \cos C - \cos(A + B) + \cos(A + B) + \cos(A - B) \\ &= \cos C + \cos(A - B) > 0 \end{aligned}$$

なので，$\cos C - \cos C' = 0$.

$0 < C < \dfrac{\pi}{2}, 0 < C' < \pi$ で $\cos\theta$ は $(0, \pi)$ で減少関数だから $C = C'$ すなわち $A + B + C = \pi$ を得る。

したがって，A，B，C はある三角形の 3 つの内角で $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$ をみたす。 ■

問題 5　△ABC に対して，以下を示せ。

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1.$$

逆に，正の実数 x, y, z が $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ をみたすとき，ある三角形 ABC が存在して，$x = \sin\dfrac{A}{2}, y = \sin\dfrac{B}{2}, z = \sin\dfrac{C}{2}$ をみたす。

解　$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}&=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\\&=1-\frac{\cos A+\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\\&=1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\\&=1-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\\&=1-\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\\&=1-\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\\&=1-\sin\frac{C}{2}\cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\&=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{aligned}$$

から $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$ は成り立つ。

逆に，正の実数 x, y, z が

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

をみたすとき，$x, y, z>0>0$ と $y^2+z^2+2xyz=1-x^2>0$ から $0<x<1$ を得る。同様にして $0<y, z<1$ が成り立つから

$$x=\sin\frac{A}{2}, y=\sin\frac{B}{2}, z=\sin\frac{C}{2} \quad (0<A, B, C<\pi)$$

とおける。これらを①に代入すると

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1. \qquad \cdots\cdots ②$$

$A+B<\pi$ であることを示す。

$$\begin{aligned}② &\iff \frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1\\&\iff \sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{\cos A+\cos B}{2}\\&\iff \sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.\end{aligned}$$

$\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$ だから $\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}>0.$

$-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\frac{A-B}{2}>0$ なので $\cos\frac{A+B}{2}>0.$

$(0<)\frac{A+B}{2}<\frac{\pi}{2}$ すなわち $A+B<\pi$ である。

$C' = \pi - A - B > 0$ とおくと，$0 < C' < \pi$ で $A + B + C' = \pi$ だから A, B, C' を 3 つの内角とする三角形が存在して

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C'}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C'}{2} = 1. \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

② − ③ から

$$\sin^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C'}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{C'}{2}\right) = 0$$

$$\left(\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{C'}{2}\right)\left(\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C'}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) = 0$$

$\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C'}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} > 0$ だから $\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{C'}{2} = 0.$

$0 < \frac{C}{2}, \frac{C'}{2} < \frac{\pi}{2}$ で $\sin\theta$ は $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ で増加関数だから

$$\frac{C}{2} = \frac{C'}{2}$$

から $C = C'$ すなわち $A + B + C = \pi$ を得る。

したがって，A，B，C はある三角形の 3 つの内角で $x = \sin\frac{A}{2}, y = \sin\frac{B}{2}, z = \sin\frac{C}{2}$ をみたす。 ■

問題 6　x, y, z は正の実数で， $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ をみたすとき，次の不等式を証明せよ。

$$x + y + z \leqq 3.$$

解 $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4 \iff \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{2} = 1$ で $x, y, z > 0$ より

$$\frac{x}{2} = \cos A, \frac{y}{2} = \cos B, \frac{z}{2} = \cos C, \quad \left(0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}, A + B + C = \pi\right)$$

とおける。

$x + y + z = 2(\cos A + \cos B + \cos C)$ だから

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqq \frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

を示せばよい。

$f(t)=\cos t \quad \left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(t)=-\cos t<0$ だから $f(t)$ は凹関数である。

よって Jensen の不等式により

$$f(A)+f(B)+f(C) \leqq 3\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}.$$

したがって ①は成立する。 ■

注 ①は次のように示すこともできる。

$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\cos\dfrac{A-B}{2} \leqq 1$ だから

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C\\ &= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\ &\leqq 2\sin\frac{C}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\ &= -2\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\\ &\leqq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

問題 7 x,y,z は正の実数で， $x+y+z=xyz$ をみたすとき，次の不等式を証明せよ。(1998 Korea Contests Final Round)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3}{2}.$$

解 x,y,z は正の実数で， $x+y+z=xyz$ をみたすから

$$x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C \quad \left(0<A,B,C<\frac{\pi}{2}, A+B+C=\pi\right)$$

とおける。

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C \leqq \frac{3}{2}$$

より

$$\cos A+\cos B+\cos C \leqq \frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

を示せばよい。後は問題 6 の解答参照。 ■

問題 8 x,y,z は正の実数で， $x+y+z=xyz$ をみたすとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{4}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{33}{8}.$$

解 x, y, z は正の実数で， $x+y+z=xyz$ をみたすから

$$x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C \quad \left(0<A,B,C<\frac{\pi}{2}, A+B+C=\pi\right)$$

とおける。

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{4}{\sqrt{1+z^2}} \leqq \frac{33}{8} \iff \cos A+\cos B+\cos C \leqq \frac{3}{2}$$

より

$$\cos A+\cos B+4\cos C \leqq \frac{33}{8} \qquad \cdots\cdots ①$$

を示せばよい。$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\cos\dfrac{A-B}{2} \leqq 1$ だから

$$\begin{aligned}
\cos A+\cos B+4\cos C &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+4\cos C \\
&= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+4\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right) \\
&\leqq 2\sin\frac{C}{2}+4-8\sin^2\frac{C}{2} \\
&= -8\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{33}{8} \\
&\leqq \frac{33}{8}.
\end{aligned}$$

したがって ①は成立する。 ■

問題 9 x, y, z は正の実数で， $xy+yz+zx=1$ をみたすとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{2}{x^2+1}+\frac{2}{y^2+1}+\frac{3}{z^2+1} \leqq \frac{16}{3}.$$

解 正の実数 x, y, z が $xy+yz+zx=1$ をみたすから

$$x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, z=\tan\frac{C}{2} \quad (0<A,B,C<\pi, A+B+C=\pi)$$

とおける。

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x^2+1}+\frac{2}{y^2+1}+\frac{3}{z^2+1}+ \leqq \frac{16}{3} \\
\iff &2\cos^2\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{B}{2}+3\cos^2\frac{C}{2} \leqq \frac{16}{3} \\
\iff &1+\cos A+1+\cos B+\frac{3(1+cosC)}{2} \leqq \frac{16}{3} \\
\iff &\cos A+\cos B+\frac{3}{2}\cos C \leqq \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

より

$$\cos A + \cos B + \frac{3}{2}\cos C \leqq \frac{11}{6} \qquad \cdots\cdots ①$$

を示せばよい。

$-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{A-B}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $0 < \cos\dfrac{A-B}{2} \leqq 1$ だから

$$\begin{aligned}
&\cos A + \cos B + \frac{3}{2}\cos C \\
&= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{3}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{3}{2} - 3\sin^2\frac{C}{2} \\
&\leqq 2\sin\frac{C}{2} + \frac{3}{2} - 3\sin^2\frac{C}{2} \\
&= -3\left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{11}{6} \\
&\leqq \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

したがって ①は成立する。 ■

2.7　三角不等式

問 13　$\triangle$ABC に対して，以下を示せ。

(1)　直角三角形ではない $\triangle$ABC に対して

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

が成り立つ。

(2)　鋭角三角形 ABC に対して不等式

$$\tan A \tan B \tan C \geqq 3\sqrt{3}$$

が成り立つ。

解 (1) $\triangle$ABC が直角三角形でないときは，$\tan A, \tan B, \tan C$ が定義されるから

$$\tan C = \tan(180^\circ - A - B) = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

両辺に $1 - \tan A \tan B$ をかけると

$$(1 - \tan A \tan B)\tan C = -\tan A - \tan B$$

より $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$

(2) 鋭角三角形 ABC に対して $\tan A, \tan B, \tan C > 0$ だから，相加平均と相乗平均の不等式より

$$\tan A + \tan B + \tan C \geqq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}.$$

(1) を用いると

$$\tan A \tan B \tan C \geqq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$$

$$(\tan A \tan B \tan C)^3 \geqq 27\,(\tan A \tan B \tan C)$$

$$(\tan A \tan B \tan C)^2 \geqq 27$$

よって

$$\tan A \tan B \tan C \geqq 3\sqrt{3}$$ ■

[注意] $\tan A + \tan B + \tan C \geqq 3\sqrt{3}$ の別証明

$f(x) = \tan x \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0$ より

$f(x)$ は凸関数である。Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} f(A)+f(B)+f(C) &\geqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

したがって

$$\tan A + \tan B + \tan C \geqq 3\sqrt{3}.$$

問 14　△ABC に対して，以下を示せ。

(1)　$\sin A + \sin B + \sin C \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\sin A \sin B \sin C \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

(3)　$\cos A + \cos B + \cos C \leqq \dfrac{3}{2}$

(4)　$\cos A \cos B \cos C \leqq \dfrac{1}{8}$

(5)　$\csc A + \csc B + \csc C \geqq 2\sqrt{3}$

(6)　$\cot A \cot B \cot C \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

(7)　$\cot A + \cot B + \cot C \geqq \sqrt{3}$

(8)　$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqq \dfrac{9}{4}$

(9)　$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geqq \dfrac{3}{4}$

(10)　$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geqq 1$

(11)　$\csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C \geqq 4$

解 凸（凹）関数に関する Jensen の不等式等を利用する。

(1) $f(x) = \sin x \quad (0 < x < \pi)$ は凹関数だから，Jensen の不等式により

$$f(A)+f(B)+f(C) \leqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって　$\sin A + \sin B + \sin C \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

別解

$$
\begin{aligned}
\sin A+\sin B+\sin C &= \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\
&= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\
&= 2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\
&\leqq 2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)\\
&= 2\sqrt{\cos^2\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)^2}\\
&= 2\sqrt{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)^3}.
\end{aligned}
$$

相加平均と相乗平均の不等式を使い

$$
\begin{aligned}
2 &= \left(1-\sin\frac{A}{2}\right)+\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{3}+\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{3}+\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{3}\\
&\leqq 4\sqrt[4]{\frac{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)^3}{27}}
\end{aligned}
$$

から

$$
\sqrt{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)^3} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{4}.
$$

よって

$$
\sin A+\sin B+\sin C \leqq 2\sqrt{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)^3} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2}.
$$

等号は $B-C=0$ かつ $1-\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1+\sin\frac{A}{2}}{3}$ から $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のときに限り成り立つ。

[注意] $\sin\dfrac{A}{2}=t$ とおいて $g(t)=(1-t)(1+t)^3 \quad (0<t<1)$ の増減を調べてもよい。

(2) $\sin A, \sin B, \sin C>0$ だから相加平均と相乗平均の不等式より

$$
\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \geqq \sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}.
$$

(1) より

$$
\frac{3\sqrt{3}}{2} \geqq \sin A+\sin B+\sin C
$$

が成り立つから

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} \geqq \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \geqq \sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}.$$

よって

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} \geqq \sin A\sin B\sin C.$$

別解 1 $f(x)=\log(\sin x) \quad (0<x<\pi)$ とおくと $f''(x)=-\csc^2 x<0$ だから $f(x)$ は凹関数である。

Jensen の不等式より

$$f(A){+}f(B){+}f(C) \leqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\log\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\log\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\log(\sin A)+\log(\sin B)+\log(\sin C) \leqq \log\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\log(\sin A\sin B\sin C) \leqq \log\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

よって

$$\sin A\sin B\sin C \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

別解 2

$$\begin{aligned}\sin A\sin B\sin C &= \frac{1}{2}\sin A\left(\cos(B-C)-\cos(B+C)\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin A\left(\cos(B-C)+\cos A\right)\\ &\leqq \frac{1}{2}\sin A\left(1+\cos A\right)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 A\left(1+\cos A\right)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\cos A\right)^3\left(1-\cos A\right)}\end{aligned}$$

$1+\cos A, 1-\cos A>0$ だから相加平均と相乗平均の不等式より

$$2=\frac{1+\cos A}{3}+\frac{1+\cos A}{3}+(1-\cos A) \geqq 4\sqrt[4]{\frac{\left(1+\cos A\right)^3\left(1-\cos A\right)}{27}}$$

から

$$\sqrt{\left(1+\cos A\right)^3\left(1-\cos A\right)} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

よって

$$\sin A\sin B\sin C \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\cos A\right)^3\left(1-\cos A\right)} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

から

$$\sin A \sin B \sin C \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

(3) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ が成り立つことを利用する。
$f(x) = \log(\sin x) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(x) = -\csc^2 x < 0$ だから $f(x)$ は凹関数である。
Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\leqq 3f\left(\frac{A/2 + B/2 + C/2}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\log\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \log\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\log\left(\sin\frac{A}{2}\right) + \log\left(\sin\frac{B}{2}\right) + \log\left(\sin\frac{C}{2}\right) \leqq \log\frac{1}{8}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

よって

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq 1 + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

から

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqq \frac{3}{2}.$$

別解 1

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \cos A + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\ &= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\ &\leqq 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} \\ &= -2\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \\ &\leqq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

よって

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqq \frac{3}{2}.$$

等号は $B - C = 0$ かつ $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ から $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ のときに限り成り立つ。

[注意] 問 12 (3) で $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$ を示したから，この問題で示した 不等式 $\cos A + \cos B + \cos C \leqq \dfrac{3}{2}$ を使うと，$1 + \dfrac{r}{R} \leqq \dfrac{3}{2}$ から**オイラーの不等式 $\boldsymbol{2r \leqq R}$** を得る。

(4) $\cos A \cos B \cos C \leqq \dfrac{1}{8}$. $\cdots\cdots$①

△ABC が鈍角三角形のとき，A，B，C のいずれか一つが鈍角なので①の左辺は負になるから，①は成立する。

△ABC が直角三角形のとき，①の左辺は 0 になるから，①は成立する。

したがって，これからは △ABC が鋭角三角形の場合を考える。

$f(x) = \log(\cos x)$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f''(x) = -\sec^2 x < 0$ だから $f(x)$ は凹関数である。

Jensen の不等式より

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\log\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \log\frac{1}{8}$$

$$\log(\cos A) + \log(\cos B) + \log(\cos C) \leqq \log\frac{1}{8}$$

$$\log(\cos A \cos B \cos C) \leqq \log\frac{1}{8}$$

よって

$$\cos A \cos B \cos C \leqq \frac{1}{8}.$$

別解 1 $\quad \cos A \cos B \cos C \leqq \dfrac{1}{8}$. $\cdots\cdots$①

△ABC が鈍角三角形のとき，A，B，C のいずれか一つが鈍角なので①の左辺は負になるから，①は成立する。

△ABC が鈍角三角形でないときは，相加平均と相乗平均の不等式と（3）で示した $\cos A + \cos B + \cos C \leqq \dfrac{3}{2}$ を用いて

$$\frac{1}{2} \geqq \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \geqq \sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C}$$

から

$$\cos A \cos B \cos C \leqq \frac{1}{8}.$$

別解 2 $\quad \cos A \cos B \cos C \leqq \dfrac{1}{8}$. $\cdots\cdots$①

$$
\begin{aligned}
\cos A\cos B\cos C &= \frac{1}{2}\cos A\left(\cos(B+C)+\cos(B-C)\right)\\
&= \frac{1}{2}\cos A\left(-\cos A+\cos(B-C)\right)\\
&\leqq \frac{1}{2}\cos A\left(-\cos A+1\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos A-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\\
&\leqq \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

となり，①は成り立つ。

(5) $f(x)=\csc x \quad (\,0<x<\pi\,)$ とおくと $f''(x)=\dfrac{1+\cos^x}{\sin^3 x}>0$ より $f(x)$ は凸関数である。

Jensen の不等式より

$$
f(A)+f(B)+f(C) \geqq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\csc\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}
$$

よって

$$
\csc A+\csc B+\csc C \geqq 2\sqrt{3}.
$$

別解 コーシー・シュワルツの不等式の変形を使うと

$$
\begin{aligned}
\csc A+\csc B+\csc C &= \frac{1^2}{\sin A}+\frac{1^2}{\sin B}+\frac{1^2}{\sin C}\\
&\geqq \frac{(1+1+1)^2}{\sin A+\sin B+\sin C}\\
&= \frac{9}{\sin A+\sin B+\sin C}
\end{aligned}
$$

$\sin A+\sin B+\sin C \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ だから

$$
\csc A+\csc B+\csc C \geqq= \frac{9}{\sin A+\sin B+\sin C} \geqq \frac{9}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}.
$$

よって

$$
\csc A+\csc B+\csc C \geqq 2\sqrt{3}.
$$

(6) $\cot A\cot B\cot C \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ 対称性から $A \geqq B \geqq C$ と仮定しても一般性を失わない。
$\triangle$ABC が鈍角三角形か直角三角形のとき，$A \geqq \dfrac{\pi}{2}$ $\cot A \leqq 0.$

$0 < A, B < \dfrac{\pi}{2}$ だから $\cot B \cot C > 0$.
よって $\cot A \cot B \cot C \leqq 0$ だから証明すべき不等式は成り立つ。
$\triangle$ABC が鋭角三角形のときは，$\tan A \tan B \tan C \geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つから

$$\cot A \cot B \cot C = \frac{1}{\tan A \tan B \tan C} \leqq \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

(7) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$ が成り立つから，不等式
$(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$ で $x = \cot A, y = \cot B, z = \cot C$ とおくと

$$(\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geqq 3\left(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A\right) = 3. \quad \cdots\cdots ①$$

したがって

$$\cot A + \cot B + \cot C > 0 \quad \cdots\cdots ②$$

を示せば十分である。
$\triangle$ABC が鋭角三角形か直角三角形のときは明らかに②は成り立つ。
以下 $\triangle$ABC が鈍角三角形のときを考える。$A > \dfrac{\pi}{2}$ と仮定しても一般性を失わない。このとき $0 < A, B < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
② &\iff \cot B + \cot C > -\cot A \\
&\iff \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} > -\frac{\cos A}{\sin A} \\
&\iff \sin^2 A > -\cos A \sin B \sin C \\
&\iff \sin^2 A > \frac{1}{2}\cos A\left(\cos(B+C) - \cos(B-C)\right) \\
&\iff 2\left(1 - \cos^2 A\right) > \cos A\left(-\cos A - \cos(B-C)\right) \\
&\iff 2 - \cos^2 A > -\cos A \cos(B-C).
\end{aligned}$$

$-cos A > 0$ より $-\cos A \geqq -\cos A \cos(B-C)$ だから

$$2 - \cos^2 A > -\cos A \quad \cdots\cdots ③$$

を示せば十分である。

$$③ \iff 2 > \cos^2 A + (-\cos A).$$

$1 > \cos^2, 1 > (-\cos A$ だから $2 > \cos^2 A + (-\cos A)$ は成立する。

別解 $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}$

と変形できるから $\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}$ について考察する。

$$\begin{aligned}\frac{\sin C}{\sin A\sin B}&=\frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}=\frac{2\sin C}{\cos(A-B)+\cos C}\\&\geqq\frac{2\sin C}{1+\cos C}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\cot A+\cot B+\cot C&=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}\geqq\frac{2\sin C}{1+\cos C}+\frac{\cos C}{\sin C}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sin^2 C+2\cos 2C+2\cos C}{(1+\cos C)\sin C}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sin^2 C+\cos 2C+2\cos C+1}{(1+\cos C)\sin C}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sin^2 C+(\cos C+1)^2}{(1+\cos C)\sin C}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3\sin C}{1+\cos C}+\frac{1+\cos C}{\sin C}\right)\\&\overset{AM\geqq GM}{\geqq}\ \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{3\sin C}{1+\cos C}\cdot\frac{1+\cos C}{\sin C}}\\&=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

したがって

$$\cot A+\cot B+\cot C\geqq\sqrt{3}.$$

(8) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$ が成り立つから
$2+2\cos A\cos B\cos C\leqq\dfrac{9}{4}$ すなわち

$$\cos A\cos B\cos C\leqq\frac{1}{8}$$

を示せば十分である。これは (4) から成立する。

別解 $L=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$ とおく。

対称性から $A\leqq B\leqq C$ と仮定しても一般性を失わない。

$0<A\leqq\dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{1}{2}\leqq\cos A<1$ だから

$$
\begin{aligned}
L &= \sin^2 A + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} = 1 + \sin^2 A - \frac{\cos 2B + \cos 2C}{2} \\
&= 1 + \sin^2 A - \cos(B+C)\cos(B-C) = 1 + 1 - \cos^2 A + \cos A \cos(B-C) \\
&\leqq 2 - \cos^2 A + \cos A = -\left(\cos A - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leqq \frac{9}{4}.
\end{aligned}
$$

等号は $B-C=0$ かつ $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$ から $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のときに限り成り立つ。

注　(8) を使うと $\dfrac{3}{4} \leqq \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ を示すことができる。

(9) (8) を使うと

$$
\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 3 - \left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) \geqq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.
$$

したがって

$$
\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geqq \frac{3}{4}.
$$

(10) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$ が成り立つから，不等式 $x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ で $x=\cot A, y=\cot B, z=\cot C$ とおくと

$$
\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geqq \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1
$$

から

$$
\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geqq 1.
$$

等号は $\cot A = \cot B = \cot C$ すなわち $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のときに成り立つ。

(11) $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geqq 1$ が成り立つから

$$
\begin{aligned}
\csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C &= 1 + \tan^2 A + 1 + \tan^2 B + 1 + \tan^2 C \\
&= 3 + \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \\
&\geqq 3 + 1 = 4.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C \geqq 4. \qquad \blacksquare
$$

問 15　△ABC に対して，以下を示せ。

(1)　$\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{3}{2}$

(2)　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{1}{8}$

(3)　$2<\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(4)　$\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

(5)　$\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}\geqq 6$

(6)　$\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\geqq\sqrt{3}$

(7)　$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

(8)　$\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\geqq 3\sqrt{3}$

(9)　$\sec\dfrac{A}{2}+\sec\dfrac{B}{2}+\sec\dfrac{C}{2}\geqq 2\sqrt{3}$

(10)　$\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{9}{4}$

解 (1) $f(x)=\sin x \quad \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は凹関数だから，Jensen の不等式により

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right) &\leqq 3f\left(\frac{A/2+B/2+C/2}{3}\right)\\
&=3f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

よって $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{3}{2}$.

別解 不等式の左辺を cos に変形する。

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right).$$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2},\beta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2},\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ とおくと

$$0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2},\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{3\pi}{2}-\frac{A+B+C}{2}=\pi$$

だから α,β,γ はある鋭角三角形の 3 つの内角である。

問 14(3) から $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq \dfrac{3}{2}$ が成り立つので

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqq \frac{3}{2}.$$

(2) $f(x) = \log(\sin x) \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(x) = -\csc^2 x < 0$ だから $f(x)$ は凹関数である。

Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\leqq 3f\left(\frac{A/2 + B/2 + C/2}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\log\sin\frac{\pi}{6} = \log\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\log\left(\sin\frac{A}{2}\right) + \log\left(\sin\frac{B}{2}\right) + \log\left(\sin\frac{C}{2}\right) \leqq \log\frac{1}{8}$$

したがって

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

別解 1 相加平均と相乗平均の不等式と (1) より

$$\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \leqq \frac{\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}}{3} \leqq \frac{1}{2}.$$

したがって

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

別解 2 積を和に変換する公式を使う。

$$\begin{aligned} \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} &= \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) \\ &\leqq \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \\ &\leqq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

したがって

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}, \beta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2}, \gamma=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ とおくと

$$0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2},\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{3\pi}{2}-\frac{A+B+C}{2}=\pi$$

だから α,β,γ はある鋭角三角形の 3 つの内角である。

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\\&=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\end{aligned}$$

となるから，問 14(1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ を使うと

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$2<\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}$ の証明

一般性を失うことなく $\alpha\geqq\beta\geqq\gamma$ と仮定することができる。

すると $0<\gamma\leqq\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha.$

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}&=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\\&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma\\&=2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma\end{aligned}$$

$$\alpha-\beta<\gamma\Longleftrightarrow\alpha<\beta+\gamma=\pi-\alpha\Longleftrightarrow\alpha<\frac{\pi}{2}$$

より $0\leqq\dfrac{\alpha-\beta}{2}<\dfrac{\gamma}{2}\leqq\dfrac{\pi}{6}$ だから $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}>\cos\dfrac{\gamma}{2}.$

よって

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}&=2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma\\&>2\cos^2\frac{\gamma}{2}+\sin\gamma\\&=1+\cos\gamma+\sin\gamma\\&=1+\sqrt{2}\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{4}<\gamma+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ だから $\sin\left(\gamma+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つので

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}>1+\sqrt{2}\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)>1+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2.$$

したがって

$$2 < \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}.$$

別解 $\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ の証明

$f(x) = \cos x \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f(x)$ は凹関数であるから，Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\leqq 3f\left(\frac{A/2 + B/2 + C/2}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

したがって

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$2 < \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}$ の証明

$f(A, B, C) = \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} + \lambda(A + B + C - \pi)$ を閉領域

$0 \leqq A, B, C \leqq \pi,\ A + B + C = \pi$ で考えると Weierstrass の定理により最大値と最小値が存在する。

$$f_A(A, B, C) = -\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2} + \lambda = 0,$$

$$f_B(A, B, C) = -\frac{1}{2}\sin\frac{B}{2} + \lambda = 0,$$

$$f_C(A, B, C) = -\frac{1}{2}\sin\frac{C}{2} + \lambda = 0$$

とすると

$$\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} = 2\lambda.$$

$0 \leqq A, B, C \leqq \pi,\ A + B + C = \pi$ より $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ で

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

対称性から，境界線 $C = 0, 0 \leqq A, B \leqq \pi, A + B = \pi$ で考えると

$$f(A, B, 0) = \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{\pi - A}{2} + 1 = \cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} + 1 = \sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{A}{2} + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ だから

$$2 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leqq \sqrt{2} + 1.$$

$\sqrt{2} + 1 < \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ だから $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
$(A, B, C) = (\pi, 0, 0), (0, \pi, 0), (0, 0, \pi)$ のとき最小値 2 をとる。
元の問題に戻ると 2 と言う値はとれないから

$$2 < \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(4) $f(x) = \log(\cos x) \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(x) = -\sec^2 x = -\tan^2 x - 1 < 0$

より $f(x)$ は凹関数である。Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\leqq 3f\left(\frac{A/2 + B/2 + C/2}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\log\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \log\frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

$$\log\left(\cos\frac{A}{2}\right) + \log\left(\cos\frac{B}{2}\right) + \log\left(\cos\frac{C}{2}\right) \leqq \log\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\log\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right) \leqq \log\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

したがって

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

別解 $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}, \beta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}, \gamma = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$ とおくと

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{2} - \frac{A + B + C}{2} = \pi$$

だから α, β, γ はある鋭角三角形の 3 つの内角である。

$$\begin{aligned} \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \\ &= \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \end{aligned}$$

となるから，問 14(2) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ を使うと

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

(5) $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\sin x} \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(x) = \dfrac{\cos^2 x + 1}{\sin^3 x} > 0$ より

$f(x)$ は凸関数である。Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\geqq 3f\left(\frac{A/2 + B/2 + C/2}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\csc\frac{\pi}{6} = 6. \end{aligned}$$

したがって

$$\csc\frac{A}{2} + \csc\frac{B}{2} + \csc\frac{C}{2} \geqq 6.$$

(6) 問題 3 から，△ABC に対して

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$$

が成り立つから，不等式 $(x+y+z)^2 \geqq 3(xy+yz+zx)$ で
$x = \tan\dfrac{A}{2}, y = \tan\dfrac{B}{2}, z = \tan\dfrac{C}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} &\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 \\ &\geqq 3\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right) = 3. \end{aligned}$$

$\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} > 0$ であるから

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geqq \sqrt{3}.$$

別解 1 $f(x) = \tan x \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0$ より

$f(x)$ は凸関数である。Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\geqq 3f\left(\frac{A/2 + B/2 + C/2}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

したがって

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqq\sqrt{3}.$$

別解 $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2},\beta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2},\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ とおくと

$$0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2},\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{3\pi}{2}-\frac{A+B+C}{2}=\pi$$

だから α,β,γ はある鋭角三角形の 3 つの内角である。

$$\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}&=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\\&=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\end{aligned}$$

となるから，問 14(7) $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geqq\sqrt{3}$ を使うと

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqq\sqrt{3}.$$

(7) 問題 3 から，△ABC に対して

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

が成り立つ。
$\tan\dfrac{A}{2},\tan\dfrac{B}{2},\tan\dfrac{C}{2}>0$ だから相加平均と相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}1&=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\\&\geqq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

したがって

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leqq\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

(8) $f(x)=\cot x\quad\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(x)=\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}>0$ より

$f(x)$ は凸関数である。Jensen の不等式より

$$\begin{aligned}f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)&\geqq 3f\left(\frac{A/2+B/2+C/2}{3}\right)\\&=3f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\cot\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

したがって

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} \geqq 3\sqrt{3}.$$

別解 1 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \leqq \frac{\sqrt{3}}{9}$ と

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

から

$$\begin{aligned}\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} &= \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}} \\ &= \frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} \\ &= \frac{1}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} \\ &\geqq \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

したがって

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} \geqq 3\sqrt{3}.$$

別解 2 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}, \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}, \gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ とおくと

$$0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2},\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{3\pi}{2}-\frac{A+B+C}{2}=\pi$$

だから α,β,γ はある鋭角三角形の 3 つの内角である。

$$\begin{aligned}\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} &= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \\ &= \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\end{aligned}$$

となるから，問 13 の $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \geqq 3\sqrt{3}$ を使うと

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} \geqq 3\sqrt{3}..$$

(9) $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $f''(x) = \dfrac{\sin^2 x + 1}{\cos^3 x} > 0$ より $f(x)$ は凸関数である。Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\geqq 3f\left(\frac{A/2 + B/2 + C/2}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sec\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

したがって

$$\sec\frac{A}{2} + \sec\frac{B}{2} + \sec\frac{C}{2} \geqq 2\sqrt{3}.$$

(10) 半角の公式を使って不等式の左辺を変形する。

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} &= \frac{1+\cos A}{2} + \frac{1+\cos B}{2} + \frac{1+\cos C}{2} \\ &= \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2}. \end{aligned}$$

問 14(3) より $\cos A + \cos B + \cos C \leqq \dfrac{3}{2}$ だから

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} &= \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2} \\ &\leqq \frac{1}{2}\left(3 + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

よって

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leqq \frac{9}{4}. \qquad \blacksquare$$

問 16　△ABC に対して，以下を示せ。

(1) $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$

(2) $\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\geqq 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(3) $\csc\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}+\csc\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}+\csc\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\geqq 6$

(4) $\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}\geqq 6$

解 (1) 正弦定理を用いて，等式のさ左辺を角の関係に直す。

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}=\frac{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}$$
$$=\frac{\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$$

から

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}.$$

(2) $\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\geqq 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$　　$\cdots\cdots$①

とおく。

(1) から $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$.

同様にして $\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{\cos\dfrac{C-A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}$, $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$ が成り立つから

$$① \iff \frac{\cos\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\dfrac{C-A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}\cdot\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}\geqq 8$$
$$\iff \frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}\geqq 8$$
$$\iff (b+c)(c+a)(a+b)\geqq 8abc. \qquad\cdots\cdots②$$

$$(b+c)(c+a)(a+b) \geqq 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab} = 8abc$$

より ②は成立する。

(3) $$\csc\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\csc\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\csc\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geqq 6 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$③ \iff \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geqq 6. \qquad \cdots\cdots ④$$

$$\begin{aligned}\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} &= \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\\ &\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 6\end{aligned}$$

となり ④は成立する。

(4) (3) より $\csc\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\csc\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\csc\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geqq 6$ が成り立つので

$$\begin{aligned}&\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}\\ \geqq\ &\csc\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\csc\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\csc\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \geqq\ &6\end{aligned}$$

より

$$\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2} \geqq 6. \qquad \blacksquare$$

問 17　△ABC に対して，以下を示せ。

問 18　△ABC に対して，以下を示せ。

問 19　△ABC に対して，以下を示せ。

問 20　△ABC に対して，以下を示せ。

問 21　△ABC に対して，以下を示せ。

2.8　a, b, c の対称式を s, r, R を使って表す

準備のため，△ABC において a, b, c の基本対称式 $\sigma_1 = a+b+c, \sigma_2 = ab+bc+ca$, $\sigma_3 = abc$ を s, r, R で表す。

$\sigma_1 = a+b+c = 2s.$

三角形 ABC の面積を S とすると，$S = rs = \dfrac{abc}{4R}$ から $abc = 4Rrs$ すなわち

$\sigma_3 = 4Rrs$ を得る。

$S = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ から

$$
\begin{aligned}
r^2 = \frac{S^2}{s^2} &= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\
&= \frac{s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc}{s} \\
&= \frac{s^3 - 2s \cdot s^2 + (ab+bc+ca)s - 4Rrs}{s} \\
&= -s^2 + ab + bc + ca - 4Rr
\end{aligned}
$$

よって $ab+bc+ca = s^2 + 4Rr + r^2$ を得る。

$$\boxed{a+b+c = 2s\,,\ ab+bc+ca = s^2+4Rr+r^2\,,\ abc = 4Rrs}$$

a, b, c の対称式を s, r, R を使って表す。

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &= 2s^2 - 8Rr - 2r^2 \\
&= 2(s^2 - 4Rr - r^2) \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3 &= 2s^3 - 12Rrs - 6r^2s \\
&= 2s(s^2 - 6Rr - 3r^2) \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) &= 2s^3 - 4Rrs + 2r^2s \\
&= 2s(s^2 - 2Rr + r^2) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) &= 2s^3 - 4Rrs + 2r^2s \\
&= 2s(s^2 - 2Rr + r^2) \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = s^4 - 2r(4R-r)s^2 + r^2(4R+r)^2 \qquad (2.9)$$

$$a^4+b^4+c^4 = 2\left(s^4 - 2r(4R+3r)s^2 + r^2(4R+r)^2\right) \qquad (2.10)$$

証明 (2.5)

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= (2s)^2-2(s^2+4Rr+r^2) \\ &= 2s^2-8Rr-2r^2 = 2(s^2-4Rr-r^2) \end{aligned}$$

(2.6)

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ba-ca)+3abc \\ &= 2s\left(2s^2-8Rr-2r^2-\left(s^2+4Rr+r^2\right)\right)+3\cdot 4Rrs \\ &= 2s^3-12Rrs-6r^2s = 2s(s^2-6Rr-3r^2) \end{aligned}$$

(2.7)

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} a^2(b+c) &= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc \\ &= 2s(s^2+4Rr+r^2)-3\cdot 4Rrs \\ &= 2s^3-4Rrs+2r^2s = 2s(s^2-2Rr+r^2) \end{aligned}$$

(2.8)

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} a\left(b^2+c^2\right) &= \sum_{cyc} a^2(b+c) \\ &= 2s^3-4Rrs+2r^2s = 2s(s^2-2Rr+r^2) \end{aligned}$$

(2.9)

$$\begin{aligned} a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= (ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c) \\ &= (s^2+4Rr+r^2)^2-2\cdot 4Rrs\cdot 2s \\ &= s^4-2r(4R-r)s^2+r^2(4R+r)^2 \end{aligned}$$

(2.10)

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= \left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \\ &= \left(2s^2-8Rr-2r^2\right)^2-2\left(s^4-2r(4R-r)s^2+r^2(4R+r)^2\right) \\ &= 4s^4-8(4Rr+r^2)s^2+4r^2(4R+r)^2 \\ &\qquad -2s^4+4r(4R-r)s^2-2r^2(4R+r)^2 \\ &= 2s^4-4r(4R+3r)s^2+2r^2(4R+r)^2 \\ &= 2\left(s^4-2r(4R+3r)s^2+r^2(4R+r)^2\right) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\prod_{cyc}(a+b)=(a+b)(b+c)(c+a)=2s^3+4Rrs+2r^2s=2s(s^2+2Rr+r^2) \tag{2.11}$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+b}=\frac{5s^2+4Rr+r^2}{2s(s^2+2Rr+r^2)} \tag{2.12}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\frac{2s^2-2Rr-2r^2}{s^2+2Rr+r^2} \tag{2.13}$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{9s^4+(8Rr-6r^2)s^2+r^2(4Rr+r)^2}{4s^2(s^2+2Rr+r^2)^2} \tag{2.14}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{(b+c)^2}=\frac{2s^4-(8Rr+12r^2)s^2+12R^2r^2+8Rr^3+2r^4}{(s^2+2Rr+r^2)^2} \tag{2.15}$$

$$\sum_{cyc}\sec^2\frac{B-C}{2}=\frac{4R\left((5R+6r)s^2-8R^2r-7Rr^2-2r^3\right)}{\left(s^2+2Rr+r^2\right)^2} \tag{2.16}$$

証明 (2.11)

$$\begin{aligned}\prod_{cyc}(a+b)=(a+b)(b+c)(c+a)&=\sum_{cyc}a^2(b+c)+2abc\\&=2s^3-4Rrs+2r^2s+2\cdot 4Rrs\\&=2s^3+4Rrs+2r^2s\\&=2s(s^2+2Rr+r^2).\end{aligned}$$

(2.12)

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{1}{a+b}&=\sum_{cyc}\frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}\sum_{cyc}(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}(b+c)(c+a)&=\sum_{cyc}(c^2+ab+bc+ca)\\&=\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}bc\\&=2s^2-8Rr-2r^2+3(s^2+4Rr+r^2)\\&=5s^2+4Rr+r^2\end{aligned}$$

となるから，$(a+b)(b+c)(c+a=2s(s^2+2Rr+r^2)$ も用いると

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{1}{a+b}&=\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}\sum_{cyc}(b+c)(c+a)\\&=\frac{5s^2+4Rr+r^2}{2s(s^2+2Rr+r^2)}.\end{aligned}$$

(2.13)

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{2s-(b+c)}{b+c}&=2s\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}-3\\&=2s\cdot\frac{5s^2+4Rr+r^2}{2s(s^2+2Rr+r^2)}-3\\&=\frac{5s^2+4Rr+r^2}{2s(s^2+2Rr+r^2)}.\end{aligned}$$

(2.14)

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{1}{(a+b)^2}&=\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}\\&=\frac{1}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}\sum_{cyc}(b+c)^2(c+a)^2\end{aligned}$$

と変形する。

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}(b+c)^2(c+a)^2&=\left(\sum_{cyc}(b+c)(c+a)\right)^2-2(a+b)(b+c)(c+a)\sum_{cyc}(c+a)\\&=(5s^2+4Rr+r^2)^2-2(2s^3+4Rrs+2r^2s)\cdot 4s\\&=9s^4+(8Rr-6r^2)s^2+16R^2r^2+8Rr^3+r^4\\&=9s^4+(8Rr-6r^2)s^2+r^2(4Rr+r)^2\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{1}{(a+b)^2}&=\frac{1}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}\sum_{cyc}(b+c)^2(c+a)^2\\&=\frac{9s^4+(8Rr-6r^2)s^2+r^2(4Rr+r)^2}{4s^2(s^2+2Rr+r^2)^2}.\end{aligned}$$

(2.15)

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{a^2}{(b+c)^2} &= \sum_{cyc}\frac{(2s-(b+c))^2}{(b+c)^2}\\
&= 4s^2\sum_{cyc}\frac{1}{(b+c)^2} - 4s\sum_{cyc}\frac{1}{b+c} + 3\\
&= 4s^2\cdot\frac{9s^4+(8Rr-6r^2)s^2+r^2(4Rr+r)^2}{4s^2(s^2+2Rr+r^2)^2}\\
&\qquad - 4s\cdot\frac{5s^2+4Rr+r^2}{2s(s^2+2Rr+r^2)} + 3\\
&= \frac{2s^4-(8Rr+12r^2)s^2+12R^2r^2+8Rr^3+2r^4}{(s^2+2Rr+r^2)^2}.
\end{aligned}$$

(2.16) $\cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b+c}{a}, \cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ だから

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\sec^2\frac{B-C}{2} &= \sum_{cyc}\left(\frac{a}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}\right)^2 = \sum_{cyc}\frac{4R^2\sin^2 A}{(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}}\\
&= \sum_{cyc}\frac{16R^2\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}} = 16R^2\sum_{cyc}\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}\\
&= 16R^2\sum_{cyc}\frac{s(s-a)}{bc}\frac{1}{(b+c)^2} = \frac{16R^2 s}{abc}\sum_{cyc}\frac{a(s-a)}{(b+c)^2}\\
&= \frac{16R^2 s}{4Rrs}\left(\frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\frac{a(b+c-a)}{(b+c)^2}\right)\\
&= \frac{2R}{r}\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} - \sum_{cyc}\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)\\
&= \frac{2R}{r}\left(\frac{2s^2-2Rr-2r^2}{s^2+2Rr+r^2}\right.\\
&\qquad\left. - \frac{2s^4-(8Rr+12r^2)s^2+12R^2r^2+8Rr^3+2r^4}{(s^2+2Rr+r^2)^2}\right)\\
&= \frac{2R}{r}\cdot\frac{(10Rr+12r^2)s^2-16R^2r^2-14Rr^3-4r^4}{(s^2+2Rr+r^2)^2}\\
&= \frac{4R\left((5R+6r)s^2-8R^2r-7Rr^2-2r^3\right)}{\left(s^2+2Rr+r^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

※ (2.16) は，(2.13)，(2.15) を使用するため，ここに挿入した。

2.9 三角関数の対称式を s, r, R を使って表す

問 12 で次の 3 つの等式を証明してある，

(1) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$

(2) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{s}{4R}$

(3) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

これらの 3 つの等式も含めて基本的なものから扱っていきたい。

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{s}{R} \tag{2.17}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} \tag{2.18}$$

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \frac{s^2 + 4Rr + r^2}{4R^2} \tag{2.19}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{s^2 - 4Rr - r^2}{2R^2} \tag{2.20}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{6R^2 + 4Rr + r^2 - s^2}{2R^2} \tag{2.21}$$

$$\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \frac{s^2 - 4R^2 + r^2}{4R^2} \tag{2.22}$$

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \frac{r}{2R} \tag{2.23}$$

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = \frac{4R + r}{2R} \tag{2.24}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{s^2 - 8Rr + r^2}{16R^2} \tag{2.25}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{s^2 + (4R + r)^2}{16R^2} \tag{2.26}$$

$$\sin A\sin B\sin C = \frac{rs}{2R^2} \tag{2.27}$$

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{s^2 - (2R + r)^2}{4R^2} \tag{2.28}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R} \tag{2.29}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{s}{4R} \tag{2.30}$$

証明 (2.17)

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{2s}{2R} = \frac{s}{R}.$$

(2.18)

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 + 4\cdot\frac{r}{4R} = 1 + \frac{r}{R}.$$

(2.19)

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \frac{ab+bc+ca}{4R^2} = \frac{s^2+4Rr+r^2}{4R^2}.$$

(2.20)

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} = \frac{2(s^2-4Rr-r^2)}{4R^2}\\ &= \frac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2}.\end{aligned}$$

(2.21)

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 3 - \left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right)\\ &= 3 - \frac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2} = \frac{6R^2+4Rr+r^2-s^2}{2R^2}.\end{aligned}$$

(2.22)

$$\begin{aligned}&\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A\\ &= \frac{1}{2}\left((\cos A + \cos B + \cos C)^2 - 2\left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{R+r}{R}\right)^2 - \frac{6R^2+4Rr+r^2-s^2}{2R^2}\right) = \frac{s^2-4R^2+r^2}{4R^2}.\end{aligned}$$

(2.23)

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} &= \frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} + \frac{1-\cos C}{2}\\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)\\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 1 - \frac{r}{2R}.\end{aligned}$$

(2.24)

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} &= 3 - \left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)\\ &= 3 - \left(1 - \frac{r}{2R}\right) = \frac{4R+r}{2R}.\end{aligned}$$

(2.25)

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} &= \frac{1}{4} \sum_{cyc} (1 - \cos B)(1 - \cos C) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{cyc} (1 - (\cos B + \cos C) \cos B \cos C) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 - 2 \sum_{cyc} \cos A + \sum_{cyc} \cos B \cos C \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 - 2 \left(1 + \frac{r}{R} \right) + \frac{s^2 - 4R^2 + r^2}{4R^2} \right) \\ &= \frac{s^2 - 8Rr + r^2}{16R^2}.\end{aligned}$$

(2.26)

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} &= \frac{1}{4} \sum_{cyc} (1 + \cos B)(1 + \cos C) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{cyc} (1 + (\cos B + \cos C) \cos B \cos C) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 + 2 \sum_{cyc} \cos A + \sum_{cyc} \cos B \cos C \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 + 2 \left(1 + \frac{r}{R} \right) + \frac{s^2 - 4R^2 + r^2}{4R^2} \right) \\ &= \frac{s^2 + (4R + r)^2}{16R^2}.\end{aligned}$$

(2.27)

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{(2R)^3} = \frac{4Rrs}{(2R)^3} = \frac{rs}{2R^2}.$$

(2.28) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\cos A \cos B \cos C &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2} - 1 \\ &= \frac{s^2 - 4Rr - r^2}{4R^2} - 1 \\ &= \frac{s^2 - 4R^2 - 4Rr - r^2}{4R^2} = \frac{s^2 - (2R + r)^2}{4R^2}.\end{aligned}$$

(2.29) $\sin \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \sin \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \sin \dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

だから

$$\begin{aligned}\prod_{cyc}\sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\\ &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc}\\ &= \frac{S^2}{sabc} = \frac{(rs)^2}{s\cdot 4Rrs} = \frac{r}{4R}.\end{aligned}$$

(2.30) $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}, \cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}, \cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$
だから

$$\begin{aligned}\prod_{cyc}\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\\ &= \frac{s\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{abc} = \frac{sS}{abc}\\ &= \frac{s\cdot rs}{4Rrs} = \frac{s}{4R}.\end{aligned}$$

または $\sin A+\sin B+\sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ から

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{4} = \frac{s}{4R}. \qquad \blacksquare$$

$$\sum_{cyc}\cos(B-C) = \frac{s^2+2Rr+r^2}{2R^2} - 1 \tag{2.31}$$

$$\sum_{cyc}\cos^2\frac{B-C}{2} = \frac{s^2+4R^2+2Rr+r^2}{4R^2} \tag{2.32}$$

$$\prod_{cyc}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{s^2+2Rr+r^2}{8R^2} \tag{2.33}$$

$$\prod_{cyc}\cos(B-C) = \frac{s^4-(6R^2+8Rr-2r^2)s^2+8R^4+24R^3r+22R^2r^2+8Rr^3+r^4}{8R^4} \tag{2.34}$$

証明 (2.31)

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\cos(B-C) &= \sum_{cyc}(\cos B\cos C+\sin B\sin C)\\
&= \sum_{cyc}\cos B\cos C+\sum_{cyc}\sin B\sin C\\
&= \frac{s^2-4R^2+r^2}{4R^2}+\frac{s^2+4Rr+r^2}{4R^2}\\
&= \frac{s^2-2R^2+2Rr+r^2}{2R^2}\\
&= \frac{s^2+2Rr+r^2}{2R^2}-1.
\end{aligned}$$

(2.32)

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\cos^2\frac{B-C}{2} &= \sum_{cyc}\frac{1+\cos(B-C)}{2}\\
&= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\cos(B-C)\\
&= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{s^2+2Rr+r^2}{2R^2}-1\right)\\
&= \frac{s^2+4R^2+2Rr+r^2}{4R^2}.
\end{aligned}$$

(2.33)

$$\begin{aligned}
\prod_{cyc}\cos\frac{B-C}{2} &= \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-C}{2}+\cos\frac{A+C-2B}{2}\right)\cos\frac{C-A}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{C-A}{2}+\cos\frac{A+C-2B}{2}\cos\frac{C-A}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}(1+\cos(C-A)+\cos(C-B)+\cos(A-B))\\
&= \frac{1}{2}(1+\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A))\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{s^2+2Rr+r^2}{2R^2}-1\right)\\
&= \frac{s^2+2Rr+r^2}{8R^2}.
\end{aligned}$$

(2.34)

$$
\begin{aligned}
&\prod_{cyc} \cos(B-C) \\
&= \cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) \\
&= \left(2\cos^2\frac{A-B}{2}-1\right)\left(2\cos^2\frac{A-B}{2}-1\right)\left(2\cos^2\frac{A-B}{2}-1\right) \\
&= 8\left(\prod_{cyc}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - 4\prod_{cyc}\cos^2\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{C-A}{2} \\
&\qquad\qquad + 2\sum_{cyc}\cos^2\frac{A-B}{2} - 1 \\
&= 8\left(\prod_{cyc}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - 4\left(\prod_{cyc}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2\sum_{cyc}\sec^2\frac{A-B}{2} \\
&\qquad\qquad + 2\sum_{cyc}\cos^2\frac{A-B}{2} - 1 \\
&= 8\left(\frac{s^2+2Rr+r^2}{8R^2}\right)^2 \\
&\qquad - 4\cdot\left(\frac{s^2+2Rr+r^2}{8R^2}\right)^2\cdot\frac{4R\left((5R+6r)s^2-8R^2r-7Rr^2-2r^3\right)}{\left(s^2+2Rr+r^2\right)^2} \\
&\qquad\qquad + 2\cdot\frac{s^2+4R^2+2Rr+r^2}{4R^2} - 1 \\
&= \frac{s^4-(6R^2+8Rr-2r^2)s^2+8R^4+24R^3r+22R^2r^2+8Rr^3+r^4}{8R^4}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$\sum_{cyc}\tan A = \prod_{cyc}\tan A = \frac{2rs}{s^2-(4R+r)^2} \tag{2.35}$$

$$\sum_{cyc}\tan\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{rs} \tag{2.36}$$

$$\sum_{cyc}\tan^2\frac{A}{2} = \left(\frac{4R+r}{s}\right)^2 - 2 \tag{2.37}$$

$$\sum_{cyc}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1 \tag{2.38}$$

$$\prod_{cyc}\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{s} \tag{2.39}$$

証明に必要な等式を準備しておく。

$$(s-a)(s-b)(s-c) = r^2 s \tag{2.40}$$

$$\sum_{cyc}(s-b)(s-c) = 4Rr + r^2 \tag{2.41}$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{s-a} = \frac{4R+r}{rs} \tag{2.42}$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(s-a)^2} = \frac{1}{r^2s^2}\left((4R+r)^2 - 2s^2\right) \tag{2.43}$$

証明 (2.40)

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = \frac{S^2}{s} = \frac{(rs)^2}{s} = r^2 s.$$

(2.41)

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}(s-b)(s-c) &= \sum_{cyc}\left(s^2 - (b+c)s + bc\right) \\
&= 3s^2 - 2s\sum_{cyc}a + \sum_{cyc}bc \\
&= 3s^2 - 2s\cdot 2s + s^2 + 4Rr + r^2 = 4Rr + r^2.
\end{aligned}$$

(2.42)

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{1}{s-a} &= \frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}\sum_{cyc}(s-b)(s-c) \\
&= \frac{1}{r^2 s}\cdot r(4R+r) = \frac{4R+r}{rs}.
\end{aligned}$$

(2.43)

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{1}{(s-a)^2} &= \frac{1}{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}\sum_{cyc}(s-b)^2(s-c)^2 \\
&= \frac{1}{(r^2s)^2}\left(\left(\sum_{cyc}(s-b)(s-c)\right)^2 - 2(s-a)(s-b)(s-c)\sum_{cyc}(s-c)\right) \\
&= \frac{1}{r^4s^2}\left((4Rr+r^2)^2 - 2\cdot r^2 s\cdot s\right) \\
&= \frac{1}{r^2s^2}\left((4R+r)^2 - 2s^2\right).
\end{aligned}$$

準備ができたので (2.35) 等の証明をする。

証明 (2.35)

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\tan A &= \prod_{cyc}\tan A\\ &= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}\\ &= \frac{rs}{2R^2}\cdot\frac{4R^2}{s^2-(2R+r)^2}\\ &= \frac{2rs}{s^2-(4R+r)^2}.\end{aligned}$$

(2.36) $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{s-a}, \tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{s-b}, \tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{s-c}$ だから

$$\sum_{cyc}\tan\frac{A}{2}=r\sum_{cyc}\frac{1}{s-a}=r\cdot\frac{4R+r}{rs}=\frac{4R+r}{s}.$$

(2.37)

$$\sum_{cyc}\tan^2\frac{A}{2}=r^2\sum_{cyc}\frac{1}{(s-a)^2}=r^2\cdot\frac{1}{r^2s^2}\left((4R+r)^2-2s^2\right)=\left(\frac{4R+r}{s}\right)^2-2.$$

(2.38) 問題 3 参照。

(2.39)

$$\prod_{cyc}\tan\frac{A}{2}=\frac{\displaystyle\prod_{cyc}\sin\frac{A}{2}}{\displaystyle\prod_{cyc}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\frac{r}{4R}}{\frac{s}{4R}}\cdot\frac{r}{s}=\frac{r}{s}. \qquad \blacksquare$$

$$\sum_{cyc}\cot A=\frac{s^2-4Rr-r^2}{2rs} \tag{2.44}$$

$$\sum_{cyc}\cot B\cot C=1 \tag{2.45}$$

$$\sum_{cyc}\cot\frac{A}{2}=\frac{s}{r} \tag{2.46}$$

$$\sum_{cyc}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{r} \tag{2.47}$$

$$\prod_{cyc}\cot\frac{A}{2}=\frac{s}{r} \tag{2.48}$$

証明 (2.44)

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\cot A &= \sum_{cyc}\frac{\cos A}{\sin A} = \sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2R}{a}\\ &= \frac{R}{abc}\sum_{cyc}(b^2+c^2-a^2) = \frac{R}{abc}\sum_{cyc}a^2\\ &= \frac{R}{4Rrs}\cdot 2(s^2-4Rr-r^2)\\ &= \frac{s^2-4Rr-r^2}{2rs}.\end{aligned}$$

(2.45) 問題 2 参照。

(2.46) $\cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{s-a}{r}$ 等から

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\cot\frac{A}{2} &= \frac{1}{r}\sum_{cyc}(s-a) = \frac{1}{r}\left(3s-\sum_{cyc}a\right) = \frac{1}{r}(3s-2s)\\ &= \frac{s}{r}.\end{aligned}$$

(2.47) $\cot\dfrac{B}{2} = \dfrac{s-b}{r}, \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{s-c}{r}$ 等から

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} &= \frac{1}{r^2}\sum_{cyc}(s-b)(s-c)\\ &= \frac{1}{r^2}\cdot(4Rr+r^2)\\ &= \frac{4R+r}{r}.\end{aligned}$$

(2.48)

$$\prod_{cyc}\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{s}$$

より

$$\prod_{cyc}\cot\frac{A}{2} = \frac{1}{\prod_{cyc}\tan\frac{A}{2}} = \frac{s}{r}.$$

■

$$\sum_{cyc} \sec^2 \frac{A}{2} = 1 + \left(\frac{4R + r}{s} \right)^2 \tag{2.49}$$

$$\sum_{cyc} \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} = \frac{8R(4R + r)}{s^2} \tag{2.50}$$

$$\sum_{cyc} \sec^2 \frac{B - C}{2} = \frac{4R\left((5R + 6r)s^2 - 8R^2 r - 7Rr^2 - 2r^3\right)}{\left(s^2 + 2Rr + r^2\right)^2} \tag{2.51}$$

(2.51) は (2.16) と同じ等式で既出。

証明 (2.49)

$$\sum_{cyc} \sec^2 \frac{A}{2} = \sum_{cyc} \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \sum_{cyc} \frac{bc}{s(s-a)} = \frac{\sum_{cyc} bc(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

と変形する。ここで

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = S^2 = (rs)^2,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} bc(s-b)(s-c) &= \sum_{cyc} \left(s^2 bc - s(b+c)bc + b^2 c^2\right) \\
&= s^2 \sum_{cyc} bc - s\left(\sum_{cyc} (b+c)bc\right) + \sum_{cyc} b^2 c^2 \\
&= s^2(s^2 + 4Rr + r^2) - s(2s^3 - 4Rrs + 2r^2 s) \\
&\quad + s^4 - 2r(4R - r)s^2 + r^2(4R + r)^2 \\
&= r^2 s^2 + r^2(4R + r)^2
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \sec^2 \frac{A}{2} &= \frac{\sum_{cyc} bc(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \frac{r^2 s^2 + r^2(4R + r)^2}{r^2 s^2} = \frac{s^2 + (4R + r)^2}{s^2} \\
&= 1 + \left(\frac{4R + r}{s}\right)^2.
\end{aligned}$$

(2.50)

$$\sum_{cyc}\sec^2\frac{B}{2}\sec^2\frac{C}{2}=\sum_{cyc}\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{\sum_{cyc}\cos^2\frac{A}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{4R+r}{2R}}{\left(\frac{s}{4R}\right)^2}=\frac{8R(4R+r)}{s^2}.$$

(2.51) は (2.16) 参照。 ■

3　幾何の定理

3.1　オイラーの定理

(オイラーの定理)　三角形 ABC の外心を O，内心を I，外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とすれば次の等式が成り立つ。

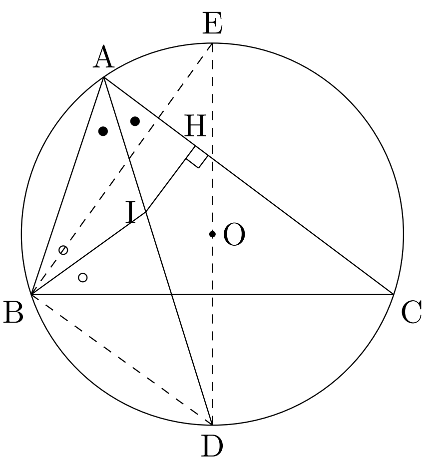
$$\mathrm{OI}^2 = R^2 - 2Rr.$$

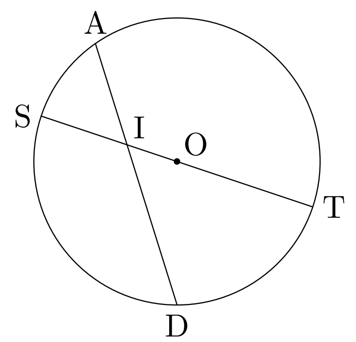
証明 $\alpha = \mathrm{A}/2, \beta = \mathrm{B}/2$ とおく。$\angle\mathrm{A}$ の内角の二等分線と外接円の交点を D とおくと，$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{DAC} = \alpha$ だから，D は A を含まない弧 BC の中点である。

DE を BC に垂直な直径とする。

$\angle\mathrm{BID} = \angle\mathrm{BAI} + \angle\mathrm{ABI} = \alpha + \beta, \angle\mathrm{DBI} = \alpha + \beta$ であるから $\angle\mathrm{BID} = \angle\mathrm{DBI}.$

よって $\triangle\mathrm{DBI}$ は $\mathrm{DB} = \mathrm{DI}$ の二等辺三角形である。





I から辺 AC に下ろした垂線の足を H とすると，方べきの定理より

$$\mathrm{IA} \cdot \mathrm{ID} = \mathrm{IA} \cdot \mathrm{BD} = \frac{\mathrm{IH}}{\sin\alpha} \cdot \mathrm{ED}\sin\alpha = r \cdot 2R = 2Rr.$$

直線 IO と外接円との交点を S，T とすると，方べきの定理より

$$\mathrm{IA} \cdot \mathrm{ID} = \mathrm{IS} \cdot \mathrm{IT} = (R - \mathrm{OI})(R + \mathrm{OI}) = R^2 - \mathrm{OI}^2$$

だから $R^2 - \mathrm{OI}^2 = 2Rr$ より $\mathrm{OI}^2 = R^2 - 2Rr.$ ■

3.2 オイラーの不等式

(オイラーの不等式) 三角形 ABC の外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とすれば次の不等式が成り立つ。

$$R \geqq 2r.$$

等号が成り立つのは △ABC が正三角形のときに限る。

証明 $\mathrm{OI}^2 = R(R-2r) \geqq 0$ から $R \geqq 2r$ となる。

等号が成り立つための必要十分条件は O=I である。

O=I のとき，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = R$ より △OAB は二等辺三角形なので，$\alpha = \beta$ すなわち $A = B$ となる。

同様にして，$\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = R$ より $B = C$ を得るから，結局 $A = B = C$ となり △ABC が正三角形となる。

逆に，△ABC が正三角形のとき，O=I となる。

したがって，等号が成り立つのは △ABC が正三角形のときに限ることが証明された。 ■

3.3 トレミーの不等式

トレミーの不等式を複素数を使って証明するための準備をしておく。

α, β を複素数とするとき，次の関係式が成り立つ。

(i) $\alpha + \overline{\alpha} \leqq 2\,|\alpha|\,.$
ここで等号が成立するのは α が負でない実数になる場合である。

(ii) $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|\,.$
ここで等号が成立するのは，$\beta = c\alpha$ または $\alpha = c\beta$ となる実数 $c \geqq 0$ が存在する場合，すなわち $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ または $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数になる場合である。

証明 (i) $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とおくと

$$\alpha + \overline{\alpha} = a + bi + a - bi = 2a \leqq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\,|\alpha|$$

だから $\alpha+\overline{\alpha} \leqq 2|\alpha|$.

等号が成立するのは $a \geqq 0, b=0$ すなわち α が負でない実数になる場合である。

(ii) $\alpha=0$ または $\beta=0$ のときは $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ は成立するから，以下 $\alpha\beta \neq 0$ とする。

$$
\begin{aligned}
|\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) \\
&= \alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta} \\
&= |\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha\overline{\beta}}+|\beta|^2 \\
&= |\alpha|^2+2\left|\alpha\overline{\beta}\right|+|\beta|^2 \\
&= |\alpha|^2+2|\alpha\beta|+|\beta|^2 \\
&= (|\alpha|+|\beta|)^2
\end{aligned}
$$

から $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$.

等号が成立するのは，$\alpha\overline{\beta}$ が正の実数になるときである。

$$
\alpha\overline{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\overline{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}|\beta|^2
$$

だから，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数になるときである。

以上のことをまとめると，等号が成立するのは，$\beta=c\alpha$ または $\alpha=c\beta$ となる実数 $c \geqq 0$ が存在する場合，すなわち $\alpha=0$ または $\beta=0$ または $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数になる場合である。 ■

(トレミーの不等式)　平面上の 4 点 A，B，C，D に対して次の不等式が成り立つ。

$$
\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \leqq \mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}.
$$

等号が成り立つのは，4 点 A，B，C，D がこの順に同一円周上にあるときに限る。

証明 4 点 A，B，C，D は複素平面で $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を表すものとする。

$$
(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)
$$

が成り立つから

$$
\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}=1.
$$

絶対値をとると

$$\begin{aligned}
1 &= \left| \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} + \frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} \right| \\
&\leqq \left| \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} \right| + \left| \frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} \right| \qquad \cdots\cdots ① \\
&= \frac{|\alpha-\beta|\,|\gamma-\delta|}{|\alpha-\gamma|\,|\beta-\delta|} + \frac{|\alpha-\delta|\,|\beta-\gamma|}{|\alpha-\gamma|\,|\beta-\delta|} \\
&= \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}} + \frac{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}
\end{aligned}$$

から

$$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \leqq \mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD} + \mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}. \qquad \cdots\cdots ②$$

等号が成立する場合を考えてみる。

$z_1 = \dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}, z_2 = \dfrac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}$ とおくと，②で等号が成り立つのは①で等号が成り立つ場合であるから，z_1/z_2 が正の実数のときである。

$z_1 + z_2 = 1$ なので，結局 $z_1 > 0$ かつ $z_2 > 0$ すなわち

$$\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} > 0 \qquad \cdots\cdots ③ \quad \text{かつ} \quad \frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} > 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

のときに限る。

③について考察する。θ_1 は $\overrightarrow{\alpha\beta}$ から $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ の方に測った角，θ_2 は $\overrightarrow{\delta\beta}$ から $\overrightarrow{\delta\gamma}$ の方に測った角とすると

$$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ \frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BD}}(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

と表せるから

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} &= \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \cdot \frac{1}{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1} \cdot \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BD}}(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}\left(\cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1)\right). \qquad \cdots\cdots ⑤
\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ とすると，$-2\pi < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ だから，$\theta_2 - \theta_1 = 0$ すなわち $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BDC}$ のときに限って複素数⑤は正の実数値をとる。

④についても $\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{DBC}$ のときに限って正の実数値をとることがわかる。

以上のことから，②で等号が成り立つのは，4 点 A，B，C，D がこの順に同一円周上にあるときに限る。 ■

トレミーの不等式から次のトレミーの定理が得られる。

(**トレミーの定理**)　四角形 ABCD が円に内接しているとき次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} \leqq \mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}.$$

3.4 スチュワート (Stewart) の定理

(スチュワートの定理)　D を $\triangle$ABC の辺 BC 上の点とすると，次の等式が成り立つ。

$$b^2m + c^2n = a(p^2 + mn).$$

ただし，$m = \mathrm{BD}, n = \mathrm{DC}, p = \mathrm{AD}$ とする。

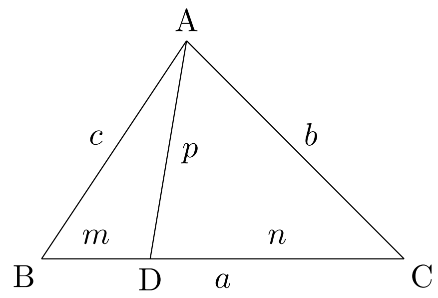
証明 $\angle\mathrm{ADB} + \angle\mathrm{ADC} = \pi$ より $\cos\angle\mathrm{ADB} + \cos\angle\mathrm{ADC} = 0$.
余弦定理を使うと

$$\frac{m^2 + p^2 - c^2}{2mp} + \frac{n^2 + p^2 - b^2}{2np} = 0$$

$$n(n^2 + p^2 - c^2) + m(n^2 + p^2 - b^2) = 0$$

$$b^2m + c^2n = (m+n)p^2 + mn(m+n)$$

$$b^2m + c^2n = ap^2 + amn$$



から

$$b^2m + c^2n = a(p^2 + mn).$$

■

(中線定理)　M を $\triangle$ABC の辺 BC の中点とすると，次の等式が成り立つ。

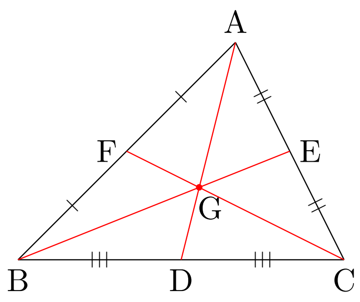
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2).$$

スチュワートの定理で $m = n = a/2$ とおけば得られる。

系　$\triangle$ABC において

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}}{2}, m_b = \frac{\sqrt{2(c^2+a^2) - b^2}}{2}, m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}}{2}.$$

証明 図において，$m_a = \mathrm{AD}, m_b = \mathrm{BE}, m_c = \mathrm{CF}$ である。



中線定理を使うと

$$b^2 + c^2 = 2\left(m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$$

から

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}$$

すなわち

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}}{2}.$$

同様にして

$$m_b = \frac{\sqrt{2(c^2+a^2) - b^2}}{2}, m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}}{2}. \qquad \blacksquare$$

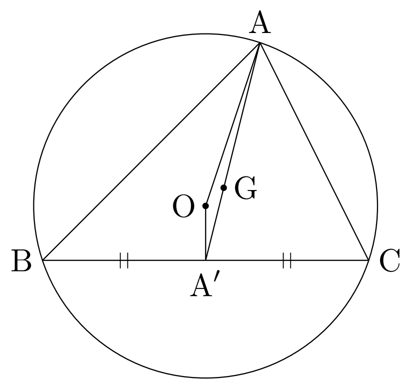
3.5 Leibniz の定理

(**Leibniz の定理**) $\triangle$ABC に対して次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

証明 辺 の中点を A$'$ とする。

$\triangle$OAA$'$ と点 G にスチュワートの定理を適用すると



$$(\mathrm{A'O})^2 \cdot \mathrm{AG} + \mathrm{AO}^2 \cdot \mathrm{A'G} = \mathrm{AA'}(\mathrm{OG}^2 + \mathrm{AG} \cdot \mathrm{A'G})$$

$\mathrm{AO} = R, \mathrm{AG} = \frac{2}{3}\mathrm{AA'}, \mathrm{A'G} = \frac{1}{3}\mathrm{AA'}$ だから

$$(\mathrm{A'O})^2 \cdot \frac{2}{3}\mathrm{AA'} + R^2 \cdot \frac{1}{3}\mathrm{AA}$$
$$= \mathrm{AA'}\left(\mathrm{OG}^2 + \frac{2}{3}\mathrm{AA'} \cdot \frac{1}{3}\mathrm{AA'}\right)$$

よって

$$\mathrm{OG}^2 = \frac{2}{3}(\mathrm{A'O})^2 + \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9}(\mathrm{AA'})^2.$$

ここで

$$(\mathrm{A'O})^2 = \mathrm{OB}^2 - (\mathrm{BA'})^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2, (\mathrm{AA'})^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

だから

$$\begin{aligned}\mathrm{OG}^2 &= \frac{2}{3}(\mathrm{A'O})^2 + \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9}(\mathrm{AA'})^2\\ &= \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{1}{4}a^2\right) + \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9}\cdot\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}\\ &= \mathrm{R}^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$ ■

(**Leibniz の不等式**)　△ABC に対して次の不等式が成り立つ。

$$a^2+b^2+c^2 \leqq 9R^2.$$

証明 $9\mathrm{OG}^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) \geqq 0$ から $a^2+b^2+c^2 \leqq 9R^2$ が得られる。 ■

等号が成立するのは O=G のときだから，△ABC が正三角形のときに限ることを証明できる。

4　三角関数を含む有限級数

4.1　$\sum_{k=1}^{n} f(x+k\theta)$ の形

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{\cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}=\frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{\cos\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}. \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin kx=\frac{(-1)^n\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}}-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx=-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}}. \tag{4.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x},\qquad \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}. \tag{4.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)x=(-1)^{n+1}\frac{\sin 2nx}{2\cos x},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)x=\frac{1+(-1)^{n+1}\cos 2nx}{2\cos x}. \tag{4.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(x+(k-1)\theta)=\frac{\sin\left(x+\dfrac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(x+(k-1)\theta)=\frac{\cos\left(x+\dfrac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}. \tag{4.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin(x+(k-1)\theta)=\sum_{k=1}^{n}\sin(x+(k-1)(\theta+\pi))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin\left(x + \frac{(n-1)(\theta+\pi)}{2}\right) \sin \frac{n(\theta+\pi)}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(x - \frac{\theta}{2}\right) + (-1)^{n+1} \sin\left(x + \frac{(2n-1)\theta}{2}\right)}{2\cos \frac{\theta}{2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cos(x + (k-1)\theta) &= \sum_{k=1}^{n} \cos(x + (k-1)(\theta+\pi)) \\
&= \frac{\cos\left(x + \frac{(n-1)(\theta+\pi)}{2}\right) \sin \frac{n(\theta+\pi)}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(x + \frac{(2n-1)\theta}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\theta}{2}\right)}{2\cos \frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) &= -n \cot\left(nx + \frac{n\pi}{2}\right), \\
\cot\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) &= n \cot nx.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

証明 (4.1)

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right) \cdot 2\sin \frac{x}{2} &= \sum_{k=1}^{n} 2\sin kx \sin \frac{x}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{(2k-1)x}{2} - \cos \frac{(2k+1)x}{2}\right) \\
&= \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right) + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\cos \frac{(2n-1)x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}\right) \\
&= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2} \\
&= 2\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}
\end{aligned}
$$

から

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{\cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\cdot 2\sin\frac{x}{2} &= \sum_{k=1}^{n}2\cos kx\sin\frac{x}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(2k+1)x}{2} - \sin\frac{(2k-1)x}{2}\right) \\
&= \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \cdots \\
&\qquad + \left(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}\right) \\
&= \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2} \\
&= 2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}
\end{aligned}$$

から

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\cos\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

別証明 (4.1) 複素数 z に関する指数関数の値を

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

で定義すると，指数法則 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ 等が得られる。特に $i\theta$ に対してオイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

が成立し

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

を得る。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos kx + i\sum_{k=1}^{n}\sin kx &= \sum_{k=1}^{n}(\cos kx + i\sin kx) = \sum_{k=1}^{n}(\cos x + i\sin x)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n}e^{ikx} = e^{ix}\sum_{k=1}^{n}(e^{ix})^{k-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{ix} \cdot \frac{\left(e^{ix}\right)^n - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{e^{i\cdot\frac{(2n+1)x}{2}} - e^{i\cdot\frac{x}{2}}}{e^{i\cdot\frac{x}{2}} - e^{-i\cdot\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{\cos\dfrac{(2n+1)x}{2} + i\sin\dfrac{(2n+1)x}{2} - \left(\cos\dfrac{x}{2} + i\sin\dfrac{x}{2}\right)}{2i\sin\dfrac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} + i\cdot\frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

から

$$
\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2},
$$

分子を積の形に変形すると

$$
\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\cos\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}},
$$

$$
\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{\cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}},
$$

分子を積の形に変形すると

$$
\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.
$$

(4.2)　(4.1) を利用する。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin kx &= \sum_{k=1}^{n} \sin(kx + k\pi) = \sum_{k=1}^{n} \sin k(x+\pi) \\
&= \frac{1}{2}\cot\frac{x+\pi}{2} - \frac{\cos\dfrac{(2n+1)(x+\pi)}{2}}{2\sin\dfrac{x+\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} - \frac{\cos\left(\dfrac{(2n+1)x}{2} + \dfrac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{2\cos\dfrac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} - \frac{(-1)^{n-1}\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{(-1)^{n}\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx &= \sum_{k=1}^{n}\cos(kx+k\pi) = \sum_{k=1}^{n}\cos k(x+\pi) \\
&= \frac{\sin\dfrac{(2n+1)(x+\pi)}{2}}{2\sin\dfrac{x+\pi}{2}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)x}{2} + \dfrac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{2\cos\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{(-1)^n\cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

別証明 (4.2)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx + i\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin kx \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\cos kx + i\sin kx\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(\cos x + i\sin x)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(e^{ix})^k = \sum_{k=1}^{n}(-e^{ix})^k = -e^{ix}\sum_{k=1}^{n}(-e^{ix})^{k-1} \\
&= -e^{ix}\cdot\frac{\left(-e^{ix}\right)^n - 1}{-e^{ix}-1} = \frac{(-1)^n e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix}+1} \\
&= \frac{(-1)^n e^{i\cdot\frac{(2n+1)x}{2}} - e^{i\cdot\frac{x}{2}}}{e^{i\cdot\frac{x}{2}} + e^{-i\cdot\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{(-1)^n\left(\cos\dfrac{(2n+1)x}{2} + i\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}\right) - \left(\cos\dfrac{x}{2} + i\sin\dfrac{x}{2}\right)}{2\cos\dfrac{x}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n \cos\dfrac{(2n+1)x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}} + i \cdot \frac{(-1)^n \sin\dfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}}$$

から

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cos kx = \frac{(-1)^n \cos\dfrac{(2n+1)x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}} = \frac{(-1)^n \cos\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin kx = \frac{(-1)^n \sin\dfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{(-1)^n \sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}}.$$

(4.3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x\right) 2\sin x = \sum_{k=1}^{n} 2\sin(2k-1)x \sin x \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\cos 2(k-1)x - \cos 2kx) \\
&= (1-\cos 2x) + (\cos 2x - \cos 4x) + \cdots + (\cos 2(n-1)x - \cos 2nx) \\
&= 1 - \cos 2nx = 2\sin^2 nx.
\end{aligned}$$

よって $\sin x \fallingdotseq 0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x\right) 2\sin x = \sum_{k=1}^{n} 2\cos(2k-1)x \sin x \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\sin 2kx - \sin 2(k-1)x) \\
&= (\sin 2x - 0) + (\sin 4x - \sin 2x) + \cdots + (\sin 2nx - \sin 2(n-1)x) \\
&= \sin 2nx.
\end{aligned}$$

よって $\sin x \fallingdotseq 0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$

別証明

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x + i\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x = \sum_{k=1}^{n} (\cos(2k-1)x + i\sin(2k-1)x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} (\cos x + i \sin x)^{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x} = e^{ix} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i\cdot 2x}\right)^{k-1} \\
&= \frac{e^{ix}\left(\left(e^{i\cdot 2x}\right)^n - 1\right)}{e^{i\cdot 2x} - 1} = \frac{e^{ix}\left(e^{i\cdot 2nx} - 1\right)}{e^{i\cdot 2x} - 1} = \frac{e^{i\cdot 2nx} - 1}{e^{ix} - e^{-ix}} \\
&= \frac{\cos 2nx + i \sin 2nx - 1}{2i \sin x} = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} + i \cdot \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x}.
\end{aligned}
$$

実部と虚部を比較して

$$
\cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.
$$

注意 (4.1) と

$$
\sum_{k=1}^{n} (\sin(2k-1)x + \sin 2kx) = \sum_{k=1}^{2n} \sin kx, \ \sum_{k=1}^{n} (\cos(2k-1)x + \cos 2kx) = \sum_{k=1}^{2n} \cos kx
$$

を利用してもよい。

(4.4) (4.3) を利用する。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sin(2k-1)x &= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(2k-1)x \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos\left((2k-1)x + (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos\left((2k-1)\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= -\frac{\sin 2n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\sin(2nx + n\pi)}{2\cos x} \\
&= -\frac{(-1)^n \sin 2nx}{2 \cos x} = \frac{(-1)^{n+1} \sin 2nx}{2 \cos x},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cos(2k-1)x &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(2k-1)x \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin\left((2k-1)x + (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin\left((2k-1)\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1-\cos 2n\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{1-\cos(2nx+n\pi)}{\cos x}$$

$$= \frac{1-(-1)^n\cos 2nx}{\cos x} = \frac{1+(-1)^{n+1}\cos 2nx}{\cos x}$$

から

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)x = \frac{(-1)^{n+1}\sin 2nx}{2\cos x},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)x = \frac{1+(-1)^{n+1}\cos 2nx}{\cos x}.$$

別証明

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)x + i\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)x$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\cos(2k-1)x + i\sin(2k-1)x\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\cos x + i\sin x)^{2k-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^{i(2k-1)x}$$

$$= e^{ix}\sum_{k=1}^{n}\left(-e^{i\cdot 2x}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{e^{ix}\left(1-\left(-e^{i\cdot 2x}\right)^n\right)}{1+e^{i\cdot 2x}} = \frac{e^{ix}\left(1+(-1)^{n+1}e^{i\cdot 2nx}\right)}{1+e^{i\cdot 2x}}$$

$$= \frac{1+(-1)^{n+1}e^{i\cdot 2nx}}{e^{-ix}+e^{ix}}$$

$$= \frac{1+(-1)^{n+1}(\cos 2nx + i\sin 2nx)}{2i\cos x}$$

$$= \frac{1+(-1)^{n+1}\cos 2nx}{2\cos x} + i\cdot\frac{(-1)^{n+1}\sin 2nx}{2\cos x}.$$

実部と虚部を比較して

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)x = \frac{1+(-1)^{n+1}\cos 2nx}{2\cos x},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin(2k-1)x = \frac{(-1)^{n+1}\sin 2nx}{2\cos x}.$$

(4.5)

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n}\sin(x+(k-1)\theta)\right)2\sin\frac{\theta}{2}=\sum_{k=1}^{n}2\sin(x+(k-1)\theta)\sin\frac{\theta}{2}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(x+\frac{(2k-3)\theta}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{(2k-1)\theta}{2}\right)\right)\\
&=\left(\cos\left(x-\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{\theta}{2}\right)\right)+\left(\cos\left(x+\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{3\theta}{2}\right)\right)+\cdots\\
&\qquad+\left(\cos\left(x+\frac{(2n-3)\theta}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)\right)\\
&=\cos\left(x-\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)\\
&=2\sin\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\frac{n\theta}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(x+(k-1)\theta)\right)2\sin\frac{\theta}{2}=\sum_{k=1}^{n}2\cos(x+(k-1)\theta)\sin\frac{\theta}{2}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(x+\frac{(2k-1)\theta}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{(2k-3)\theta}{2}\right)\right)\\
&=\left(\sin\left(x+\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{\theta}{2}\right)\right)+\left(\sin\left(x+\frac{3\theta}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\theta}{2}\right)\right)+\cdots\\
&\qquad+\left(\sin\left(x+\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{(2n-3)\theta}{2}\right)\right)\\
&=\sin\left(x+\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{\theta}{2}\right)\\
&=2\cos\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\frac{n\theta}{2},
\end{aligned}
$$

から

$$
\sum_{k=1}^{n}\sin(x+(k-1)\theta)=\frac{\sin\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}, \qquad \cdots\cdots ①
$$

$$
\sum_{k=1}^{n}\cos(x+(k-1)\theta)=\frac{\cos\left(x+\frac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}. \qquad \cdots\cdots ②
$$

[注意] ①の両辺を x で微分すると②が得られる。また，②の両辺を x で微分すると①が得られる。

(4.5) で $\theta = x$ とおくと，(4.1) が得られる。

別証明

$$I = \sum_{k=1}^{n} \cos(x + (k-1)\theta) = \cos x + \cos(x+\theta) + \cdots + \cos(x + (n-1)\theta)$$
$$J = \sum_{k=1}^{n} \sin(x + (k-1)\theta) = \sin x + \sin(x+\theta) + \cdots + \sin(x + (n-1)\theta)$$

$K = I + iJ$ とおくと

$$\begin{aligned} K &= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos(x + (k-1)\theta) + i\sin(x + (k-1)\theta)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{i(x+(k-1)\theta)} = e^{ix} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^{k-1} = \frac{e^{i(x+n\theta)} - e^{ix}}{e^{i\theta} - 1}. \end{aligned}$$

分母・分子を $e^{i\cdot\frac{\theta}{2}}$ で割ると

$$\begin{aligned} K &= \frac{e^{i\left(x + \frac{(2n-1)\theta}{2}\right)} - e^{i\left(x - \frac{\theta}{2}\right)}}{e^{i\cdot\frac{\theta}{2}} - e^{-i\cdot\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{\cos\left(x + \dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right) + i\sin\left(x + \dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right) - \left(\cos\left(x - \dfrac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(x - \dfrac{\theta}{2}\right)\right)}{2i\sin\dfrac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(x + \dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right) - \sin\left(x - \dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} - i\cdot\frac{\cos\left(x + \dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right) - \cos\left(x - \dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos\left(x + \dfrac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} + i\cdot\frac{\sin\left(x + \dfrac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

実部と虚部を比較して

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(x + (k-1)\theta) = \frac{\cos\left(x + \dfrac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(x + (k-1)\theta) = \frac{\sin\left(x + \dfrac{(n-1)\theta}{2}\right)\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

(4.6) (4.5) を使うと

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin(x+(k-1)\theta) = \sum_{k=1}^{n}\sin(x+(k-1)(\theta+\pi)) \\
&= \frac{\sin\left(x+\dfrac{(n-1)(\theta+\pi)}{2}\right)\sin\dfrac{n(\theta+\pi)}{2}}{\sin\dfrac{\theta+\pi}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(x+\dfrac{(n-1)(\theta+\pi)}{2}\right)\sin\dfrac{n(\theta+\pi)}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\cos\left(x-\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}+\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(x-\dfrac{\theta}{2}\right)+(-1)^{n+1}\sin\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cos(x+(k-1)\theta) = \sum_{k=1}^{n}\cos(x+(k-1)(\theta+\pi)) \\
&= \frac{\cos\left(x+\dfrac{(n-1)(\theta+\pi)}{2}\right)\sin\dfrac{n(\theta+\pi)}{2}}{\sin\dfrac{\theta+\pi}{2}} \\
&= \frac{\cos\left(x+\dfrac{(n-1)(\theta+\pi)}{2}\right)\sin\dfrac{n(\theta+\pi)}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}+\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\cos\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}.
\end{aligned}
$$

別証明

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos(x+(k-1)\theta) + i\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin(x+(k-1)\theta) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\cos(x+(k-1)\theta) + i\sin(x+(k-1)\theta)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^{i(x+(k-1)\theta)} = e^{ix}\sum_{k=1}^{n}\left(-e^{i\theta}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

を初項 e^{ix}，公比 $-e^{i\theta}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和とみて

$$
K = e^{ix}\cdot\frac{1-(-e^{i\theta})^n}{1+e^{i\theta}} = \frac{e^{ix}-(-1)^n e^{i(x+n\theta)}}{1+e^{i\theta}}.
$$

分母と分子を $e^{i\cdot\frac{\theta}{2}}$ で割ると

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{e^{i\left(x-\frac{\theta}{2}\right)} + (-1)^{n+1}e^{i\left(x+\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)}}{e^{-i\cdot\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{\cos\left(x-\dfrac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(x-\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&\qquad + \frac{(-1)^{n+1}\left(\cos\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right) + i\sin\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right)\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\cos\left(x-\dfrac{\theta}{2}\right) + (-1)^{n+1}\cos\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&\qquad + i\cdot\frac{\sin\left(x-\dfrac{\theta}{2}\right) + (-1)^{n+1}\sin\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos(x+(k-1)\theta) = \frac{\cos\left(x-\dfrac{\theta}{2}\right) + (-1)^{n+1}\cos\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}, \quad \cdots\cdots ③
$$

$$
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin(x+(k-1)\theta) = \frac{\sin\left(x-\dfrac{\theta}{2}\right) + (-1)^{n+1}\sin\left(x+\dfrac{(2n-1)\theta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}. \quad \cdots\cdots ④
$$

[注意] ③の両辺を x で微分すると④が得られる。また，④の両辺を x で微分すると③が得られる。

(4.6) で $\theta = x$ とおくと，(4.2) が得られる。

(4.7) n を正の整数として

$$z^n = \cos 2nx + i\sin 2nx$$

を解く。$|z^n| = |\cos 2nx + i\sin 2nx| = 1$ から $|z| = 1$ であることがわかるから，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと方程式は

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \cos 2nx + i\sin 2nx$$

となる。これから

$$n\theta = 2nx + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad\qquad \theta = 2x + \frac{2k\pi}{n}.$$

$\theta_k = 2x + \dfrac{2k\pi}{n}.,\quad z_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ とおくと

$$z^n - (\cos 2nx + i\sin 2nx) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - z_k)$$

が成り立つ。この式で $z = 1$ とおくと

$$\begin{aligned}
(1-\cos 2nx) - i\sin 2nx &= \prod_{k=0}^{n-1}(1 - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\left((1-\cos\theta_k) - i\sin\theta_k\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(2\sin^2\frac{\theta_k}{2} - i\cdot 2\sin\frac{\theta_k}{2}\cos\frac{\theta_k}{2}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{\theta_k}{2}\left(\sin\frac{\theta_k}{2} - i\cos\frac{\theta_k}{2}\right) \\
&= 2^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{\theta_k}{2}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{\theta_k - \pi}{2} + i\sin\frac{\theta_k - \pi}{2}\right) \\
&= 2^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{\theta_k}{2}\right)\left(\cos\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\theta_k - \pi}{2} + i\sin\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\theta_k - \pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\theta_k - \pi}{2} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) = n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2} = nx - \frac{\pi}{2}$$

だから

$$(1-\cos 2nx) - i\sin 2nx = 2^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{\theta_k}{2}\right)\left(\cos\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\theta_k-\pi}{2} + i\sin\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\theta_k-\pi}{2}\right)$$
$$= 2^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{\theta_k}{2}\right)\left(\cos\left(nx-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

虚部を比較すると

$$-\sin 2nx = 2^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{\theta_k}{2}\right)\sin\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$$

から

$$\sin 2nx = 2^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)\right)\cos nx$$

$$2\sin nx\cos nx = 2^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)\right)\cos nx$$

から

$$\boldsymbol{\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}.} \qquad \cdots\cdots⑤$$

⑤で x のところに $x+\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(nx+\dfrac{n\pi}{2}\right)}{2^{n-1}}$$

から

$$\boldsymbol{\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\sin\left(nx+\dfrac{n\pi}{2}\right)}{2^{n-1}} = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos nx}{2^{n-1}}} & n\text{ が奇数のとき} \\ \boldsymbol{\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}\sin nx}{2^{n-1}}} & n\text{ が偶数のとき} \end{cases} \qquad \cdots\cdots⑥$$

を得る。

⑤の両辺の絶対値をとると

$$\sum_{k=0}^{n-1} \log\left|\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)\right| = \log|\sin nx| - \log 2^{n-1}.$$

両辺を x で微分すると

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(x+\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{n}\right)} = \frac{n\cos nx}{\sin nx}$$

から

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cot\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) = n\cot nx$$

すなわち

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \cot\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right) = n\cot nx.} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

⑦で x のところに $x+\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\sum_{k=1}^{n} \cot\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{(k-1)\pi}{n}\right) = n\cot\left(nx+\frac{n\pi}{2}\right).$$

から

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \tan\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right) = -n\cot\left(nx+\frac{n\pi}{2}\right).} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

4.2 その他

例題 5　3 以上のの正の整数 n に対して，次の等式

$$\prod_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(1+(x^2-1)\cos^2\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{x}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^n-\left(\frac{1-x}{2}\right)^n\right) \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つことを示せ。次にこの等式を用いて，2 以上の整数 m に対して次の等式が成り立つことを示せ。

(i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}.$

(ii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m-1}=\frac{1}{2^{m-1}}.$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\tan^2\frac{k\pi}{2m}=\frac{(m-1)(2m-1)}{3}.$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\tan^2\frac{k\pi}{2m-1}=(m-1)(2m-1).$

(v) $\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\tan\frac{k\pi}{2m}=1.$

(vi) $\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\tan\frac{k\pi}{2m-1}=\sqrt{2m-1}\,.$

証明 $n=2m\ (m \geqq 2)$ のとき①の右辺は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^n-\left(\frac{1-x}{2}\right)^n\right) &= \frac{1}{x}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2m}-\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2m}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2m}x}\left(\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}x^k-\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-x)^k\right) \\
&= \frac{1}{2^{2m}x}\cdot 2\sum_{r=1}^{m}\binom{2m}{2r-1}x^{2r-1} \\
&= \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=1}^{m}\binom{2m}{2r-1}x^{2r-2}
\end{aligned}$$

と変形できるから，①は

$$\prod_{k=1}^{m-1}\left(1+(x^2-1)\cos^2\frac{k\pi}{2m}\right)=\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=1}^{m}\binom{2m}{2r-1}x^{2r-2} \qquad \cdots\cdots②$$

となる。②の両辺は x に関する $2m-2$ 次の多項式である。

$k=1,2,\ldots,m-1$ に対して $1+(x^2-1)\cos^2\dfrac{k\pi}{2m}=0$ の解は

$$x^2=1-\frac{1}{\cos^2\frac{k\pi}{2m}}=-\frac{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}{\cos^2\frac{k\pi}{2m}}=-\tan^2\frac{k\pi}{2m}$$

より $x=\pm\tan^2\dfrac{k\pi}{2m}$ となる。

よって，$\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\left(1+(x^2-1)\cos^2\frac{k\pi}{2m}\right)=0$ の解は $\pm i\tan\dfrac{k\pi}{2m}\ (k=1,2,\ldots,m-1)$ の $2m-2$ 個である。これらの解を①の右辺に代入して 0 になることを示す。

②の右辺は偶関数だから，$i\tan\dfrac{k\pi}{2m}\ (k=1,2,\ldots,m-1)$ に対して示せばよい。

$x=i\tan\dfrac{k\pi}{2m}$ のとき

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2m} &= \left(\frac{1-i\tan\frac{k\pi}{2m}}{1+i\tan\frac{k\pi}{2m}}\right)^{2m}=\left(\frac{\cos\frac{k\pi}{2m}-i\sin\frac{k\pi}{2m}}{\cos\frac{k\pi}{2m}+i\sin\frac{k\pi}{2m}}\right)^{2m} \\
&= \frac{\cos k\pi-i\sin k\pi}{\cos k\pi+i\sin k\pi}=1
\end{aligned}$$

より $x=\pm i\tan\dfrac{k\pi}{2m}$ $(k=1,2,\ldots,m-1)$ は $\dfrac{1}{x}\left(\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{2m}-\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^{2m}\right)=0$ の解である。

以上のことから，A,B を定数として

$$\prod_{k=1}^{m-1}\left(1+(x^2-1)\cos^2\frac{k\pi}{2m}\right)=A\prod_{k=1}^{m-1}\left(x-i\tan\frac{k\pi}{2m}\right)\left(x+i\tan\frac{k\pi}{2m}\right),$$

$$\frac{1}{x}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2m}-\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2m}\right)=B\prod_{k=1}^{m-1}\left(x-i\tan\frac{k\pi}{2m}\right)\left(x+i\tan\frac{k\pi}{2m}\right)$$

とかけるから，$A=B$ を示すには $\pm i\tan\dfrac{k\pi}{2m}$ $(k=1,2,\ldots,m-1)$ 以外のある x_0 に対して①の両辺の値が等しくなることを示せばよい。$x_0=1$ とすると，①の両辺はともに 1 となるから，$A=B$ となり①は成立する。

$n=2m-1$ $(m\geqq 2)$ のとき ①の右辺は

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-x}{2}\right)^{n}\right)&=\frac{1}{x}\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2m-1}-\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2m-1}\right)\\&=\frac{1}{2^{2m-1}x}\left(\sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{k}x^k-\sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{k}(-x)^k\right)\\&=\frac{1}{2^{2m-1}x}\cdot 2\sum_{r=1}^{m}\binom{2m-1}{2r-1}x^{2r-1}\\&=\frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{r=1}^{m}\binom{2m-1}{2r-1}x^{2r-2}\end{aligned}$$

と変形できるから，①は

$$\prod_{k=1}^{m-1}\left(1+(x^2-1)\cos^2\frac{k\pi}{2m-1}\right)=\frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{r=1}^{m}\binom{2m-1}{2r-1}x^{2r-2}\qquad\cdots\cdots③$$

となる。以下同様にして①が成立することを示すことができる。

②での x の最高次 x^{2m-2} の係数を比較すると

$$\prod_{k=1}^{m-1}\cos^2\frac{k\pi}{2m}=\frac{1}{2^{2m-1}}\binom{2m}{2m-1}=\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot 2m=\frac{m}{2^{2m-2}}$$

から

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m}\right)^2=\frac{m}{2^{2m-2}}.$$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m}>0$ だから

$$\boldsymbol{\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}.}$$

③での x の最高次 x^{2m-2} の係数を比較すると

$$\prod_{k=1}^{m-1}\cos^2\frac{k\pi}{2m-1}=\frac{1}{2^{2m-2}}\binom{2m-1}{2m-1}=\frac{1}{2^{2m-2}}$$

から

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m-1}\right)^2=\frac{1}{2^{2m-2}}.$$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m-1}>0$ だから

$$\boldsymbol{\prod_{k=1}^{m-1}\cos\frac{k\pi}{2m-1}=\frac{1}{2^{m-1}}.}$$

②の左辺を

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1+(x^2-1)\cos^2\frac{k\pi}{2m}\right)&=\prod_{k=1}^{m-1}\cos^2\frac{k\pi}{2m}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{k\pi}{2m}}+x^2-1\right)\\&=\prod_{k=1}^{m-1}\cos^2\frac{k\pi}{2m}\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2+\tan^2\frac{k\pi}{2m}\right)\\&=\frac{m}{2^{2m-2}}\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2+\tan^2\frac{k\pi}{2m}\right)\end{aligned}$$

と変形すると，②は

$$\frac{m}{2^{2m-2}}\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2+\tan^2\frac{k\pi}{2m}\right)=\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{r=1}^{m}\binom{2m}{2r-1}x^{2r-2}$$

すなわち

$$\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2+\tan^2\frac{k\pi}{2m}\right)=\frac{1}{2m}\sum_{r=1}^{m}\binom{2m}{2r-1}x^{2r-2}\qquad\cdots\cdots ④$$

となる。x^{2m-4} の係数を比較すると

$$\sum_{k=1}^{m-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2m} = \frac{1}{2m}\binom{2m}{2(m-1)-1} = \frac{1}{2m}\cdot\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{(m-1)(2m-1)}{3}$$

から

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{m-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2m} = \frac{(m-1)(2m-1)}{3}.}$$

③の左辺を

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1+(x^2-1)\cos^2\frac{k\pi}{2m-1}\right) &= \prod_{k=1}^{m-1}\cos^2\frac{k\pi}{2m-1}\left(\frac{1}{\cos^2\dfrac{k\pi}{2m-1}}+x^2-1\right)\\ &= \prod_{k=1}^{m-1}\cos^2\frac{k\pi}{2m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2+\tan^2\frac{k\pi}{2m-1}\right)\\ &= \frac{1}{2^{2m-2}}\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2+\tan^2\frac{k\pi}{2m-1}\right)\end{aligned}$$

と変形すると，③は

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2+\tan^2\frac{k\pi}{2m-1}\right) = \frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{r=1}^{m}\binom{2m-1}{2r-1}x^{2r-2}$$

すなわち

$$\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2+\tan^2\frac{k\pi}{2m-1}\right) = \sum_{r=1}^{m}\binom{2m-1}{2r-1}x^{2r-2} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となる。x^{2m-4} の係数を比較すると

$$\sum_{k=1}^{m-1}\tan^2\frac{k\pi}{2m-1} = \binom{2m-1}{2(m-1)-1} = \frac{(2m-1)(2m-2)}{2} = (m-1)(2m-1)$$

から

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{m-1}\tan^2\frac{k\pi}{2m-1} = (m-1)(2m-1).}$$

④で定数項を比較すると

$$\prod_{k=1}^{m-1}\tan^2\frac{k\pi}{2m} = \frac{1}{2m}\binom{2m}{1} = 1$$

から

$$\boldsymbol{\prod_{k=1}^{m-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2m} = 1.}$$

⑤で定数項を比較すると

$$\prod_{k=1}^{m-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2m-1} = \binom{2m-1}{1} = 2m-1$$

から

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1} \tan \frac{k\pi}{2m-1}\right)^2 = 2m-1.$$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1} \tan \frac{k\pi}{2m-1} > 0$ だから

$$\boldsymbol{\prod_{k=1}^{m-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2m} = \sqrt{2m-1}.} \qquad \blacksquare$$

参考文献

[1] Crux Mathematicorum https://cms.math.ca/publications/crux/

[2] Mathematical Reflections の Mathematical Reflections - Archive
https://www.awesomemath.org/mathematical-reflections/archives/

[3] IMO からの幾何学的問題 https://imogeometry.blogspot.com/p/romanian-mathematical-magazine-problem.html

[4] ARHIMEDE MATHEMATICAL JOURNAL http://amj-math.com/archive/

[5] SSMA(School Science and Mathematics Association),2019(December 2019)-2020
https://www.ssma.org/solutions-problem-section

[6] AoPSOnline
https://artofproblemsolving.com/community/c13_ contests

[7] ROMANIAN MATHEMATICAL MAGAZINE
https://www.ssmrmh.ro/
RMM - Triangle Marathon 1 - 100,201-300,301 - 400,401-500,501-600,601-700,701-800,801-900,901-1000,1001-1100,1101-1200,1201-1300,1301-1400,1401-1500,1501-1600,1601-1700,1701-1800,1801-1900,1901-2000-PART1,1901-2000-PART2,2001-2100-1-90,2001-2100-91-146

[8] EVAN Chen https://web.evanchen.cc/problems.html

[9] By Marin Chirciu-Romania,SOLVED PROBLEM

[10] Cezar Lupu,Sharpness of the Finsler-Hadwiger inequality

[11] Yu-Lin Wu,Two geometric inequalities involved twotriangles

[12]RADOSAV Z. DJORDJEVIC,SOME INEQUALITIES FOR TRIANGLE:OLD AND NEW RESULTS

[13] Stanley Rabinowitz,On The Computer Solution of Symmetric Homogeneous Triangle Inequalities

[14] D. S. Mitrinovic,Recent Advances in Geometric Inequalities

[15] Wenchang Chu,Partial Fractions and Trigonometric Identities

[16] A. Laradji・M. Mignotte・N. Tzanakis,Elementary Trigonometric Sums related to Quadratic Residues

[17] The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985-2000 Problems, Solutions, and Commentary

[18] Amir Hossein Parvardi,Geometry Problems

[19] Nguyen Viet Hung,On some triangle inequalities

[20] M.L. Glasser & Michael Milgram,On quadratic Gauss sums and variations thereof

[21] The IMO Compendium A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads:1959-2004