

不動点を求める授業

北海道岩見沢西高等学校

加藤 渾一

2005年6月4日

概要

数学セミナー（1982.2月号、1982.8月号、2002.2月号）に掲載された西山豊氏（大阪経済大学）の「不動点」の記事をなぞっただけの授業ですが、生徒の反応が大変良かったので紹介したいと思います。また、相似図形の場合について岡部恒治氏（埼玉大学）1989.4月号「エレガントな解答をもとむ」を参考に、その存在だけを確認した。

問1 移動（復習）

平面上において、図形の形や大きさを変えないで、位置だけを変える操作を移動（運動）といいます。

基本になる移動には

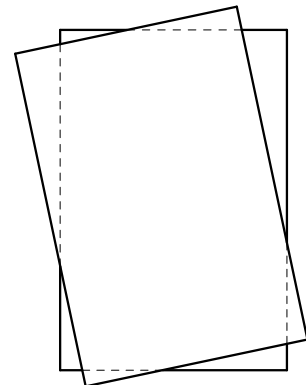
平行移動、 対称移動、 回転移動

の3つがあります。

- (1) 平行移動：平面上で、図形を一定の方向に、一定の距離だけずらして、その図形を移すこと。
- (2) 対称移動：平面上で、図形を1つの直線 l を折り目として折り返して、その図形を移すこと。
- (3) 回転移動：平面上で、図形を1つの点 O を中心として、一定の角度だけまわして、その図形を移すこと。

平行移動、対称移動、回転移動の3つを適当に組み合わせて使うと、平面上の図形はどのような位置にでも移すことができます。

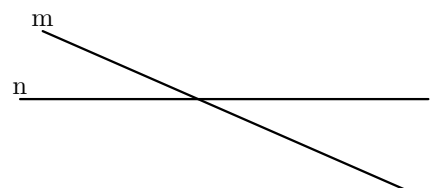
問2（説明）右の図のように、2枚の合同な長方形が重なっています。この2枚をぴたりと重ねるには上の一枚をどのように移動すればよいですか。



「ランダムドットパターン重ね合わせの提示（ついでにレギュラードットパターン、相似な長方形）・生徒には印刷した用紙（2枚組）を配布・渦の中心を指で押さえて一枚を回転すると2枚は重なること等を確認する・上の一枚を色々動かして渦の動きの変化を楽しむ」

問3（説明）右の図のような交わる2直線 m, n について、直線 m を回転移動して直線 n にぴたりと重ねるには、どこを中心として回転すればよいでしょう。

「2直線の交点を通り、作られた角の2等分線上に中心をとるとよいこと、2本あることに注意。道具を使用して確認。」

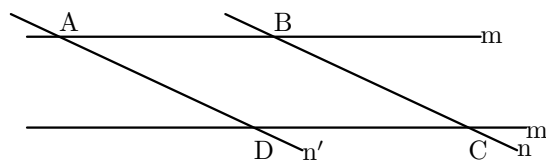


問4 (説明) 右図のように平行な2直線 m, m' に、それと幅の等しい平行な2直線 n, n' が交わっています。

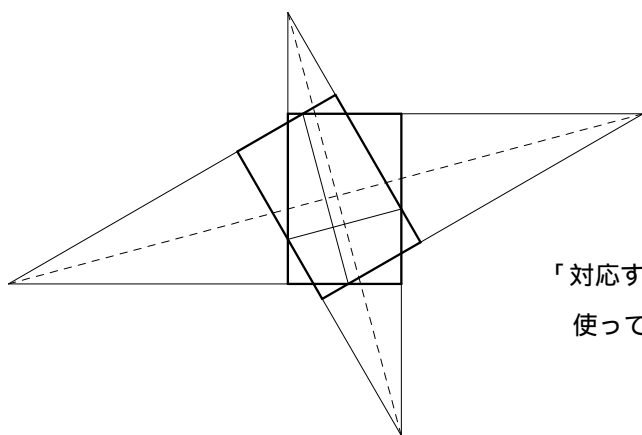
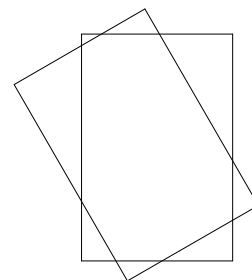
このとき、平行四辺形 $ABCD$ はひし形となります。

さて、どこを中心にして回転すると、2直線 n, n' は2直線 m, m' に重ね合わせることができますか。

「ひし形の対角線上の任意の点を中心にして回転させるとよい。これも道具を使って確認。」



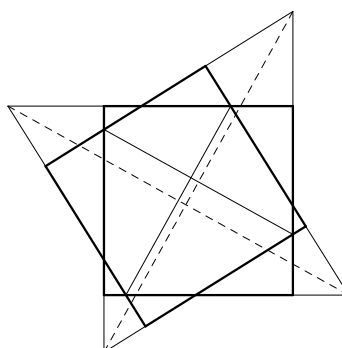
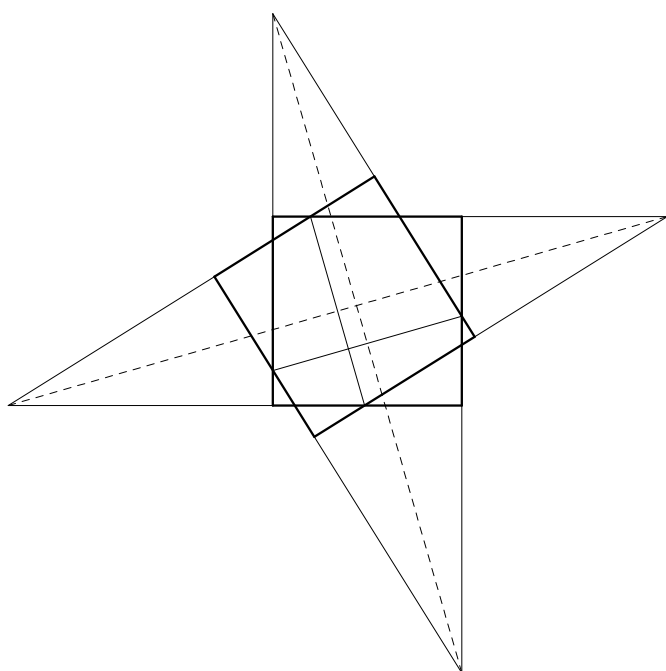
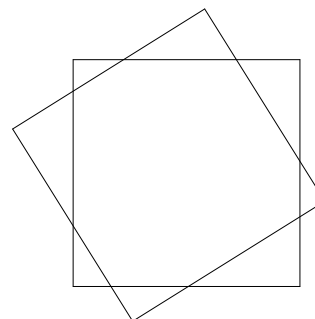
問5 (説明) 上記のことを踏まえて、1回の回転移動だけで2枚の長方形を重ねるにはどこを中心として回転すればよいか。その中心を 定規だけで作図 して求めてみましょう。このような点を 不動点 といいます。



「対応する頂点を結ぶ線分の垂直二等分線を使って求めるがこの授業ではふれなかった」

問6 (演習) 正方形には4つの不動点があることが知られています。それらを求めてみましょう。

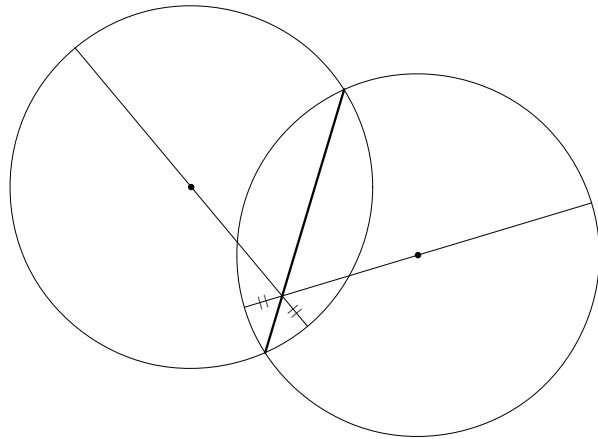
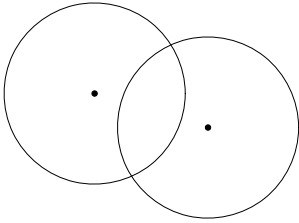
「4点が1直線上にあるらしいことを見つけた生徒がいた」



一般に、正6角形の不動点は6個、正8角形の不動点は8個、正 n 角形の不動点は n 個あることが知られています。

問7 (課題) 別紙にある合同な円の不動点を求めて下さい。

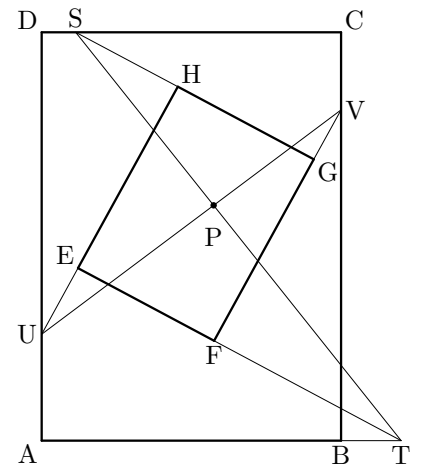
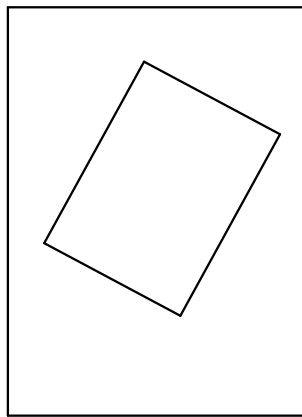
「別に切り抜いた円を配布。実際にピン等を使用して確かめさせる」



問8 (演習) ここに長方形の図とそれを同じ倍率で縮小した図が1枚ずつあります。大きい図の上に小さい図をはみ出さないようにのせるとき、必ず同じ部分が重なる点(これも不動点といいます)があります。この点を求めてみましょう。

「西高ニュースを利用した。作図方法から枠線付きの図がよい。」

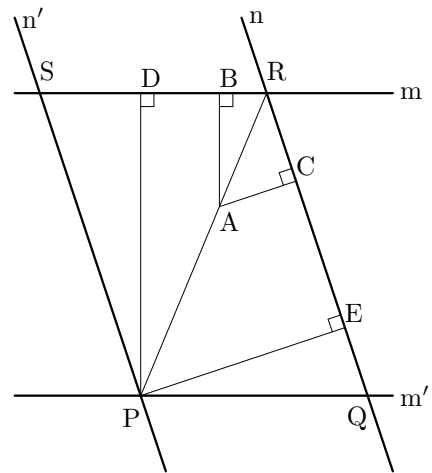
「右図で小さい図の辺を延長して対応する辺との交点を取り、4点の対角線ST, UVの交点Pが不動点」



問9 (説明) 上の作図で不動点が求められる理由を考えてみましょう。

「2本の平行線 m, m' とそれより幅の狭い2本の平行線 n, n' をとり、各点を右図のように定める。.....略..... 従って、対角線 PR 上の任意の点 A から m, n へおろした垂線の長さの比 $AC : AB$ は2組の平行線の幅の比に等しい。」

「そこで、問8の右図で、 ST 上の任意の点と DC, HG の距離の比は $BC : FG$ に等しい。同様に UV 上の任意の点と BC, FG の距離の比は $DC : HG$ に等しい。よって ST, UV の交点 P が不動点となっている。」



問10 (おまけ) 縦横の倍率を変えたランダムドットパターンの重ね合わせをみてみましょう。