折り紙でひらめく補助線の幾何

資　料

加藤　渾一 (北海道岩見沢西高等学校)

第 56 回数学教育実践研究会
2006 年 1 月 28 日 (土)
於：ニッセイＭＫビル

目　次

昭和 36 年発行 **数学Ⅰ　幾何（帝国書院）　目次**

編著者
守屋美賀雄・寺阪英孝・能代清

折り紙と数学 関連図書紹介 (私の所持している図書)

発行年順

1. GEOMETRIC EXERCISES IN PAPER FOLDING　Sundara Row　DOVER 1893
2. 折り紙と数学　堀井洋子　明治図書 1977
3. 折り紙の幾何学　伏見康治 · 伏見満枝　日本評論社 1979
4. 折り紙と数学　堀井洋子　明治図書 1983
5. 創造性の文化と科学　伏見康治編　共立出版 1989
6. ORIGAMI SCIENCE & ART $Koryo Miura (Ed.)$ 1994
7. 折り紙算数 · 折り紙数学　数教協　国土社 1994
8. 多面体の折紙　川村みゆき　日本評論社 1995
9. バラ と 折り紙 と 数学 と　川崎敏和　森北出版 1998
10. オリガミクス　芳賀和夫　日本評論社 1999
11. 折る紙の数学　渡部勝　講談社 2000
12. Origami^3 *Thomas Hull(Ed.)* 2001
13. 折紙の数学　*Robert Geretschläger*(深川英俊訳)　森北出版 2002
14. おもしろ数学（手づくり選択数学１）　小森弘三　明治図書 2002
15. すごいぞ折り紙　阿部恒　日本評論社 2003
16. ひと裁ち折り紙　山本厚生　萌文社 2004
17. 折り紙と数学のひろば　堀井洋子　日本評論社 2004
18. オリガミクス　芳賀和夫　日本評論社 2005
19. 折り紙の数理と科学　*Thomas Hull* 編　川崎敏和監訳　森北出版 2005
20. 折り紙で数学（手づくり選択数学５）　堀井洋子他　明治図書 2005

その他 ※立体について

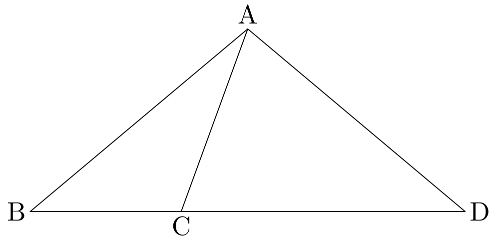
1. まんぷく BOX　布施知子　筑摩書房 1995
2. 3-D Geometric Origami　Rona Gurkewitz　DOVER 1995
3. Mathematical Origami　David Mitchell　Burlington Press 1997
4. Modular Origami Polyhedra　Lewis Simon 他　DOVER 1999
5. はじめての多面体おりがみ　川村みゆき　日本ヴォーグ社 2001
6. 折り紙で広がる化学の世界　桃谷好英　化学同人 2001
7. A Plethora of Polyhedra in Origami　John Montroll　DOVER 2002
8. ゆかいな多面体　布施知子　日本ヴォーグ社 2005

「折り返し」と「切り取り」移動 (A 氏宛の手紙より)

1. 問題の発端

次のような問題（算数オリンピック１９９３年決勝問４…だそうです）の解法について、同僚の若い先生から質問されたことから始まりました。

問　三角形 ABC があり、AB と CD の長さが等しく、$\angle \mathrm{CAB}$ が 30°、$\angle \mathrm{ABC}$ が 40° のとき、$\angle \mathrm{CDA}$ をもとめなさい。



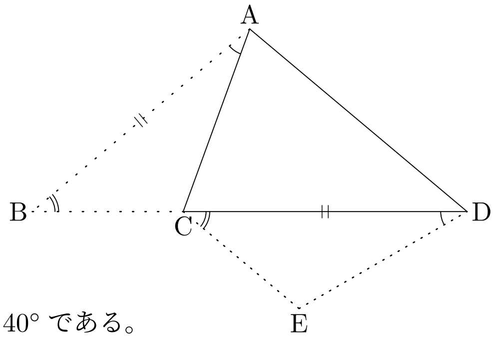
(1) 模範解答 (参照：算数オリンピック関連図書やホームページ)

三角形の内角の和は 180° であるから、$\angle \mathrm{BCA} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ,\ \angle \mathrm{DCA} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$

$AB = CD$ なので、三角形 ABC と合同な三角形 DCE を図のように考える。（要するに三角形 ABC を切り取り、AB を CD に重ねるように移動する）

すると、$AC = DE,\ \angle \mathrm{ACE} = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ = \angle \mathrm{DEC}$ となるから、四角形 $ACED$ は等脚台形であることが分かる。

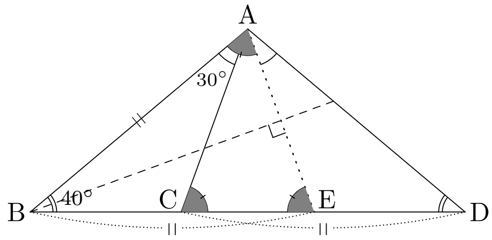
よって、$AD \parallel CE$ なので、$\angle \mathrm{CDA} = \angle \mathrm{DCE}$（錯角）$= \angle \mathrm{ABC} = 40^\circ$ である。



(2) 生徒の解

BD 上に $BA = BE$ となる点 E をとる（$\angle \mathrm{ABD}$ の２等分線を折り、点 A が BD と重なる点を E とする）。すると、$\triangle \mathrm{ABE}$ は２等辺三角形であるから、$\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{BEA} = (180^\circ - 40^\circ) \div 2 = 70^\circ$、$AB = CD$ より $BE = CD$ すなわち $BC = ED \cdots$① となる。

また、$\angle \mathrm{ACE}$ は、$\triangle \mathrm{ACB}$ の外角だから $\angle \mathrm{ACE} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$。従って、$\triangle \mathrm{ACE}$ は $AC = AE \cdots$② の２等辺三角形であり、$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{AED} \cdots$③ $= 110^\circ$ である。



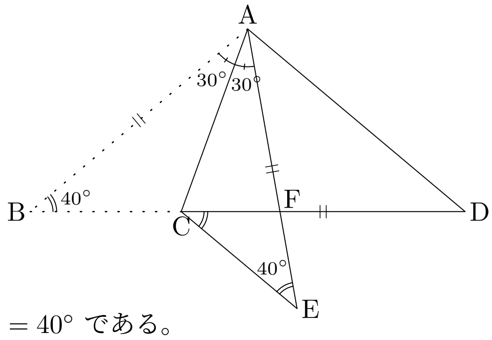
よって、①, ②, ③ より $\triangle \mathrm{ACB}$ と $\triangle \mathrm{AED}$ は合同となり、$\angle \mathrm{CDA} = \angle \mathrm{EDA} = \angle \mathrm{CBA} = 40^\circ$ である。

(3) 私の解

$\triangle \mathrm{ABC}$ を AC に関して対称移動し、合同な三角形 ACE を考える。（要するに $\triangle \mathrm{ABC}$ を AC で折り返す）

すると、$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{ACB} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ,\ \angle \mathrm{DCA} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$ より $\angle \mathrm{FCE} = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ = \angle \mathrm{FEC}$ であるから、$\triangle \mathrm{FCE}$ は $FC = FE \cdots$① の２等辺三角形である。

また、$AE = AB = CD \cdots$② なので、①, ②より $FA = FD$ となり、三角形 FAD は２等辺三角形である。



よって、$\angle \mathrm{AFD} = \angle \mathrm{EFC}$ より $\angle \mathrm{CDA} = \angle \mathrm{FAD} = (40^\circ + 40^\circ) \div 2 = 40^\circ$ である。

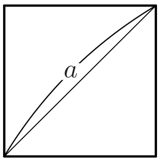
（中高校生であれば、円周角・中心角や円に内接する四角形で説明がつく）

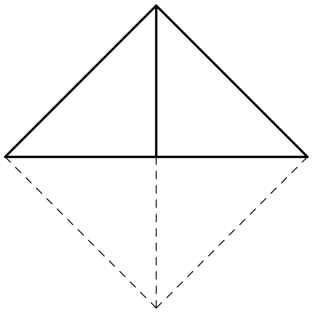
上の３つの解法に見られる補助線の手法は、直線図形の問題を考える際（小学校だけなく中・高でも）基本（少なくとも重要なヒント）となるものではないかと思うのです。（(２) のＡＥのように見えない線も含めて）

対称性を基本に小学生の場合は、正三角形、二等辺三角形等を作ること、中学生以上はこれに内心・外心そして相似形などを考慮に入れることが重要になるのだと思います。不思議なことにこれらの問題は高校の武器（正弦定理等々…）で解こうとするとかなり難しくなることが多い（面白味もなくなります）のです。**以下は問題の提示だけで証明は省略します**

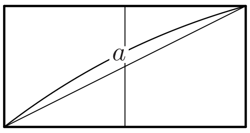
2. 「切り取り」移動で図形問題を解く＝例：その１＝

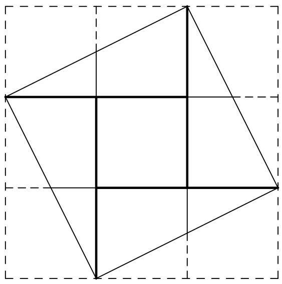
対角線の長さが与えられた矩形の面積について、電話で伺ったお話より思い浮かんだことを書いてみました。



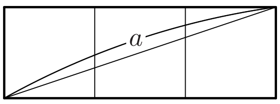


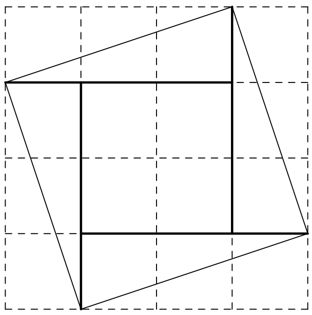
$\Longrightarrow$ 正方形の面積は $\dfrac{1}{2}a^2$



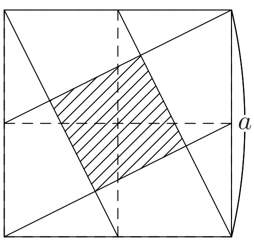


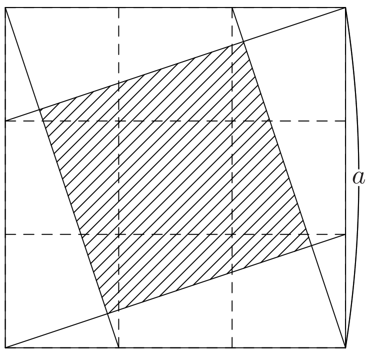
正方形１個の面積は右図より正方形５個で a^2 だから、$\dfrac{1}{5}a^2$、正方形２個で $\dfrac{2}{5}a^2$





正方形１個の面積は右図より正方形 10 個で a^2 だから、$\dfrac{1}{10}a^2$、正方形３個で $\dfrac{3}{10}a^2$

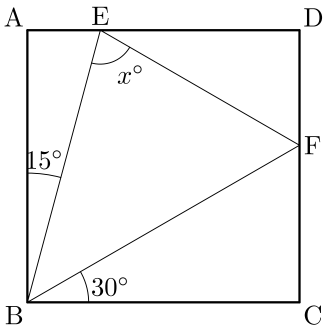


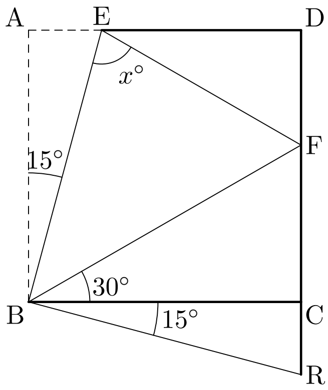


また上のことから、左図の斜線部分の正方形の面積は、それぞれ $a^2 - \dfrac{1}{5}a^2 \times 4 = \dfrac{1}{5}a^2$、$a^2 - \dfrac{1}{10}a^2 \times 6 = \dfrac{2}{5}a^2$ であること等が簡単に求まりますね。

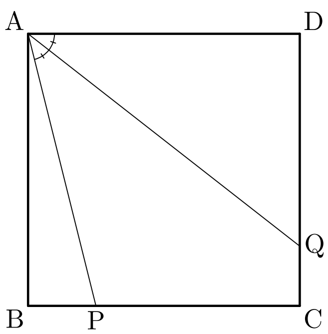
3. 「切り取り」移動で図形問題を解く＝例：その２＝

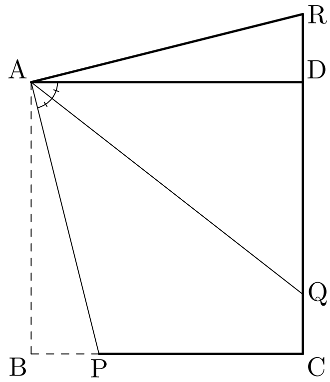
(1) 正方形ＡＢＣＤにおいて、$\angle \mathrm{ABE} = 15^\circ$, $\angle \mathrm{CBF} = 30^\circ$ のとき、$\angle \mathrm{BEF}$ は何度ですか。



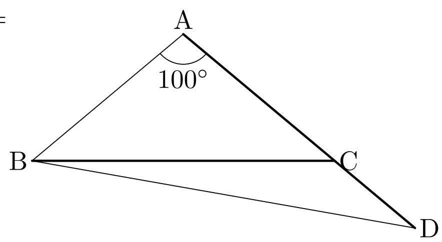


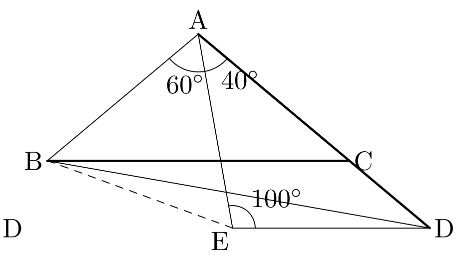
(2) 正方形ＡＢＣＤの辺ＢＣ上の任意の点をＰとし、$\angle$PADの２等分線とＣＤの交点をＱとすれば、$DQ = AP - BP$ である。



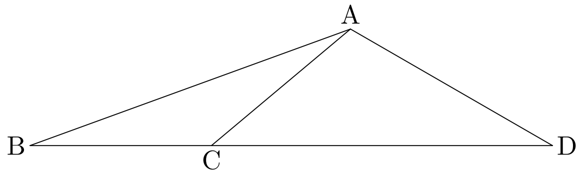


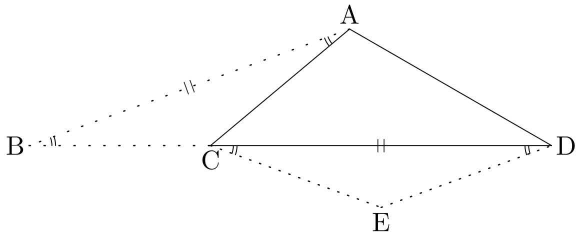
(3) $\triangle$ABCにおいて、$AB = AC$, $\angle \mathrm{A} = 100^\circ$ とし、辺 AC のＣをこえた延長上に点Ｄを $AD = BC$ にとるとき、$\angle$CBD を求めよ。



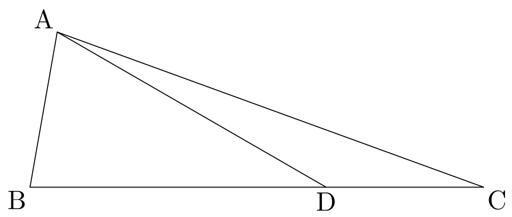


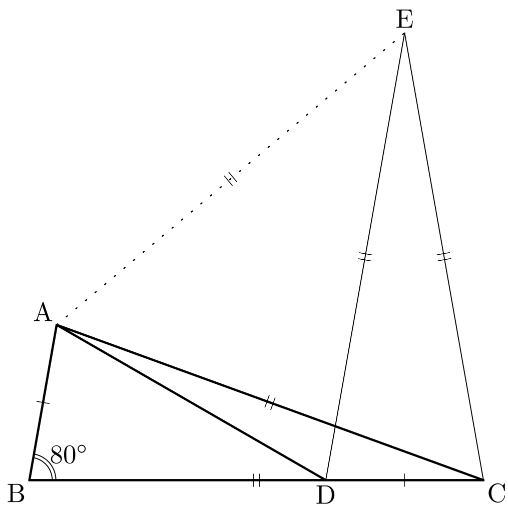
(4) 三角形 ABC があり、AB と CD の長さが等しく、$\angle\mathrm{CAB} = \angle\mathrm{ABC} = 20^\circ$ のとき、$\angle\mathrm{CDA}$ をもとめなさい。





(5) 三角形 ABC があり、AB と CD の長さが等しく、$\angle\mathrm{CAB} = 80^\circ,\ \angle\mathrm{BCA} = 20^\circ$ のとき、$\angle\mathrm{DAC}$ を求めなさい。





4. 「折り返し」で図形問題を解く＝例：その１＝

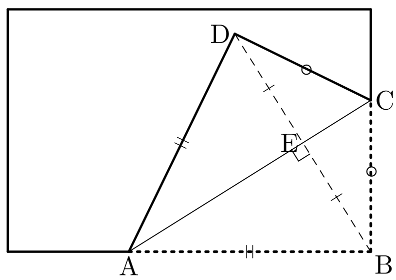
(1) 折り線と対称性

折り返し図形　長方形を右図のように折ったとき、次のことが成り立つ。

(1) $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{DAC},\ \angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{DCA}$

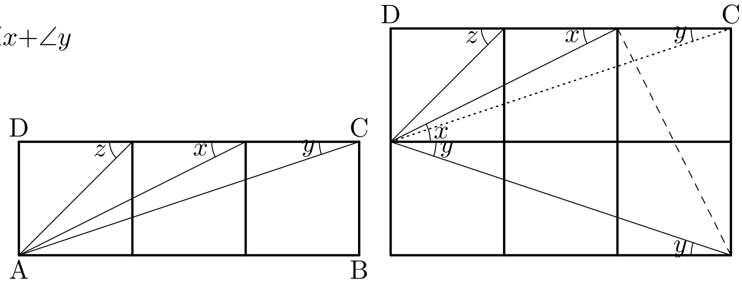
(2) $AC \perp BD,\ BE = DE$

(3) $AB = AD,\ CB = CD$



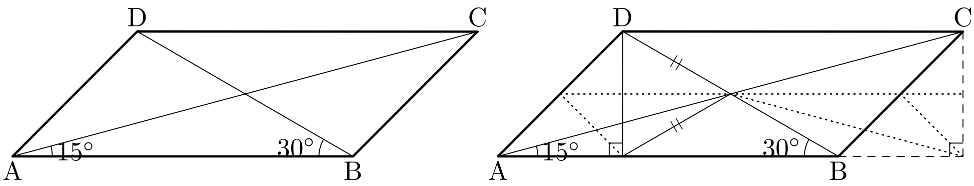
(2) 右図は正方形を３つ合わせたものです。$\angle z{=}\angle x{+}\angle y$ であることを示して下さい。

AB で折り返して考えるとよい



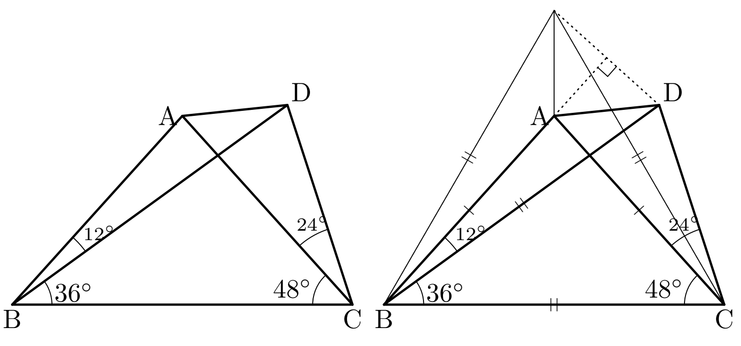
(3) 右図の平行四辺形ABCDで、∠ABD=３０度、∠BAC=１５度です。では、∠ACBは何度でしょうか？

辺 AB と DC が重なるように折り返して考えるとよい



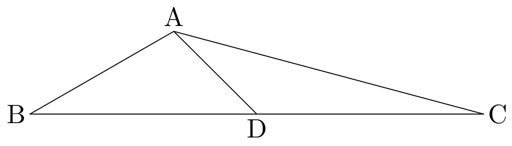
(4) 右図の ∠ADB は何度でしょうか？

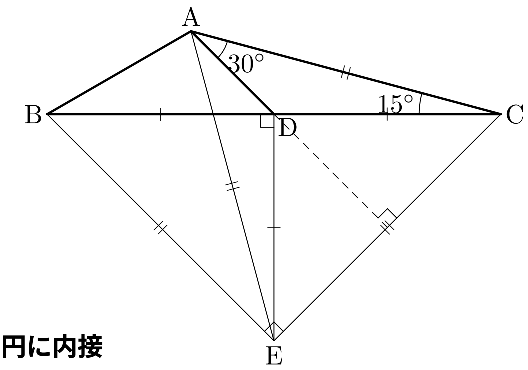
辺 AB に関して △ABD を折り返して考えるとよい



(5) 三角形 ABC があり、BD と DC の長さが等しく、$\angle \mathrm{ACD} = 15^\circ$, $\angle \mathrm{DAC} = 30^\circ$ のとき、$\angle \mathrm{CBA}$ をもとめなさい。

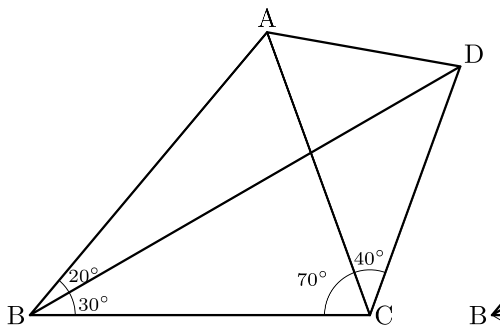
AD に関して、△ADC を折り返して考える

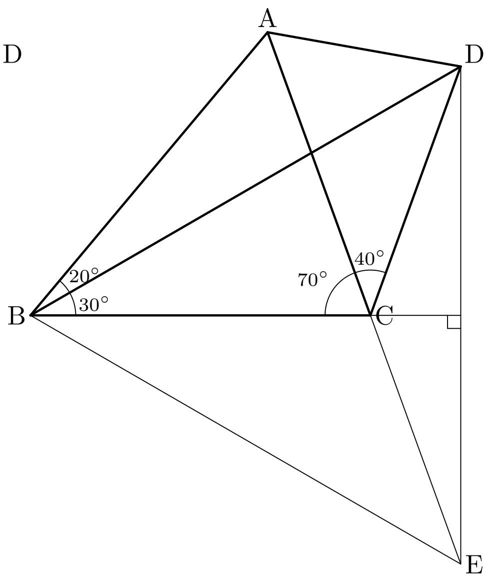




(6) 下図の $\angle \mathrm{ADB}$ は何度でしょうか？

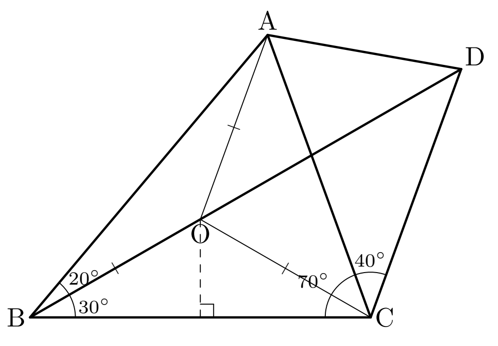
△BDC をＢＣで折り返す。四角形 ABED は円に内接

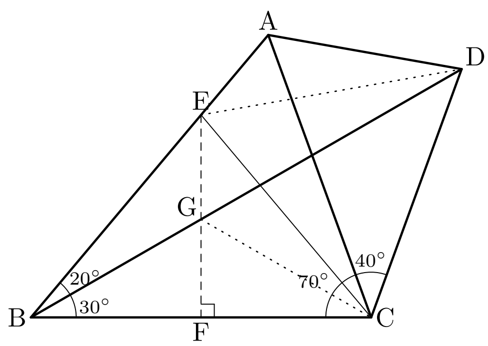




※他に巧妙な補助線の取り方として以下が考えられる。

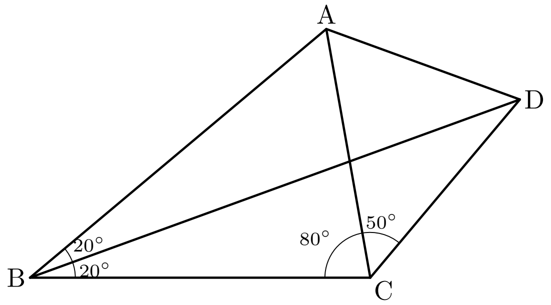
◎ＢＤ上に △ABC の外心Ｏがあることを利用する。◎ＡＢ上に △BEC が $EB = EC$ の二等辺三角形となるような点Ｅをとる。**（いずれの場合も点ＢとＣを重ねて折る）**

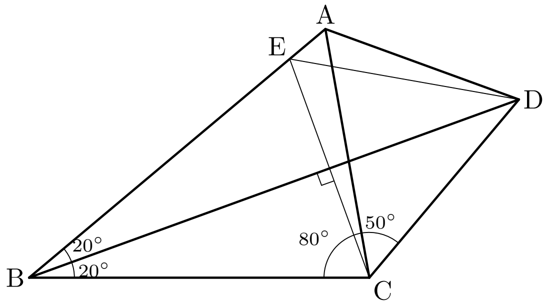




(7) 下図の ∠ADB は何度でしょうか？

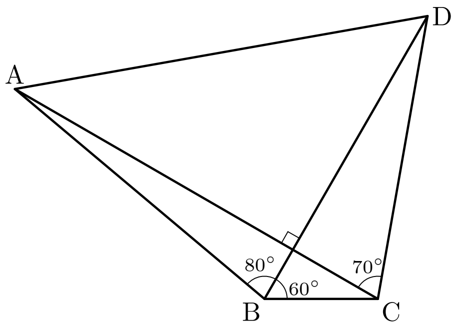
△BDC をＢＤで折り返す。四角形 AECD は円に内接

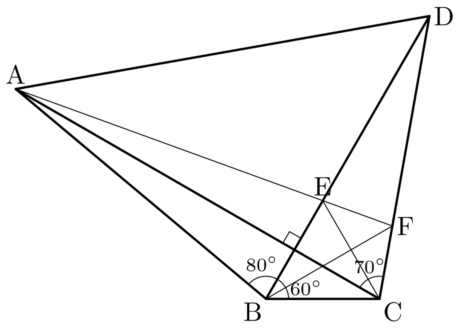




(8) 下図の ∠CAD は何度でしょうか？

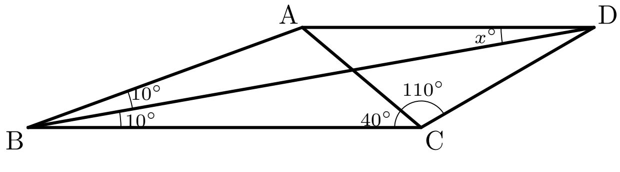
△ABC をＡＣで折り返す。四角形 ABFD は円に内接

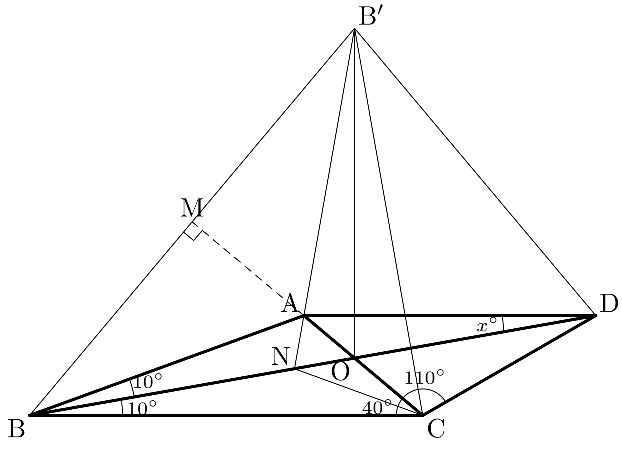




(9) 下図の ∠ADB は何度でしょうか？

△ABC をＡＣで折り返す。四角形 B′NCD は円に内接, 四角形 B′AOD は円に内接



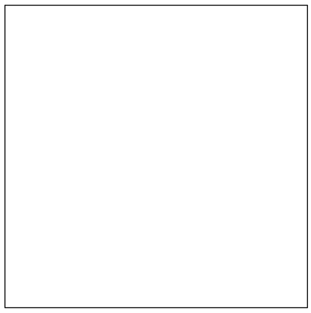


5. 面積 $\frac{1}{2}$ の図形

別件になりますが、３月末に、空港の書店で偶然入手しました本に載っていた「パズル・はんぶんにおる」をヒントに高校生に下記のように授業しました。大変評判がよく、喜んで取り組んでいました。５月の連休頃に同じような実践を東京の私立高校の先生がすでにされたことを知りました。（下記の前半部分）それによると、このパズルは２０００年に幕張で行われた数学教育国際会議で見つけられたとありますが、このパズルはかなり以前から考えられていたものなのでしょうか。(後日：A氏によると７０年代以前とのこと)

（1）折り紙の面積を半分 $\left(\frac{1}{2}\right)$ にしよう。

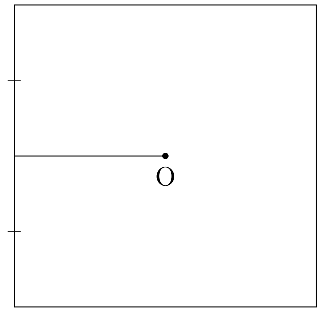
与えられた折り紙を折って面積を半分 $\left(\frac{1}{2}\right)$ にして下さい。折り方はは自由ですが、２枚以上の重なりがなく、白い裏が見えてはいけません。



（2）折り紙の正方形の対角線の交点を O とします。一つの辺の中点と O を結ぶ線に切れ目を入れます。切れ目を全部生かして面積が半分になるように折って下さい。条件は同じです。

(1) パターン (シルエット) は何種類できますか。

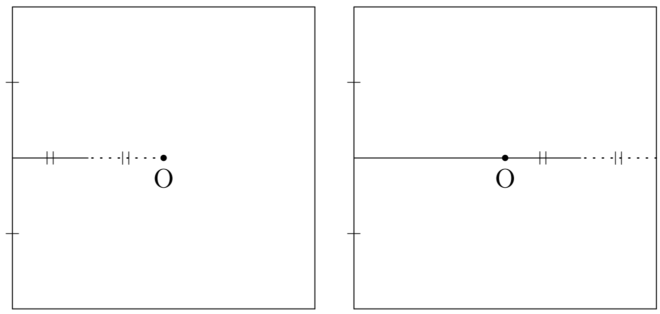
(2) できたパターンを分類しなさい。分類の基準は各自が考えること。



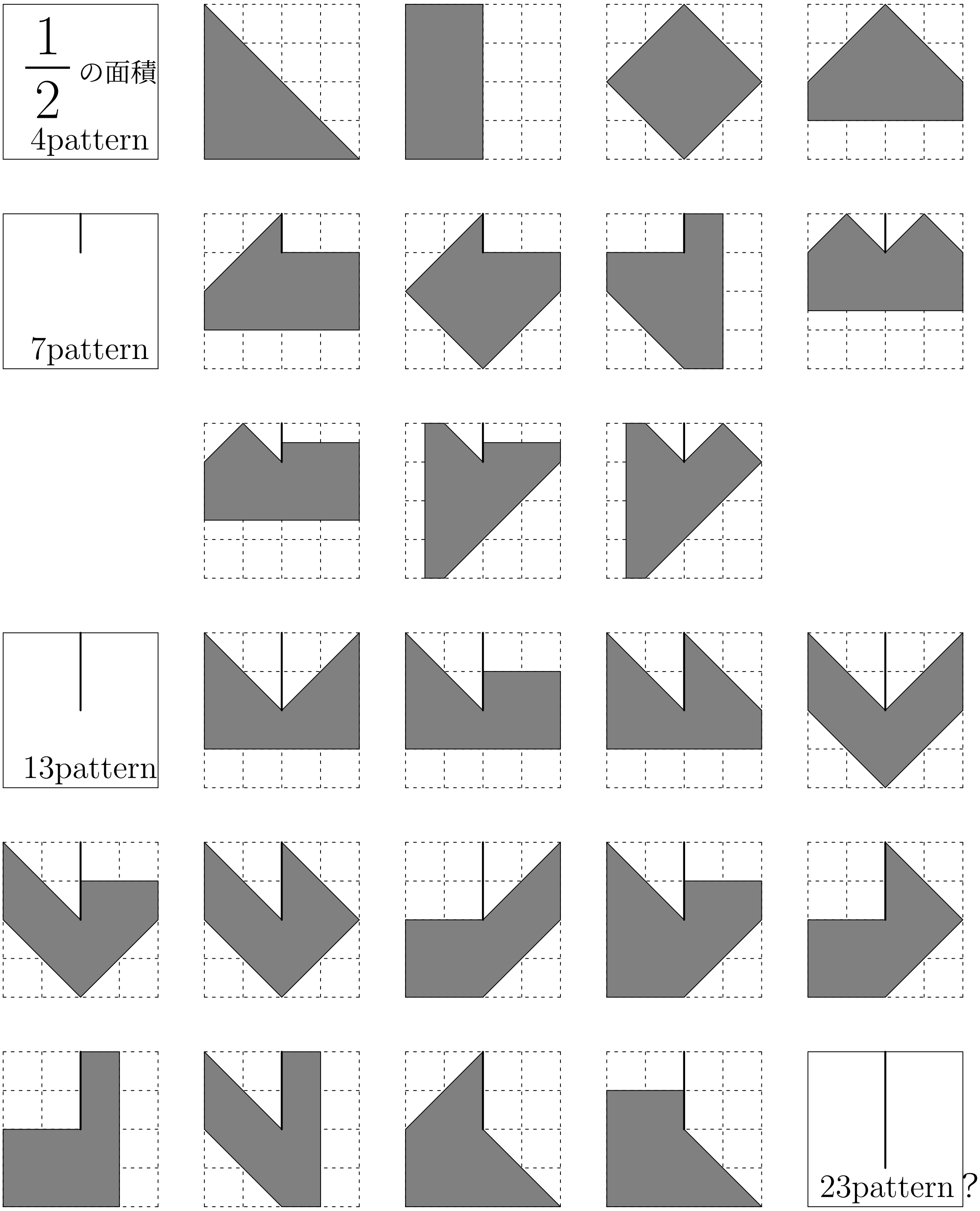
全部で１３種類ありました（東京の先生と同じ）

（3）

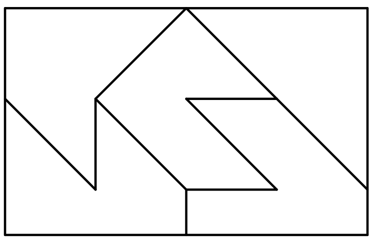
同様にして、右図のような場合についても、パターン（シルエット）は何種類できるか考えてみましょう。



それぞれ、**７種類、２３種類　ありました**



※上のパターンを２つ以上使って正方形や長方形を作ってみましょう。(下図は５個使った例)



6. 折り紙で作る正三角形から、図形の難問の構造が見えました

算数オリンピックの問題をはじめパズル本や中村義作先生の本に難問として取り上げられいるもののうち、角度問題の多数が実は以下の折り紙でつくる正三角形の構造の中に見いだすことができるということです。すると、補助線の見つけ方（この場合も「折り返し」と「切り取り」が役に立ちます）は大変簡単になります。（それが一番エレガントな解き方とは限りませんが）沢山ありますので、図示するだけにします。（先の４の（５）もそうです）これを明らかにするとパズルの面白味がなくなるのかもしれませんね。（後日：１１月にほぼ同一内容のものがインターネット上サイトに掲載されていることが分かりました。ただし、折り紙には触れていません）

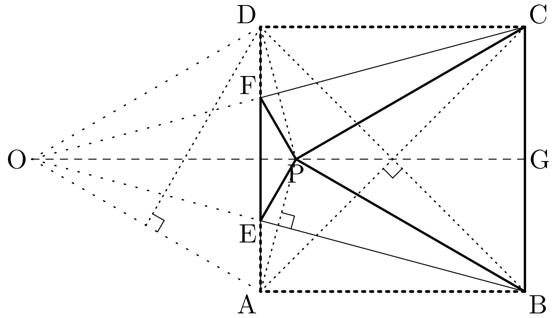
（1）正三角形を折る

(1)$\triangle$PBC, $\triangle$OAD は合同な正三角形（辺の長さは正方形 $ABCD$ の１辺に等しい）

(2)$\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{EBP} = \angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOG} = \angle\mathrm{APE} = 15°$

(3)$\angle\mathrm{CBE} = \angle\mathrm{PEB} = \angle\mathrm{BEA} = \angle\mathrm{BAP} = 75°$

(4)$AB = PB = OP = OA$



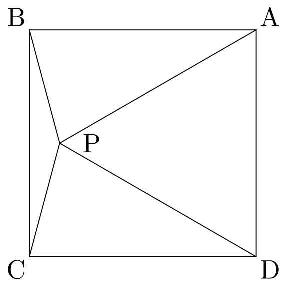
（2）問題

（イ）

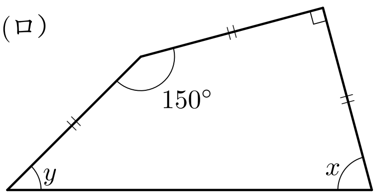
正方形ＡＢＣＤの内部に

$\angle\mathrm{PBC} = \angle\mathrm{PCB} = 15°$

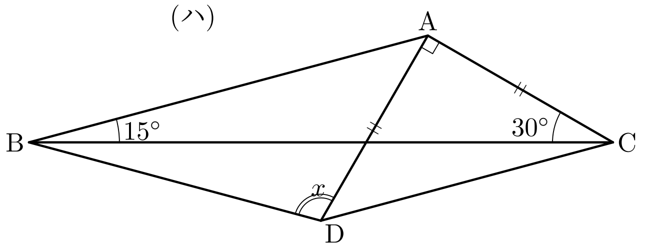
となるように点 P をとり、点 A と点 P、点 D と点 P をそれぞれ図のように結びます。すると、$\angle$APD は何度になりますか。



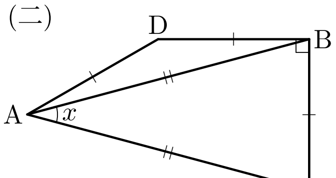
(ロ)



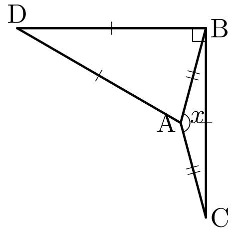
(ハ)



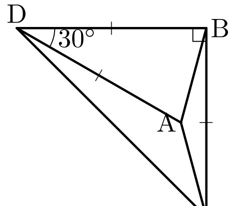
(ニ)



（ホ）

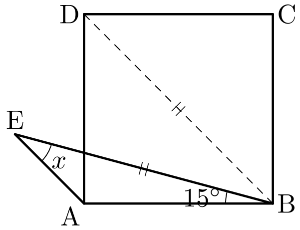


（へ）

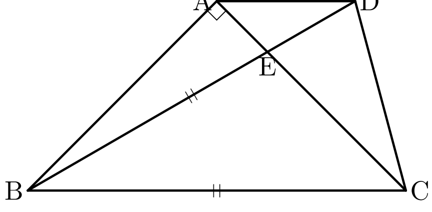


$\angle$ACB =?

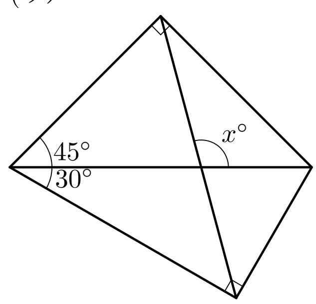
（ト）



(チ) $AD \mathbin{/\!/} BC$ のとき、$CD = CE$ を示せ



（リ）



「角度の問題」について

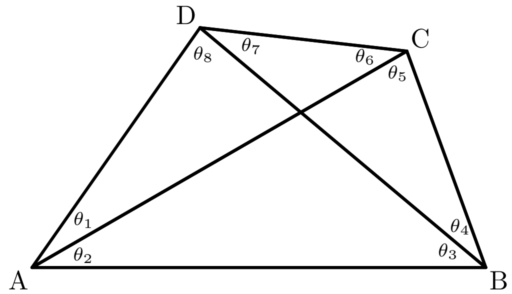
整角四角形問題、ラングレーの問題とも「フランクリンの凧」とも呼ばれている。
1922 年に Edward Langley（イギリス） が雑誌に出題したことで有名になった。
日本では　数学セミナー（1967 年６月号解答９月号：**後掲資料参照**）に出題された。

1. 数学セミナー 1984 年 8 月号「整角４角形問題」

詳しい解説　数学セミナー 1984 年 8 月号　日本のコンピュータパイオニアとも言われる 池野信一氏 による詳しい説明がある。

すべての角が 10° の整数倍となる場合について、マイコン使って調べ、総数 724 個、円に内接する場合と対称形の場合を除いて 300 個の問題 **(後掲資料参照)** を得ている。さらに、ある種の変換により、一つの問題から、別の問題が得られこの変換の道をたどってゆくと 300 個の問題が一つにつながってしまうことを示された。

$$\begin{cases} \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_8=180^\circ \\ \theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5=180^\circ \\ \theta_6+\theta_7=\theta_2+\theta_3 \\ \sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_5\sin\theta_7=\sin\theta_2\sin\theta_4\sin\theta_6\sin\theta_8 \end{cases}$$



これら４つの式を満足する整角の組合せをマイコンを使用して求めた。

さらに整角四角形では、$\dfrac{180^\circ}{n}$ を単位としてすべての角の大きさを整数値で表すことができ、$n=8$〜$n=36$ までの偶数のものについて調べ、n が 3 の倍数でなければ問題は簡単なものしかないことを示された。

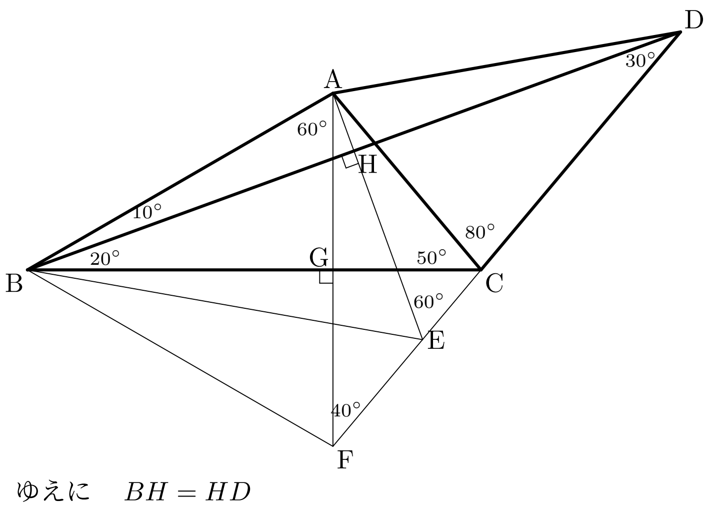
2. 岐阜聖徳学園大学紀要　2004 年　46 号

Langley の問題とその一般化問題の解法＝コンピューター利用の一方法＝　兼山瓊典氏

コンピューターを利用して、色々な補助線を引いて、解法が分かっている場合に帰着させる方法で 352 題（池野氏が除いた対称形の場合 52 題が加えられている）を解いている。

帰着させる方法を何回か行い最後に直接解けた問題になるようにプログラミングしている。

「例：整角四角形 $10^\circ,\ 20^\circ,\ 50^\circ,\ 80^\circ$ **の場合＝帰着させる問題が１題** $(ECAB=50^\circ 50^\circ 20^\circ 80^\circ)$ **だけの場合」**



点 E を DC の延長上で ∠BAE = 80°、点 F を DC の延長上で ∠BAF = 60° とする。このとき、$BD \perp AE,\ BC \perp AF$ である。

G を BC と AF の交点、H を BD と AE の交点とする。△AGC と △FCG は直角三角形であり角度の関係から、合同になる。よって、$AG=FG$ となる。従って、△ABG ≡ △FBG、ゆえに ∠FBG = 30°

また、∠ABF + ∠AEF = 180° より ABFE は同一円周上にある。よって、∠FBE = ∠FAE = 20° ゆえに、∠EBC = 10°、従って ∠EBH = 30° となる。∠EDH = 30° であるから、△EBH ≡ △EDH　ゆえに　$BH=HD$

よって、△ABH ≡ △ADH　となるから ∠ADB = 10° となる。

3. 「幾何学」モノグラフ（1988 年改訂版）

清宮俊雄氏 著

「幾何学」モノグラフ（1988 年改訂版）　第７章　増補　§40 整角四角形 でラングレー問題を中心に解説されている。

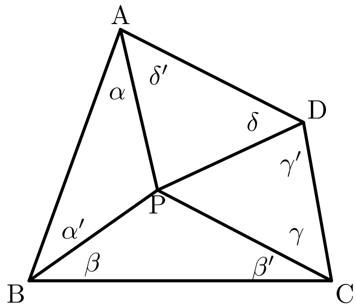
4. 第 85 回日数教大会レポート

こんなところにも数学ー「角度の問題」の汎用統一解法を紹介ー　神谷正氏　(愛知県)

図形問題「Langley の問題」を解くために開発した一つの方法、それを同じ方法で解ける問題を探したら、たくさん集まった。とうことで、１００ページ余りの膨大なレポートである。問題・解法だけでなく「角度の問題」に関する文献、WEB ページなども紹介されている。

解法の鍵は以下の２つの補題であり、さらに和積公式等の三角関数の諸公式を使う。

補題１



平面上の四角形 ABCD と点 P($\neq A,\ B,\ C,\ D$) に対し、

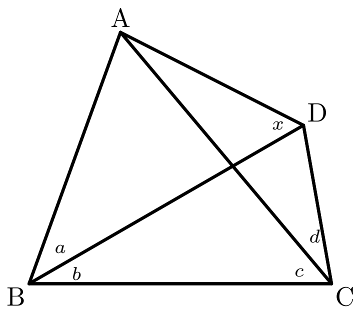
$\angle\mathrm{PAB}=\alpha,\ \angle\mathrm{PBC}=\beta,\ \angle\mathrm{PCD}=\gamma,\ \angle\mathrm{PDA}=\delta,$

$\angle\mathrm{PBA}=\alpha',\ \angle\mathrm{PCB}=\beta',\ \angle\mathrm{PDC}=\gamma',\ \angle\mathrm{PAD}=\delta',$

とすると、次の等式が成り立つ。

$$\sin\alpha sin\beta\sin\gamma\sin\delta=\sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma'\sin\delta'$$

補題１の系



平面上の凸四角形 ABCD に対し、

$\angle\mathrm{ABD}=a,\ \angle\mathrm{CBD}=b,\ \angle\mathrm{ACB}=c,\ \angle\mathrm{ACD}=d,\ \angle\mathrm{ADB}=x$

とすると、次の等式が成り立つ。

$$\sin x\sin(a+b+c)\sin b\sin d+\sin(b+c+d)\sin(x-b-c)\sin a\sin c=0$$

補題２ ＜＜三角関数の３倍角の公式、５倍角の公式＞＞

$$\sin 3\theta=\sin\theta(2\cos 2\theta+1)$$

$$\cos 3\theta=\cos\theta(2\cos 2\theta-1)$$

$$\sin 5\theta=\sin\theta\{2(\cos 4\theta+\cos 2\theta)+1\}$$

$$\cos 5\theta=\cos\theta\{2(\cos 4\theta-\cos 2\theta)+1\}$$

「例：整角四角形 $=10^\circ,30^\circ,30^\circ,20^\circ$ **の場合」**

補題１の系:$\sin x^\circ\sin 70^\circ\sin 30^\circ\sin 20^\circ+\sin 80^\circ\sin(x-60^\circ)\sin 10^\circ\sin 30^\circ=0$

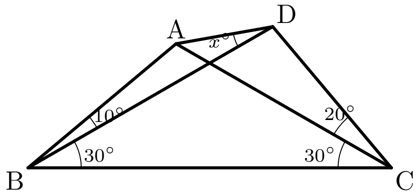
公式：$\sin x^\circ\cos 20^\circ\sin 30^\circ\sin 20^\circ+\cos 10^\circ\sin(x-60^\circ)\sin 10^\circ\sin 30^\circ=0$

$\div\sin 30^\circ$：　$\sin x^\circ\cos 20^\circ\sin 20^\circ+\cos 10^\circ\sin(x-60^\circ)\sin 10^\circ=0$

$\times 2$, ２倍角の公式；$2\sin x^\circ\cos 20^\circ\sin 20^\circ+\sin(x-60^\circ)\sin 20^\circ=0$

$\div\sin 20^\circ$：$2\sin x^\circ\cos 20^\circ+\sin(x-60^\circ)=0$

公式：　$\sin(x+20^\circ)+\sin(x-20^\circ)+\sin(x-60^\circ)=0$



$$\{\sin(x+20^\circ)+\sin(x-60^\circ)\}+\sin(x-20^\circ)=0$$

公式： $2\sin(2x-40^\circ)/2\cos(80^\circ/2)+\sin(x-20^\circ)=0$

因数分解 $(2\cos 40^\circ+1)\sin(x-20^\circ)=0$

$\div(2\cos 40^\circ+1)$ $\sin(x-20^\circ)=0$

$0^\circ<x<180^\circ$ より $x=20^\circ$

5. 数学セミナー 2001 **年 8 月号 「NOTE 」**

「ある角度の求め方 」 佐藤光二氏

四角形 ABYX において

$\angle\mathrm{XAY}=\alpha,\ \angle\mathrm{YAB}=\beta,$

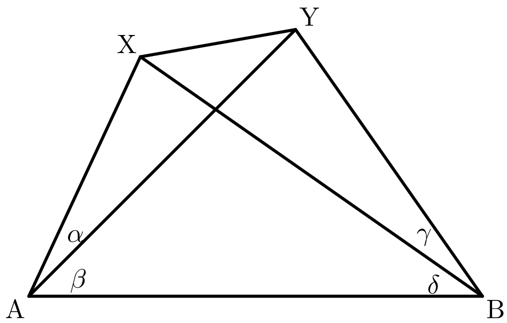
$\angle\mathrm{YBX}=\gamma,\ \angle\mathrm{XBA}=\delta$

とし、$\beta\geqq\delta$ であるとする。

このとき、$\angle\mathrm{YXB}$ の値は等式

$$\tan\theta=\frac{\cos(\gamma+2\delta)\sin\alpha-\cos(\alpha+2\beta)\sin\gamma-\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\gamma+2\delta)\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)\sin\gamma}$$

をみたす θ に δ を加えたものである。



「例：整角四角形 $=10^\circ,30^\circ,30^\circ,20^\circ$ **の場合」**

$\alpha=20^\circ,\ \beta=30^\circ,\ \delta=30^\circ,\ \gamma=10^\circ$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\text{分子} &= \cos(10^\circ+2\times30^\circ)\sin20^\circ-\cos(20+2\times30^\circ)\sin10^\circ-\sin10^\circ\\
&= \cos70^\circ\sin20^\circ-\sin80^\circ\sin10^\circ-\sin10^\circ\\
&= \sin^2 20^\circ-\sin^2 10^\circ-\sin10^\circ\\
&= \frac{1-\cos40^\circ}{2}-\frac{1-\cos20^\circ}{2}-\sin10^\circ\\
&= -\frac{1}{2}(\cos40^\circ-\cos20^\circ)-\sin10^\circ\\
&= -\frac{1}{2}(-2\sin30^\circ\sin10^\circ)-\sin10^\circ\\
&= \sin30^\circ\sin10^\circ-\sin10^\circ\\
&= -\frac{1}{2}\sin10^\circ\\
\text{分母} &= \sin(10^\circ+2\times30^\circ)\sin20^\circ-\sin(20+2\times30^\circ)\sin10^\circ\\
&= \sin70^\circ\sin20^\circ+\sin80^\circ\sin10^\circ\\
&= \cos20^\circ\sin20^\circ+\cos10^\circ\sin10^\circ\\
&= \frac{1}{2}\sin40^\circ+\frac{1}{2}\sin20^\circ\\
&= \frac{1}{2}(\sin40^\circ+\sin20^\circ)\\
&= \frac{1}{2}\cdot2\sin30^\circ\cos10^\circ\\
&= \frac{1}{2}\cos10^\circ
\end{aligned}$$

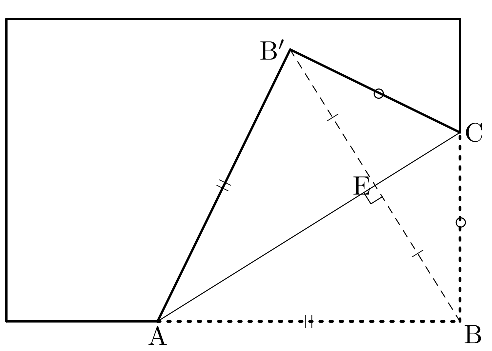
より、$\tan\theta=\dfrac{-\sin10^\circ}{\cos10^\circ}=\tan(-10^\circ)$

従って $\theta=-10^\circ$, すなわち、$x=-10^\circ+30^\circ=20^\circ$

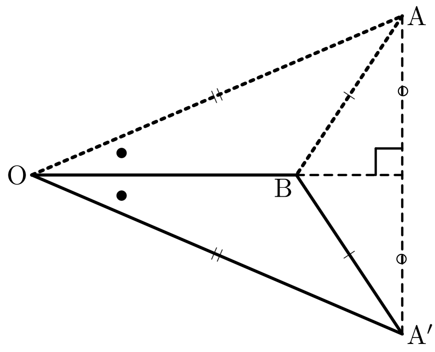
折り紙の発想で補助線感覚を養おう!

1. 折り返しで補助線

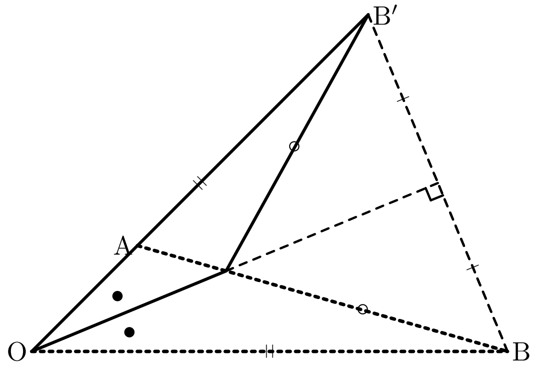
折り返し (1)



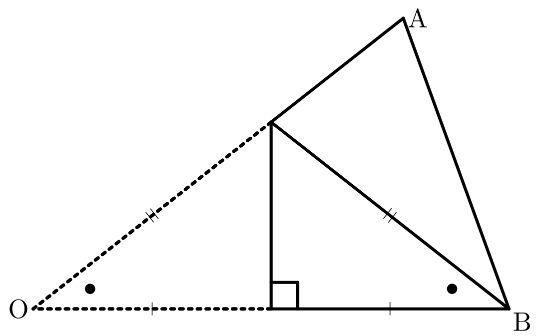
折り返し (2) △OAB を OB で折り返す



折り返し (3) ∠AOB の２等分線で折り返す



折り返し (4) OB の垂直２等分線で折り返す



2. 折り紙的発想による補助線パターンの内訳 (私の場合)

整角四角形（10 度単位・300 題）　補助線のパターン（(1)，(2) の分類を優先して数えた）

（1）辺を対称軸として折り返す　およそ５０題

（2）対角線を対称軸として折り返す　およそ１２５題

（3）辺の２等分線を折る（外心を含む）　およそ５０題

（4）角の２等分線を折る　数題（ただし、全て他のパターンで解ける）

（5）補助線不要　４８題 (４頂点のうち１つが他の３頂点でできる３角形の外心である場合)

（6）不可能　２６題（ただし、上記１〜３の折り返しで既知の問題に変換できる）

※この折り方が最適とは限らない。（もちろん万能でもない）

※４頂点のうち１つが他の３頂点でできる３角形の傍心である場合 36 題については、補助線を求めて解くことにした。

※池野氏は正三角形と２つの２等辺三角形で作られるものが 24 個あること。ラングレーの問題もその１つであることを示された。

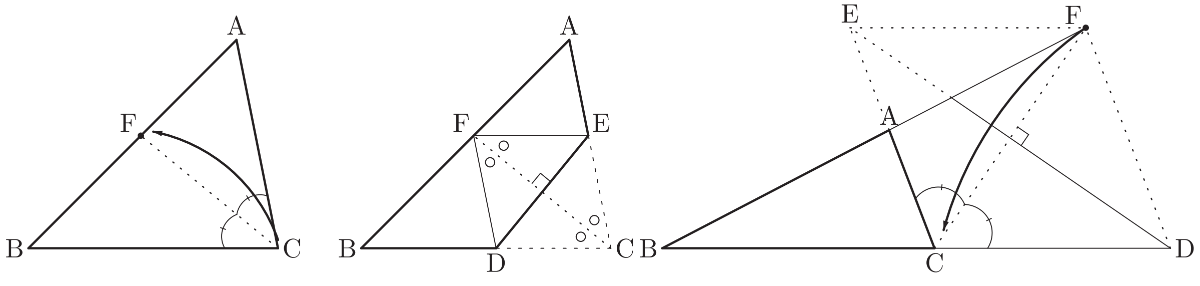
※正多角形の中にうまく対角線を引いていくと整角四角形が現れることが知られていますが、どんな整角四角形も正多角形の中に作れるかは不明だそうです。

⋆⋆⋆⋆ **初等幾何は推理小説** ⋆⋆⋆⋆

⋆⋆⋆⋆ **与えられた補助線は面白くない** ⋆⋆⋆⋆

⋆⋆⋆⋆ **「角度の問題」は左右対称なメモリのついた定規と分度器の使用を推奨** ⋆⋆⋆⋆

3. 三角形の角の二等分線と比



(a) (b) (c)

三角形 ABC の頂角 ∠C またはその外角の二等分線 AF(折り紙的証明)

2 等分線 CF を折り、次に頂点 C が点 F に重なるように折ります。[図 (a)]（外角についても同様）

すると、図 (b),(c) において、四角形 CDFE は菱形になり、$FE \parallel BC,\ FD \parallel AC$ であることが分かります。

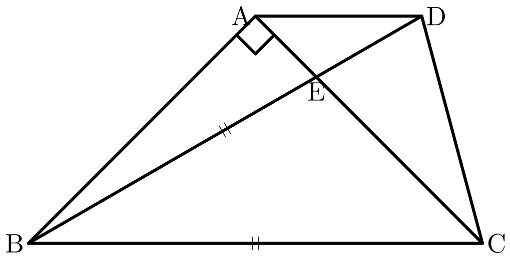
また、このことから △AFE∽△FBD∽△ABC であり、$FE = FD$ に注意すると

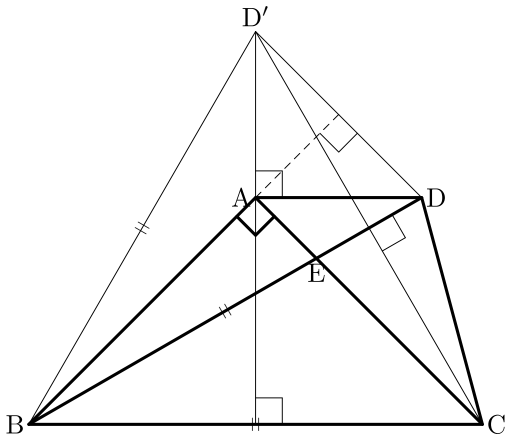
$AF : FB = FE : BD = FD : BD = AC : BC$ 　　ただし、図 (c) では $AC \neq BC$

整角四角形問題

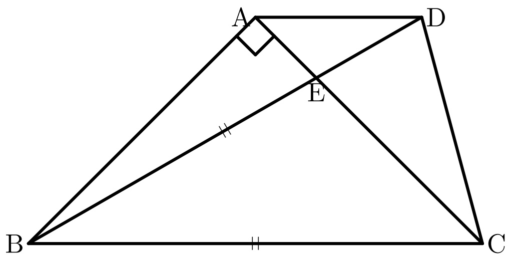
(1) $AB = AC,\ BD = BC,\ AD \parallel BC$ のとき、 $CD = CE$ を示せ。**(モノグラフ　幾何学　清宮俊雄著より)**

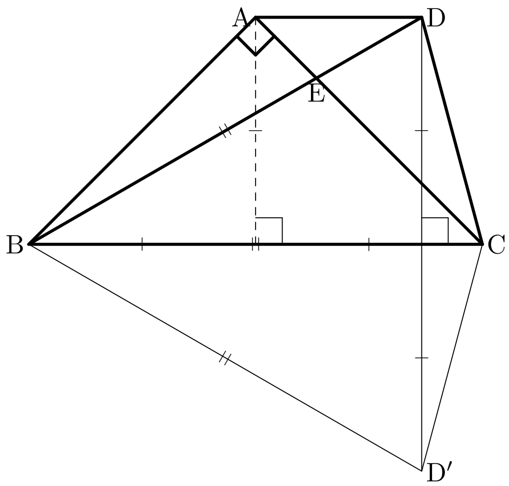
(ア) **$\triangle$ABD を AB で折り返す。$\triangle$BD$'$C は正三角形。B は $\triangle$CDD$'$ の外心**



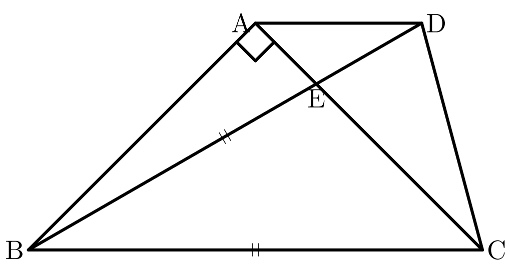


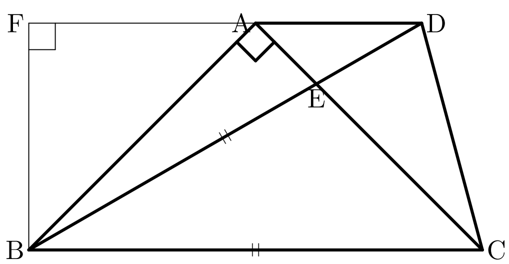
(イ) **$\triangle$BDC を BC で折り返す。$\triangle$DBD$'$ は正三角形**





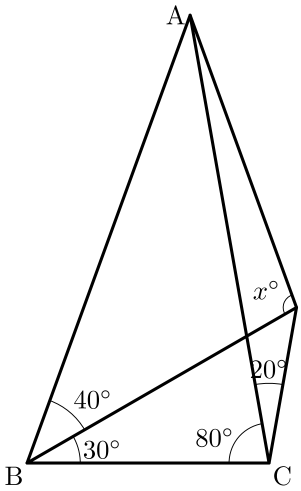
(ウ) **補助線を右図のように引く。**

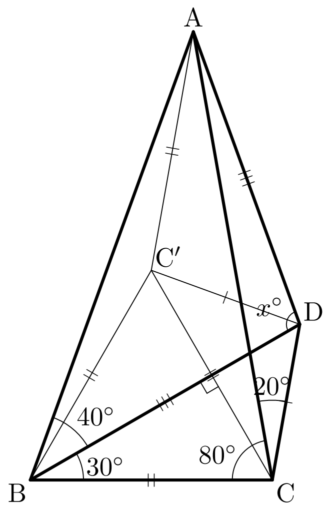




(2) 下図の ∠ADB は何度でしょうか？

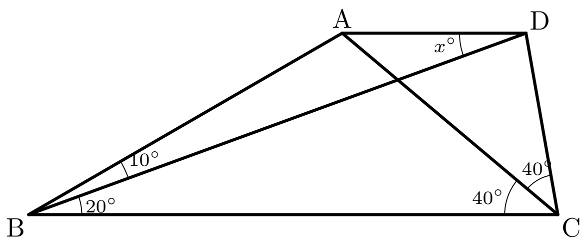
△BDC をＢＤで折り返す。△BCC′ は正三角形。C′ は △ABC の外心

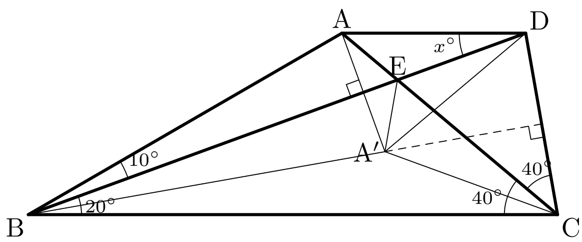




(3) 下図の ∠ADB は何度でしょうか？

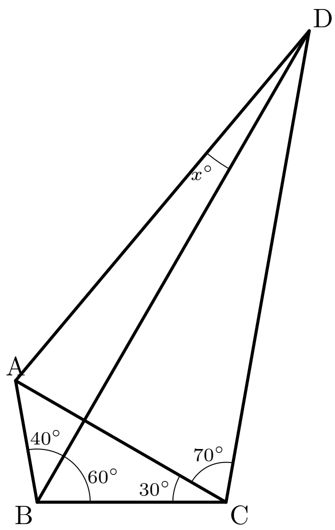
△ABD をＢＤで折り返す。A′ は △EBC の内心。△DBA′≡ △CBA′

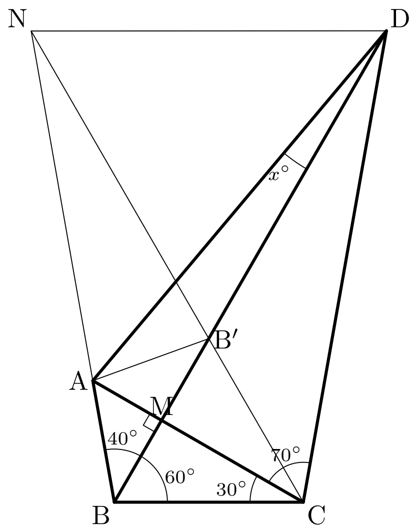




(4) 下図の ∠ADB は何度でしょうか？

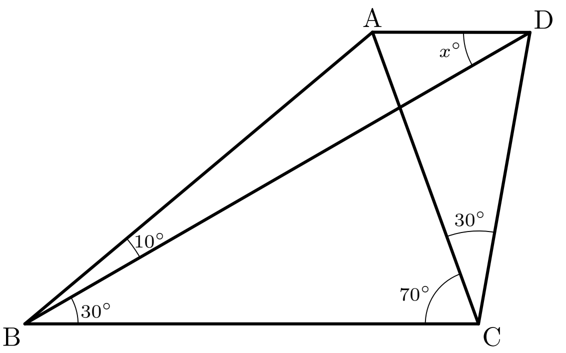
△ABC を AC で折り返す。四角形 BNDC は円に内接．N は △AB′D の外心

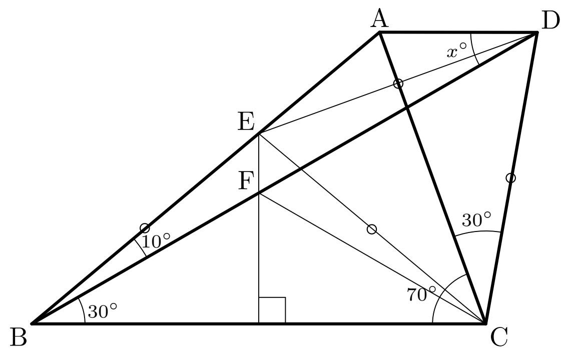




(5) 下図の ∠ADB は何度でしょうか？

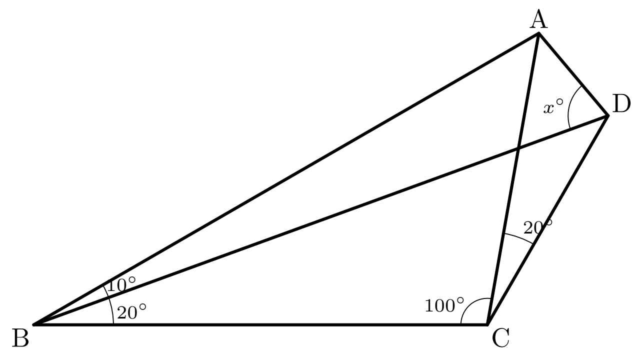
BC の垂直 2 等分線で折り返す。E は △BCD の外心。四角形 EFCD は円に内接。△CDE は正三角形。△ACE≡△ACD

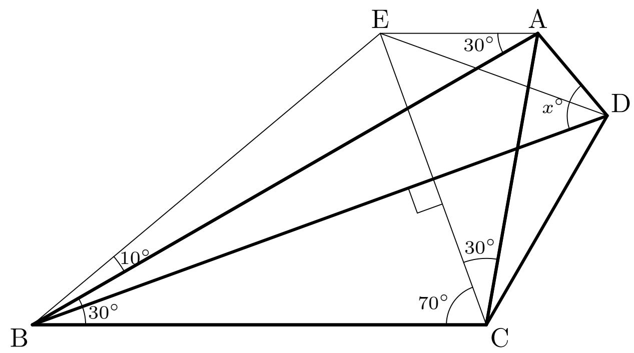




(6) 下図の ∠ADB は何度でしょうか？

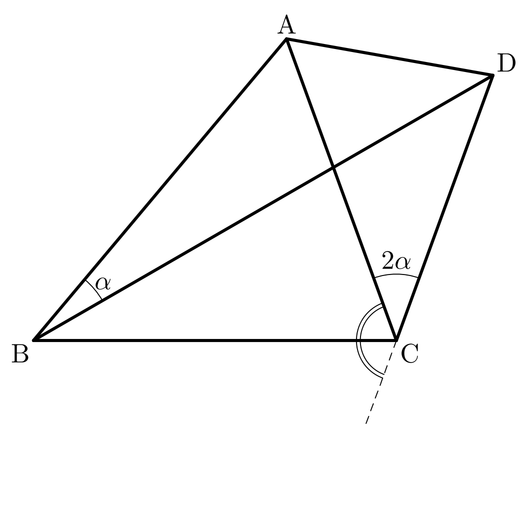
既知の問題に変換。△BCD を BD で折り返す。四角形 EBCA = $10°, 30°, 70°, 30°$ は既知の整角四角形。四角形 AECD は円に内接





(7) 下図で、∠ACD = 2∠ABD、BC は △ACD の外角の 2 等分線であるとき、B は △ACD の傍心。

これで 36 題 (300 題中) が解けます。



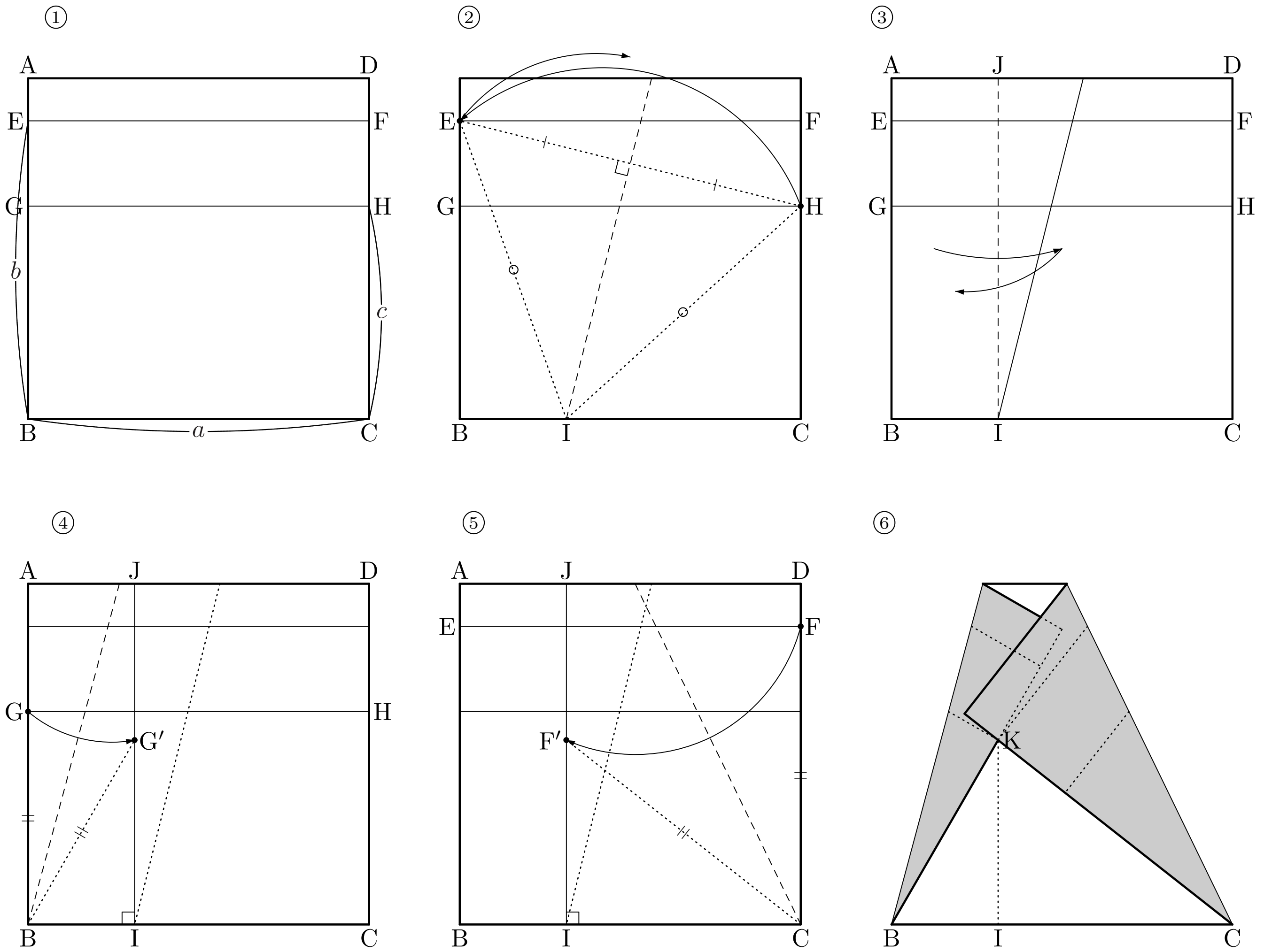
整角四角形問題（10 度単位 300 題)

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	解答		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	解答		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	解答
1	10	10	20	80	10	101	20	10	130	30	100	201	30	50	60	60	10
2	10	10	30	40	20	102	20	20	20	80	10	202	30	50	70	40	40
3	10	10	30	110	10	103	20	20	30	50	20	203	30	50	80	40	30
4	10	10	40	30	30	104	20	20	30	100	10	204	30	70	20	50	10
5	10	10	40	70	20	105	20	20	40	40	30	205	30	70	30	40	20
6	10	10	40	110	10	106	20	20	40	70	20	206	30	70	50	50	10
7	10	10	50	50	30	107	20	20	40	100	10	207	30	70	60	40	20
8	10	10	50	80	20	108	20	20	60	60	30	208	30	80	30	50	10
9	10	10	60	40	40	109	20	20	80	50	40	209	30	80	40	40	20
10	10	10	60	60	30	110	20	20	100	30	80	210	30	100	20	40	10
11	10	10	60	80	20	111	20	20	100	40	50	211	30	100	30	40	10
12	10	10	100	30	70	112	20	20	100	50	20	212	40	10	30	110	20
13	10	10	100	40	50	113	20	20	110	30	80	213	40	10	50	80	40
14	10	10	100	50	30	114	20	20	110	40	30	214	40	10	50	100	30
15	10	10	110	30	70	115	20	20	120	30	60	215	40	10	50	110	20
16	10	10	110	40	40	116	20	30	20	60	10	216	40	10	80	60	70
17	10	10	120	20	100	117	20	30	30	40	20	217	40	10	80	70	60
18	10	10	120	30	60	118	20	30	30	80	10	218	40	10	100	60	70
19	10	10	120	40	20	119	20	30	50	30	40	219	40	20	20	110	10
20	10	10	130	20	100	120	20	30	50	60	20	220	40	20	40	70	30
21	10	10	130	30	30	121	20	30	50	80	10	221	40	20	40	110	10
22	10	10	140	20	70	122	20	30	70	40	40	222	40	20	50	80	30
23	10	20	20	40	10	123	20	30	80	30	60	223	40	20	60	70	40
24	10	20	30	70	10	124	20	30	80	40	40	224	40	20	60	80	30
25	10	20	40	20	30	125	20	30	80	60	10	225	40	20	80	50	70
26	10	20	40	40	20	126	20	30	100	30	60	226	40	20	80	70	30
27	10	20	40	80	10	127	20	30	100	40	20	227	40	20	100	50	70
28	10	20	50	30	30	128	20	30	110	30	40	228	40	30	30	70	20
29	10	20	50	50	20	129	20	40	20	50	10	229	40	30	30	100	10
30	10	20	50	80	10	130	20	40	40	30	30	230	40	30	40	60	30
31	10	20	70	30	40	131	20	40	40	70	10	231	40	30	40	80	20
32	10	20	70	40	30	132	20	40	60	40	30	232	40	30	50	80	20
33	10	20	80	20	60	133	20	40	60	50	20	233	40	30	70	60	40
34	10	20	80	40	30	134	20	40	70	40	30	234	40	30	70	70	20
35	10	20	80	50	20	135	20	40	80	30	50	235	40	30	80	50	60
36	10	20	100	20	70	136	20	40	80	50	10	236	40	30	80	60	30
37	10	20	100	30	40	137	20	40	100	30	30	237	40	40	20	80	10
38	10	20	100	40	20	138	20	50	40	60	10	238	40	40	40	70	20
39	10	20	110	20	70	139	20	50	70	30	40	239	40	40	60	60	30
40	10	20	110	30	30	140	20	50	70	40	20	240	40	40	80	50	40
41	10	20	110	40	10	141	20	60	20	40	10	241	40	60	30	70	10
42	10	20	120	20	60	142	20	60	30	50	10	242	40	60	50	50	30
43	10	20	130	20	30	143	20	60	50	30	30	243	40	70	20	60	10
44	10	30	20	30	10	144	20	60	50	50	10	244	40	70	30	50	20
45	10	30	30	20	20	145	20	60	70	30	30	245	40	70	40	60	10
46	10	30	30	50	10	146	20	60	70	40	10	246	40	70	50	50	20
47	10	30	40	30	20	147	20	60	80	30	20	247	50	10	40	100	30
48	10	30	40	60	10	148	20	80	30	40	10	248	50	10	60	80	50
49	10	30	60	20	40	149	20	80	40	30	20	249	50	10	60	100	30
50	10	30	60	40	20	150	20	80	40	40	10	250	50	20	40	80	30
51	10	30	70	30	30	151	20	80	50	30	20	251	50	20	40	100	20
52	10	30	70	40	20	152	20	100	20	30	10	252	50	20	70	80	30
53	10	30	80	20	50	153	20	100	40	30	10	253	50	30	20	100	10
54	10	30	80	30	30	154	30	10	20	130	10	254	50	30	30	80	20
55	10	30	80	50	10	155	30	10	30	100	20	255	50	30	40	70	30
56	10	30	10	20	50	156	30	10	30	130	10	256	50	30	40	100	10
57	10	30	100	30	20	157	30	10	40	80	30	257	50	30	60	80	20
58	10	30	110	20	40	158	30	10	40	110	20	258	50	30	70	70	30
59	10	30	110	30	10	159	30	10	60	60	50	259	50	30	80	60	50
60	10	30	120	20	20	160	30	10	60	80	40	260	50	50	20	80	10
61	10	40	30	40	10	161	30	10	60	100	20	261	50	50	60	60	30
62	10	40	50	20	30	162	30	10	70	70	50	262	60	10	30	120	20
63	10	40	50	30	20	163	30	10	70	80	40	263	60	10	40	120	20
64	10	40	80	20	40	164	30	10	80	50	70	264	60	10	70	80	60
65	10	40	80	30	20	165	30	10	80	70	50	265	60	20	20	120	10
66	10	40	80	40	10	166	30	10	100	50	80	266	60	20	30	100	20
67	10	40	100	20	30	167	30	10	100	60	50	267	60	20	30	20	10
68	10	50	60	20	30	168	30	10	110	40	100	268	60	20	50	80	40
69	10	50	60	40	10	169	30	10	110	50	70	269	60	20	50	100	20
70	10	50	80	20	30	170	30	10	120	40	100	270	60	20	70	80	40
71	10	60	40	20	20	171	30	20	20	100	10	271	60	20	80	70	60
72	10	60	70	30	10	172	30	20	30	70	20	272	60	40	30	80	20
73	10	60	80	20	20	173	30	20	30	110	10	273	60	40	50	80	20
74	10	70	40	30	10	174	30	20	50	50	40	274	60	60	20	80	10
75	10	70	50	20	20	175	30	20	50	70	30	275	60	60	40	70	20
76	10	70	50	30	10	176	30	20	50	100	10	276	70	10	20	140	10
77	10	70	60	20	20	177	30	20	60	60	40	277	70	10	40	110	30
78	10	70	80	20	10	178	30	20	80	40	70	278	70	10	50	100	40
79	10	100	30	20	10	179	30	20	80	60	40	279	70	10	50	110	30
80	10	100	40	20	10	180	30	20	80	70	20	280	70	10	60	100	40
81	20	10	20	120	10	181	30	20	100	40	80	281	70	30	20	110	10
82	20	10	30	80	20	182	30	20	100	50	40	282	70	30	30	110	10
83	20	10	40	60	30	183	30	20	110	40	70	283	70	30	50	80	40
84	20	10	40	100	20	184	30	30	20	80	10	284	70	30	60	80	40
85	20	10	40	120	10	185	30	30	40	70	20	285	70	40	20	100	10
86	20	10	50	50	40	186	30	30	80	50	40	286	70	40	30	100	10
87	20	10	50	80	30	187	30	30	100	40	50	287	70	40	40	80	30
88	20	10	50	100	20	188	30	40	30	50	20	288	70	40	50	80	30
89	20	10	70	40	60	189	30	40	30	80	10	289	80	20	30	110	20
90	20	10	70	70	80	190	30	40	40	60	20	290	80	20	40	100	30
91	20	10	70	80	30	191	30	40	40	80	10	291	80	20	40	110	20
92	20	10	80	50	60	192	30	40	60	60	20	292	80	20	50	100	30
93	20	10	80	60	50	193	30	40	70	40	50	293	80	30	30	100	20
94	20	10	100	40	80	194	30	40	70	50	30	294	80	30	40	100	20
95	20	10	100	50	60	195	30	40	80	40	50	295	100	10	30	130	20
96	20	10	100	60	30	196	30	40	80	50	20	296	100	10	40	120	30
97	20	10	110	30	100	197	30	50	20	60	10	297	100	20	20	130	10
98	20	10	110	40	80	198	30	50	30	70	10	298	100	20	40	110	30
99	20	10	110	50	40	199	30	50	40	70	10	299	100	30	20	120	10
100	20	10	120	40	60	200	30	50	60	40	40	300	100	30	30	110	20

数学セミナー 2005 年 1 月号より

問題　一辺 a の正方形用紙で三辺が $a,\ b,\ c(>0)$ となる三角形を折って作図して下さい。
ただし、三辺は次の条件を満たします。　　　$a \geqq b \geqq c,\ \ a < b + c$
　もちろん証明も添えて下さい。

◎作図



①一辺の長さ a の正方形用紙で、与えられた条件 $a \geqq b \geqq c,\ \ a < b + c$ を満たすように、
$BE = CF = b,\ CH = BG = c$ として天・地に平行な線分 $EF,\ GH$ を折って作る。
② 2 点 $E,\ H$ を合わせて折る。（線分 EH の垂直 2 等分線を折った事になる）
この折り筋と辺 BC との交点を I とする。
③ 点 I を通り辺 AB に平行な線分 IJ を折る。
④ 点 B を軸にして点 G が線分 IJ 上にいくように折る。この IJ 上の点を G' とする。
⑤ 点 C を軸にして点 F が線分 IJ 上にいくように折る。この IJ 上の点を F' とする。
⑥ このとき、点 G'、F' は一致するので、改めて K とすると、△KBC が求める三角形である。
（従って、頂点の位置決めにおいては④, ⑤の何れか片方は不要である）

◎証明

図②において、折り方から △EIH は $IH = IE$ の 2 等辺三角形である。$\cdots$(1) また、△ICH において $IH^2 = IC^2 + c^2$、△IBE において $IE^2 = IB^2 + b^2$ が成り立つ。従って、(1) より $IH^2 = IE^2$ であるから $IC^2 + c^2 = IB^2 + b^2$ すなわち、$c^2 - IB^2 = b^2 - IC^2$ が成り立つ。$\cdots$(2)

④,⑤において、$BG = BG' = c,\ CF = CF' = b$ であるから、$IG'^2 = c^2 - IB^2,\ IF'^2 = b^2 - IC^2$ であり、(2) より、$IG'^2 = IF'^2$ すなわち $IG' = IF'$ となる。これは点のとり方から点 G'、F' が一致する（改めて K とする）ことを示している。よって⑥の △KBC は $BC = a,\ KC = b,\ KB = c$ である三角形である。

◎長方形の用紙での作図

正方形の用紙を使うという条件を外す（基本的には同一である）と次のような作図方法も考えられる。