ベクトルの外積について

北海道札幌東高等学校
定時制数学科　前田勝利

外積の定義より
$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$ の向きは
原点を中心として，$\overrightarrow{e_1}$ を $\overrightarrow{e_2}$ の方向に右ねじを回したときに進む方向である.
$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$ の大きさは
$|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_2}|\sin\theta = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
よって，
$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1} = 0,\ \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2},$
$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2} = 0,\ \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1},$
$\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3} = 0$
であるから，
$\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3),\ \overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ とすると
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = a_1b_2\overrightarrow{e_3} - a_1b_3\overrightarrow{e_2} - a_2b_1\overrightarrow{e_3} + a_2b_3\overrightarrow{e_1} + a_3b_1\overrightarrow{e_2} - a_3b_2\overrightarrow{e_1}$
$= (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{e_3}$
成分表示すると、
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

暗記法

各成分の前の項の添え字だけを考えると，

にいさんさいこういちに

問

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = (1,\ -4,\ -1),\ \overrightarrow{b} = (-2,\ 6,\ 1)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ.

解答例

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = ((-4)\cdot 1 - (-1)\cdot 6,\ (-1)\cdot(-2) - 1\cdot 1,\ 1\cdot 6 - (-4)\cdot(-2))$
$\qquad = (2,\ 1,\ -2)$
$|(2,\ 1,\ -1)| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$
よって，$\pm\dfrac{1}{3}(2,\ 1,\ -2) = \left(\pm\dfrac{2}{3},\ \pm\dfrac{1}{3},\ \mp\dfrac{2}{3}\right)$ (複号同順)