

相関係数について

北海道札幌東高等学校

定時制数学科 前田勝利

(相関係数について)

2つの変数 x, y について相関係数を考える. $\bar{x}$: 変数 x の平均, $\bar{y}$: 変数 y の平均

$$\boxed{\text{共分散}} \quad S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$
$$= \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \}$$

$$\boxed{\text{変数 } x \text{ の分散}} \quad V_x = S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$
$$= \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \}$$

$$\boxed{\text{変数 } x \text{ の標準偏差}} \quad S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \}}$$

$$\boxed{\text{変数 } y \text{ の分散}} \quad V_y = S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$
$$= \frac{1}{n} \{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2 \}$$

$$\boxed{\text{変数 } y \text{ の標準偏差}} \quad S_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{n} \{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2 \}}$$

$$\boxed{\text{相関係数}}$$
$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \}}{\sqrt{\frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2 \}} \sqrt{\frac{1}{n} \{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2 \}}}$$
$$= \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2} \sqrt{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2}}$$

$\vec{a} = (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$, $\vec{b} = (y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots, y_n - \bar{y})$ とすると,

内積の定義より $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ であるから, $r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \theta$ となる.

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より, $-1 \leq r \leq 1$