

北 数 教
第 42 回 数学教育実践研究会
兼第 8 回数実研 “ 夏季セミナー ”

教育現場における基礎研究 -

行列における零因子の構造

平成 14 年 8 月 3 日(土)
北海道小樽桜陽高等学校

北海道石狩南高等学校
数学科教諭 小栗 是徳

目 次

1. はじめに

- (1) 高校生にとっての零因子
- (2) 生徒の小研究
- (3) 高校生に向けた直観的な説明

2. 行列における零因子の構造

- (1) 基本用語, 記号
- (2) n 次元ベクトル空間
- (3) $AB = O$ となる A, B の必要十分条件は何か?
- (4) 任意の行列 A に対して, $AB = O, CA = O$ となる B, C をそれぞれ構成せよ。

3. 零因子と Caylay-Hamilton の方程式

4. 冪零行列

5. まとめ - 今後の進展 -

1. はじめに

行列における零因子とは、例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように、 $A=O$, $B=O$, $AB=O$ が成り立つとき、 A , B を零因子という。

(この『零因子』の定義は、後述の通り数学的な定義としては曖昧さがあるので、7ページの Def 8 で改めて定義することになる。)

本稿の目的は、『行列における零因子とはいかなる構造をしているか』という生徒からの質問に応えることと、線型代数学における『零因子研究』である。

(1) 高校生にとっての零因子

高校生にとって初めての零因子との出会いは、新鮮な驚きである。本校でも、かつて数学Cの授業で生徒から『行列における零因子とはいかなる構造をしているか』『どうすれば零因子が作れるのか』という質問があったばかりでなく、昨年の本校生徒の加賀谷英樹君は、以下の通りの小研究を試みた。

(2) 生徒の小研究(要旨)

冒頭のような例から、2 次の正方行列について『零因子 逆行列をもたない』ことが予想されるので、これを背理法によって証明。(必要条件)

ところが、逆に

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように、『逆行列をもたない』からといって『零因子』になるとは限らないので、十分条件についても考えた。(このとき、私の方では、行ベクトル \mathbf{a} , 列ベクトル \mathbf{b}' だけの示唆を与えた。)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{b}'_1 \quad \mathbf{b}'_2)$$

とおくとき、必要条件より、 $\mathbf{a}_1 // \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}'_1 // \mathbf{b}'_2$ であるが、必要十分条件として

$$\text{『} AB=O \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}'_j = 0 \quad \mathbf{a}_i \perp \mathbf{b}'_j \quad 1 \leq i, j \leq 2 \text{』}$$

を導いた。

さて、同君は、この2次の場合を3次に単純に拡張した。つまり

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \quad B = (\mathbf{b}'_1 \quad \mathbf{b}'_2 \quad \mathbf{b}'_3)$$

とおくとき、必要条件より

$$\mathbf{a}_i // \mathbf{a}_j, \mathbf{b}'_i // \mathbf{b}'_j \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

と、早合点してしまった。平面(2次元)と空間(3次元)とのギャップである。

(3) 高校生向けに直観的な説明

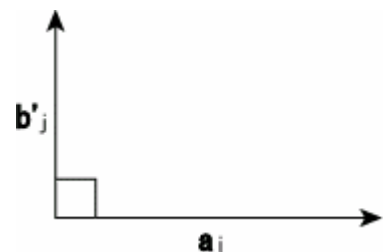
正方行列 A , B が2次または3次のいずれにしても、『零因子』については、 $AB=O$ が成立しているが、これだけでは残念ながら構造的にどうなっているのかわからない。

A, B が2次のとき

生徒の解答のとおりである。

$$\mathbf{a}_i \perp \mathbf{b}'_j \quad (1 \leq i, j \leq 2)$$

(これより、各 \mathbf{a}_i 同士、各 \mathbf{b}'_j 同士が平行)



A, B が3次のとき

CASE 1:

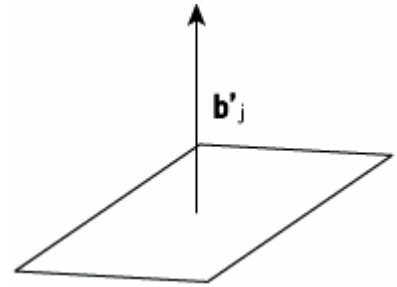
A, Bが2次のときの単純な拡張。このとき, a_i, b'_j で1つの平面 を決定している。(を3次元空間の真部分空間という。)

CASE 2:

a_i が1つの平面 を決定して, b'_j
(このとき, を $\{b'_j\}$ の直交補空間, または $\{b'_j\}$ を の直交補空間という。)

CASE 3:

上と逆に b'_j が1つの平面 を決定して, a_i (直交補空間も同様)



まとめると, 空間(3次元)では

『 が成立 a_i を含む平面 または直線 l と, b'_j を含む平面 または直線 g が, 垂直』
(このとき, 平面 , 直線 l を平面 , 直線 g の直交補空間という。)

一般に, これを n 次元に拡張すると, n 次元空間を垂直な2つの部分空間 W_1, W_2 に分割したとき, この W_1 から a_i を, W_2 から b'_j をとれば, が成立する。

以上のような直観的な説明では, 厳密性に欠ける。高校の数学Cの範囲では精確な論証はできないわけである。そこで, テーマをあくまでも零因子に限って, 線型代数学の領域に一部踏み込んだ。これによって, 4次元以上の抽象的なベクトルを導入する必要性も自然に納得できるはずである。同時に, 線型代数学の動機づけにも成り得るものとする。

2. 零因子の構造

A, B, Cは0(零行列)でないとする。まず, 次の2つのテーマについて考える。

A B = 0となるA, Bの必要十分条件は何か?
任意の行列Aを与えたとき, A B = 0, C A = 0となるB, Cをそれぞれ構成せよ。

以下, 線型代数学の中で, 必要とする定義(Def), 定理(Th), 命題(Pro)のみ確認しておく。定理(Th), 命題(Pro)の証明は, すべて標準的な線型代数学のテキスト, 例えば佐武一郎著『線型代数学』(多数出版されている中で最も参考にさせて頂いた)をご参照頂きたい。なお, 本稿に直接関係する命題(Pro)については, できるだけ証明を付けた。

(1) 基本用語, 記号

ベクトル空間(または線型空間)とは, ベクトル演算が定義できる集合をいう。ここで, ベクトル演算とは, V をベクトルの集合, $K = R$ (実数の集合)とするとき

$$V \quad a, b \quad a + b \quad V \quad V \quad a, K \quad k \quad k a \quad V$$

このとき, V をベクトル空間という。

(2) n 次元ベクトル空間について

ベクトルの成分は, すべて実数とする。

$a = (a_1, a_2)$ を2次元ベクトル, $a = (a_1, a_2, a_3)$ を3次元ベクトル, これを拡張して, 一般に $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ を n 次元ベクトルといい, V^n で表す。

n 次元ベクトル空間では, $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ を a の絶対値, $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ を a と b の内積と定義すると, $(a \cdot b)^2 \leq |a|^2 |b|^2$ より $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$ なる が定義できるので, これを a と b のなす角という。

特に $a \cdot b = 0$ のとき, a と b は垂直といい $a \perp b$ で表す。

Def1 (部分空間)

$V \supset W$ について, W も V と同じベクトル演算が定義できる集合のとき, W を V の部分空間(Sub Sp.)という。つまり, W が V の部分空間(Sub Sp.)とは, $V \supset W$ かつ

$$W \quad a, b \quad a + b \quad W \quad W \quad a, K \quad k \quad k a \quad W$$

Def2 (直交補空間) - これが零因子のキーワードとなる

$V, W: \text{Sub Sp.}$ に対して, $W^\perp = \{x \in V : x \cdot y = 0, \forall y \in W\}$ とおくと, この W^\perp も, V の Sub Sp. となるが, これを特に W の直交補空間という。

Def3 (積空間, 和空間)

$V, W_1, W_2: \text{Sub Sp.}$ とするとき,
 $W_1 \times W_2 = \{x : x \in W_1, x \in W_2\}$
 $W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$
 も, V の Sub Sp. となるが, それぞれ W_1, W_2 の積空間, 和空間という。

Def4 (1次独立, 1次従属)

$V, W: \text{Sub Sp.}$ とする。 $W = \text{span}\{a_i, 1 \leq i \leq r\}$ に対して,
 (1) $k_1 a_1 + \dots + k_r a_r = 0, k_1 = \dots = k_r = 0$ のとき, $\{a_1, \dots, a_r\}$ を, 1次独立 (indep)
 (2) (1) の否定, つまり, $K = \{k_i \in \mathbb{R} \mid 1 \leq i \leq r\}$ s.t. $k_1 a_1 + \dots + k_r a_r = 0$ が成立するとき,
 $\{a_1, \dots, a_r\}$ を, 1次従属 (dep) という。

Def5 (次元)

$V, W: \text{Sub Sp.}$ とする。 $W = \text{span}\{a_i, 1 \leq i \leq r\}$ に対して, $\{a_1, \dots, a_r\}$ が indep, かつ, $W = \text{span}\{a_1, \dots, a_r, x\}$ に対して $\{a_1, \dots, a_r, x\}$ が dep のとき, r を W の次元, $\{a_1, \dots, a_r\}$ を W の底 (base) といい,
 $\dim W = r, W = \text{span}\{a_1, \dots, a_r\}$ と表す。

Def6 (1次写像)

$V, V':$ ベクトル空間に対して, $f: V \rightarrow V'$ が 1次写像とは,
 $K = k, l \in \mathbb{R}, V = \text{span}\{x, y\}$ に対して, $f(kx + ly) = kf(x) + lf(y)$

Def7 (1次写像の像と核)

$V, V':$ ベクトル空間に対して, $f: V \rightarrow V'$ が 1次写像のとき
 $f(V) = \{f(x) \in V' : x \in V\}$ を V の f による像といい, $\text{Im } f$ で表す。
 $f^{-1}(0) = \{x \in V : f(x) = 0 \in V'\}$ を V の f による核といい, $\text{Ker } f$ で表す。

Remark $V' = \text{Im } f, \text{sub. s p.}, V = \text{Ker } f, \text{sub. s p.}$ である。

Th1 (1次写像と行列)

$V^n, V^m:$ ベクトル空間 $f: V^n \rightarrow V^m$ が 1次写像 s.t. $f(x) = Ax, x \in V^n$
 この (m, n) 行列 A は, f によって一意的 (unique)

Remark 1次写像 f と行列 A が一対一対応するので, f と A を同一視すると

$$A = (m, n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a'_1 \dots a'_n) \text{ とおくと, } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ に対して}$$

$\text{Im } f = \text{Im } A = \{Ax : x \in V^n\} = \{a_1 \dots a'_n\}, \text{Ker } f = \text{Ker } A = \{x \in V^n : Ax = 0\}$
 $V^m = \text{Im } A, \text{sub. s p.}, V^n = \text{Ker } A, \text{sub. s p.}$ である。

Th2 (1次写像と次元)

$f: V^n \rightarrow V^m$ が 1次写像, $f(x) = Ax, x \in V^n$
 $\dim f(V^n) = n - \dim(\text{Ker } f)$, つまり $\dim(\text{Im } A) = n - \dim(\text{Ker } A)$

Remark 1次写像 f によって, 次元 n が $\dim(\text{Ker } f)$ 減るので, $\dim(\text{Ker } f)$ を退化次数という。

Cor $f: V^n \rightarrow V^m$ が 1次写像, $V^n = W^s$: sub. s p.
 $\dim f(W^s) = s - \dim(\text{Ker } f|_{W^s})$

Prop1 (直交補空間と次元)

$V, W: \text{sub. s p.}$ として, $V = W + W^\perp, W \cap W^\perp = \{0\}$ が成り立つとする。
 このとき, V を W と W^\perp の直和といい, 以後 $V = W \oplus W^\perp$ で表す。

Cor $V^n \setminus \text{Ker } A = \{ x \in V^n : Ax = 0 \}$ について, $V^n = \text{Ker } A \oplus (\text{Ker } A)^\perp$

Remark ここで, $\text{Ker } A = \{ a_1 \dots a_m \}$, $(\text{Ker } A)^\perp = \{ a'_1 \dots a'_m \}$ とすれば, (3) が成立。

Th3 (行列の階数 rank)

$$A = (m, n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (a'_1 \dots a'_n) \quad \dim\{ a_1 \dots a_m \} = \dim\{ a'_1 \dots a'_n \} = \dim \text{Im } A$$

この結果定義される次元を, 行列 A の階数といい, rank A で表す。

Cor $\text{rank } A = \dim(\text{Im } A) = n - \dim(\text{Ker } A)$

(以上, 線型代数学の準備)

(3) $AB = 0$ となる A, B の必要十分条件は何か?

$A = (m, n)$, $B = (n, l)$ とする。

Prop2 $AB = 0 \iff \text{Im } B \subseteq \text{Ker } A$

pr) より 『 $AB = 0 \iff a_i \cdot b'_j = 0 \iff a_i \perp b'_j$ 』 及び Prop1 の Cor より成立。

Prop2 は, (3) の回答として明快であるが, これについて補足する。

Cor $AB = 0 \iff \text{rank } A + \text{rank } B \leq n$

pr) Prop2 により, $AB = 0 \iff \text{Im } B \subseteq \text{Ker } A \iff \dim(\text{Im } B) \leq \dim(\text{Ker } A) \iff \dim(\text{Im } B) \leq n - \text{rank } A$ [Th3 の Cor]
 $\text{rank } B \leq n - \text{rank } A$

上記の Cor は, \Leftarrow が成り立つとは限らない。そこで, 零因子を改めて定義する。

Def 8 (零因子の定義)

A が零因子とは, 0 でない A に対して $B = 0$ s.t. $AB = 0$ または $BA = 0$

このように定義して, 『 $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$ 』 を仮定すると, A に対して 『 $\text{Im } B \subseteq \text{Ker } A$ 』 つまり $B = (b'_1 \dots b'_l)$ を $\text{Ker } A = \{ a_1 \dots a_m \}$ の sub.sp. ととれば, Cor の \Leftarrow も成立。
 この結果, (3) の回答として 『 $AB = 0 \iff \text{rank } A + \text{rank } B \leq n$ 』 が得られる。

Remark $A = (1, n)$ は, 零行列を含む。1 $\text{rank}(A, B) = n - 1$ のとき, 零因子である。

(4) 任意の行列 A に対して, $AB = 0, CA = 0$ となる B, C をそれぞれ構成せよ。

$AB = 0$ となる B の構成については, (3) で明らかになった。

次に, $CA = 0$ となる C の構成については, C を (k, m) 行列とすると (3) より,

『 $CA = 0 \iff \text{rank } C + \text{rank } A \leq m$ 』 が得られる。

具体的には, Prop1 を使うと, $V^m = \text{Im } A : \text{sub.sp.}$ より, $V^m = (\text{Im } A)^\perp \oplus (\text{Im } A)^\perp$

$(\text{Im } A)^\perp = \{ x \in V^m : x \cdot a'_i = 0, 1 \leq i \leq n \}$

$= \{ {}^t x \in V^m : {}^t x A = 0 \}$

ここで, 行ベクトル: ${}^t x = (x_1 \dots x_m) \in V^m$ は V^m の sub.sp. である。よって,

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \quad c_i \in V^m$$

1 $\leq i \leq k$ の構成は, A に対して, $\{ c_1 \dots c_k \}$ を $(\text{Im } A)^\perp$ の sub.sp. ととればよい。

Prop3 (の応用例として, 北海道大学理学研究科大学院資格試験問題から)

$A, B: O$ でない n 次複素正方行列, $\text{rank } A + \text{rank } B < n$

$$X \quad O \quad \text{s.t.} \quad AX = XA = O \quad \text{かつ} \quad BX = XB = O$$

3. 零因子と Cayley-Hamilton の方程式

正方行列に限ると, 零因子の存在とその構成は, Cayley-Hamilton の方程式(以下, CHE と略称)から明快である。以下, $A = (a_{ij})$: n 次正方行列とする。

まず, 『 A が零因子 $\det A = 0$ 』は背理法によって成立。この逆が成立することを, CHE から証明すると共に, A に対して Def 8 の B を具体的には構成する。固有値については既知とし, A の固有方程式を $f_A(x) = 0$, CHE を $f_A(A) = 0$ とする。

(1) 2 次の正方行列のとき

高校の数学Cの範囲である。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと, CHE は, $\det A = 0$ より

$$f_A(A) = A^2 - (a+d)A = O \quad \{A - (a+d)E\}A = A\{A - (a+d)E\} = O$$

よって, $A \quad O$ に対して,

$$B = g(A) \equiv A - (a+d)E = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

とおけば, $B \quad O \quad BA = AB = O$ よって, A は零因子

(2) n 次の正方行列とき

まず, 最小多項式について準備する。以下, 多項式はすべてスカラー係数とする。

Def 9 (最小多項式)

$g(A) = 0$ となる A の多項式 $g(A)$ の中で, A の次数が最小かつ A の最高次の係数が1のものを A の最小多項式といい, $\mu_A(A)$ で表す。 $\mu_A(A) = 0$ である。

Prop 4 $g(A) = 0$ となる任意の多項式 $g(A)$ に対して, $g(x)$ は $\mu_A(x)$ で割り切れる。

Cor1 A の固有多項式 $f_A(x)$ は, $\mu_A(x)$ で割り切れる。

Cor2 $f_A(\quad) = 0 \quad \mu_A(\quad) = 0$

(以上最小多項式の準備)

Prop 5 A が零因子 $\det A = 0$

pr) は成立しているので, \Leftarrow について示す。

CHE は, $\det A = 0$ より

$$f_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A = O$$

$$A \{A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} E\} = A \{A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} E\} = O$$

よって, $A \quad O$ に対して, $g_1(A) = A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} E$ とおけば,

$g_1(A) \quad O$ のとき, $A g_1(A) = g_1(A) A = O$ より, A は零因子, このとき $B = g_1(A)$

$g_1(A) = O$ のとき, $f_A(x) = x(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1})$ より $f_A(0) = 0$

Prop3 の Cor2 より $\mu_A(0) = 0$, よって, Prop3 より $g_1(0) = 0 \quad a_{n-1} = 0$

次に, $g_1(A) = O$ について, $f_A(A) = O$ と同様なことを繰り返せば有限回で

$$A(A + a_1 E) = (A + a_1 E)A = O$$

を得る。ここで, $g_{n-1}(A) = A + a_1 E$ とおくと,

$g_{n-1}(A) \quad O$ のとき, $A g_{n-1}(A) = g_{n-1}(A) A = O$ より, A は零因子, $B = g_{n-1}(A)$

$g_{n-1}(A) = O$ のとき, $a_1 = 0$, このとき, $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ より $A^n = O$

よって, A は零因子, このとき $B = A^{n-1}$

4. 冪零行列

Def10 (冪零行列)

$A : n$ 次正方行列とする。 $A^m = O$ かつ $A^{m-1} \neq O$ となる A を m 冪零行列という。

冪零行列は, Def9 から零因子の特別な場合である。この冪零行列の構造について考える。

Prop 6 $A = (m, n), B = (n, 1)$ とする。 $\text{rank } A + \text{rank } B - n = \text{rank } AB$

pr) $B = (b'_1 \dots b'_n)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) &= \dim \text{Im}(AB) = \dim \text{Im}A(\mathbf{b}'_1 \dots \mathbf{b}'_n) \quad [\text{Th3}] \\ &= \dim(\mathbf{b}'_1 \dots \mathbf{b}'_n) - \dim(\text{Ker } A \cap \{\mathbf{b}'_1 \dots \mathbf{b}'_n\}) \quad [\text{Th2 の Cor}] \\ &= \dim(\mathbf{b}'_1 \dots \mathbf{b}'_n) - \dim(\text{Ker } A) \\ &= \text{rank } B - (n - \text{rank } A) \quad [\text{Th3 及びその Cor}] \\ &= \text{rank } A + \text{rank } B - n \end{aligned}$$

Prop 7 $A_1, A_2, \dots, A_m : n$ 次正方行列とする。

$$\text{rank } A_1 + \text{rank } A_2 + \dots + \text{rank } A_m - (m-1)n = \text{rank}(A_1 A_2 \dots A_m)$$

pr) Prop 6 を繰り返し使う。

Cor $A : n$ 次正方行列とする。 $A : m$ 冪零行列 $\text{rank } A = (m-1)n / m$

pr) Prop 7 で, $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$ とおく

Prop 8 (冪零行列と固有値)

A を m 冪零行列, つまり $A^m = O$ かつ $A^{m-1} \neq O$ A の固有値はすべて 0

pr) () A の任意の固有値を λ とすると, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ s.t. } A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

$$\text{よって, } A^m \mathbf{x} = A^{m-1} (A\mathbf{x}) = A^{m-1} (\lambda\mathbf{x}) = \lambda (A^{m-1} \mathbf{x})$$

$$\text{以下同様にして, } A^m \mathbf{x} = \lambda^m \mathbf{x} \text{ が成立。 } A^m = O \text{ より } \lambda^m = 0 \implies \lambda = 0$$

(\Leftarrow) A の固有方程式 $f_A(\lambda) = 0$ の n 個の解 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ について,

$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ よって, A の n 次方程式 $f_A(\lambda) = 0$ の解と係数の関係より, 各係数 $a_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ $A^n = O$

よって, $\mathbf{m} \times \mathbf{n} \text{ s.t. } A^m = O \text{ かつ } A^{m-1} \neq O$

Cor1 A が m 冪零行列 $CHE f_A(A) = 0$ における各係数 $a_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$

Cor2 A が m 冪零行列 $\text{rank } A = (m-1)n / m$

Remark この Cor2 の結果, m 冪零行列 A の構造は, $m \times n$ なる m について調べればよい。

理論上は Cor1 によるが, Prop 7 の Cor が有力な手掛かりとなる。

Prop 9 (2 次 の 冪 行 列)

$$A^2 = O, A \neq O \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{ただし, } a^2 + bc = 0$$

pr) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ とおくと, CHE で $\det A = 0$ 及び $A^2 = O$ より, $(a+d)A = O$

$$a+d=0 \implies d=-a \text{ よって, 成立。}$$

Cor $(A - E)^k = O, k \geq 2 \implies A = E \text{ または } E + A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

Prop 10 (3 次 の 冪 行 列)

$$A^3 = O, A \neq O$$

$$A = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ la & lb & lc \\ ma & mb & mc \end{pmatrix}$$

かつ, $a = (a \ b \ c)$ $k = (k \ l \ m)$ とおくと, $a \cdot k = 0$, $a \neq 0$, $k \neq 0$

$$A^3 = 0, A^2 \neq 0$$

$A = (a_{ij}) = (a'_1, a'_2, a'_3)$ ここで, a'_1, a'_2, a'_3 は, dep かつ, $a_1 = a_2 = 0$

3

$$a_1 \ \text{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \ a_2 \equiv \sum_{i < j} \det \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

pr) (\Leftarrow) については, は直接代入し, は, C H E に代入して成立。

() については, Prop 7 の Cor を使うと

は, rank A $\geq 3/2$ より, rank A = 1 によって, 成立

は, rank A ≥ 2 より, rank A = 2 によって, 成立

下記の具体的な構成例は, は rank A = 1 を, は rank A = 2 を, 手掛かりとした。

$$\text{の例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{の例: } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ 又は } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5, まとめ - 今後の進展 -

(1) 初めは, 生徒の質問に応えるための『零因子』であったが, 2 次の方行列では収まらず, 予想以上に線型代数学の領域に入り込んでしまった。いずれも, 大学で履修したはずであるが, 本当にわかっていないことを痛感しながらの研究であった。例えば,

Prop 8 の pr) は, 『Frobenius の定理』から導いていたところが, 同僚の南俊明教諭から助言を頂き, その順序が覆った。つまり, Prop 8 の pr) の通り, A^p の固有値は p であるので, その Cor として『Frobenius の定理』が逆にすぐ導かれる。

ともあれ, のテーマを中心として, 『零因子』の特別な場合として, C H E からの構成, 冪零行列まで具体的な構成ができたことは一つの収穫であった。『Jordan の標準形』に発展する『冪零行列の標準形』については, 次の課題としたい。

(2) 線型代数学は, 1 世紀半前に完成されたという。その中で, 『零因子』は特殊な存在で, その定義すら曖昧に扱われ, あまりとりあげられてはいないのが残念である。研究的に易しすぎるということだろうが, 教育的には, 生徒が興味を持つように, 十分その価値を持っている。1 つの指導法として, 『零因子』を生徒に具体的に構成させる中でベクトルの内積を導入する方法も考えられる。また, 線型代数学そのものについても, 殆どのテキストが行列式から導入しているが, 本稿のように『零因子』から導入し, 先にベクトル空間を学び, 行列式を後回しにすることも考えられる。教育的には, まだまだ未開発の分野で, 大いに開発の余地を残していると思う。

(3) 現場からの基礎研究, という立場で最近の私は発信している。生徒からの質問, 疑問は今回の『零因子』に限らず多種多様であるが, これに明快に答えていくためには, 基礎研究は必要不可欠であると考えからである。生徒と共に学ぶ教師でありたいと思う。