

集合と命題の壁

有朋高校単位制課程 大谷 健介

0 はじめに

昨年度からスタートした新学習指導要領は、データの分析のこと、課題学習のこと、整数の性質のこと、数学Cがなくなること等々、さまざまな分野に注目されていますが、実際に取り組んでみてここが問題…という課題が出てきています。それは、集合と命題が数学Aから数学Iに移ったことです。

有朋単位制では、苦手な教科の科目は必修科目を履修さえすれば卒業要件を満たします。したがって、数学がとても苦手な生徒は「数学I基礎」の講座2単位を2講座履修すれば、必修修がクリアされることになり、ほかの科目を履修する義務がありません。そうした数学超苦手の生徒は集合と命題を教わることなく高校生活を送っていたので特段問題はなかったのですが、今回の改訂によりすべての生徒が集合と命題…とりわけ命題についての学習をしなければならなくなったわけです。実は昨年度は、夏休みと進度の関係からさらっと…本当にさらっとしか扱わなかったのですが、今年度は少ししっかりと取り組んでみようと思い実践してみました。

この分野の指導の在り方、ぜひ、いろいろな先生方の実践例を教えてくださいたいものです。

1 集合と命題での目標

集合では、記号の理解が最も大切ですのでそのことが中心です。あまり複雑な問題には取り組まず、せいぜい $\overline{A \cap B}$ や $\overline{A \cup B}$ くらいまでで、それ以上は扱いません。また、集合の要素の個数は、教科書で取り扱われていないためまったく触れないことになっています…ここは残念。

一方、命題のところは以下のようなものです。

- ① 命題の真偽が判断できる
- ② 逆・対偶が言えて、その真偽が判断できる
- ③ 必要条件と十分条件が（だいたいなんとなく）理解できる

取り扱う問題も複雑なものは避けて、同じようなパターンを繰り返し練習するように留意しました。

2 授業にて

- ① 命題の真偽については、ベン図を使つての表現です。教科書には2つのパターンで載っていましたが、今回は左の方の $A \cap \overline{B} = \emptyset$ のベン図を使いました。反例を表現しやすいことが理由です。これについては効果が上がったかどうかはよくわかりません。



② 次に命題の記号化への手順です

「8の倍数は偶数である」 → この命題は真です

↓
↓ ————— このことを仰々しく書くと

「nが8ならば nは偶数である」と表現されます

↓
↓ ————— で、これを記号にすると

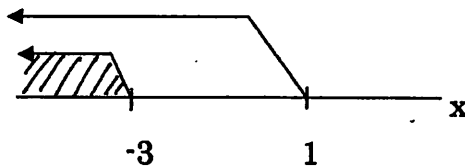
「 $n=8 \implies n : \text{偶数}$ 」と示されます

こんな感じでありおもしろくありません。しかし、これが実生活に近い内容を例示したとして、数学としての実感がわからない…。だから、こういう簡単な命題をだしてやるべきであるとするわけですね。

③ 不等式の真偽のパターン化

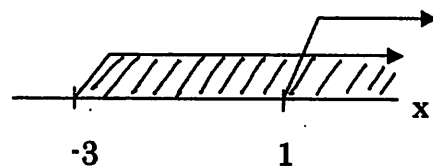
これはわかってくれるかと思ったのですが… 定着は今一歩です

(例) $x < -3 \implies x < 1$



(全部覆っているのでこの命題は真)

$x > -3 \implies x > 1$



(はずれている部分があるので偽)

④ 必要条件と十分条件

卒業要件に見立てて考えてみます ← 一応導入です

修得単位	2単位	4単位	...	72単位	74単位	76単位	78単位	...	100単位	...
卒業するために	必要				必要十分	十分				

その結果…

① 「74単位修得する ⇔ 卒業する」これはピンとくるようです

② 「80単位修得すれば、卒業するには十分な単位数」これもピンとくるようです。

③ 「卒業する ⇒ 2単位修得する」これはなかなか理解しがたいのですが、

卒業するには2単位とることも必要だし、4単位とることも必要だし… というと実感としてわかってくるようです。目標達成までの道のりという点で…

じゃあ、このことがわかれば教科書や傍用問題集の「必要条件であるが十分条件ではない」という問題が理解できるかというそれは別の話です。

ただ、社会では必要条件と十分条件はこんな意味で使われているはずなので、ひとつの例として示してみました。

以下、学習内容は別紙のプリントを参照されてください。

3 実践してみたの感想

なんというか、この単元は本当に生徒の授業へ向かう姿勢が低く残念な思いをします。授業に参加しているであろう生徒は多く見積もっても6割程度です。厳しい状況です。

当然、授業をしている先生に問題があるし、取り扱っている内容が良くないこともたぶん問題です…。しかし、それにしても…と思って中学校の教科書を調べてこの手の内容をどこで取り扱っているか調べてみました。

「〇〇ならば◎◎」という“仮定と結論”の表現は、中学2年生で「合同な図形」の「証明のすすめ方」のセクションで初めて出てきます。そこでは「 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ならば $\angle C = \angle F$ 」といった例が挙げられております。さらに、「証明の根拠となることがら」から証明の例示へと進んでいきます。

少し合点がきました。ここは言うなれば中学数学最大の難関ではありませんか。それは基本「数学は嫌い」「数学は苦手」の生徒たちのトラウマ要因の一つではないかと…「ここは聞いてもわからないだろう」という思考阻害が働いているような気がしました。

もちろん、指導側のがんばりのたりなさ、生徒の状況認識の甘さを反省の上で…です。

4 これからの課題

毎年、授業をしたあとにこういう気持ちにはなりたくないの、何とかしたいところです。そこで…

- ① 中学校の学習のつながりを意識して、「〇〇ならば◎◎」がもう少しわかるようになりたいよね、という学習意欲の喚起 ← 理想
- ② 「これは数学」という意識付けのための工夫 た例えば真偽を調べるのに計算が必要、とか
- ③ 他の単元と同じような授業のメリハリ…

自分の中で授業の流れをうまくつかんでいないと思う

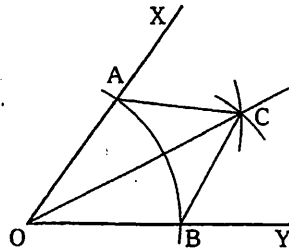
- ④ もっと教材の工夫 生徒が興味を持つような……むずかしい…

といったようなことをやっていかないとなりません。

証明のすすめ方

仮定と結論

右の図は、 $\angle XOY$ の二等分線 OC を作図し、点 A と C 、点 B と C を結んだものです。この作図において、コンパスで等しい長さをとった線分に、等しいことを示す印をつけてみましょう。



前ページで証明したように、右の図で、

$\triangle ACO$ と $\triangle BCO$ において

$OA = OB$, $AC = BC$ ならば $\angle AOC = \angle BOC$

である。

このように、図形の性質は

○○○ ならば □□□

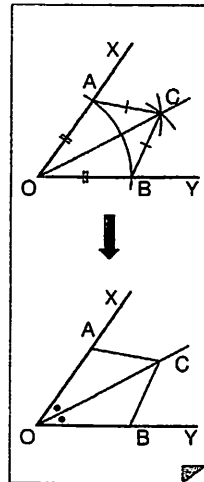
という形で述べられることが多い。

このような文では

「ならば」の前の ○○○ の部分を **仮定**

「ならば」のあとの □□□ の部分を **結論**

という。



$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ならば $\angle C = \angle F$

ということがらでは

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ が**仮定**, $\angle C = \angle F$ が**結論**

である。

① 次の(1), (2)について、それぞれ**仮定**と**結論**をいいなさい。

(1) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ならば $AB = DE$

(2) x が6の倍数 ならば x は2の倍数である。

数の性質でも、**仮定**や**結論**というんだね。



証明の根拠となることから

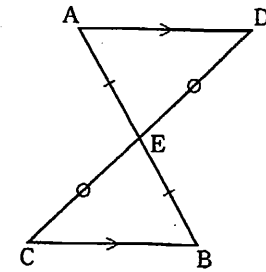
●●● 根拠となることがらを明らかにして、図形の性質を証明してみよう。

右の図は、線分 AB と CD の交点を E として

$EA = EB$, $AD \parallel CB$

となるようにかいたものである。

このとき、 $ED = EC$ となることを証明してみよう。



○) 上のことがらの**仮定**と**結論**をいってみましょう。

また、**仮定**から**結論**を導くには、どの三角形とどの三角形の合同をいえばよいでしょうか。

等しい辺や角を見つけ、三角形の合同条件のどれを使えばよいか考えよう。



仮定から**結論**を導くために示すことがらと、その根拠をあげると、次のようになる。

〈証明のすじ道〉

仮定から**結論**を導くには、 $\triangle AED$ と

$\triangle BEC$ が合同であることをいえばよい。

そのためには、次の3つのことがらを

示せばよい。

EA と EB は等しい。…………… **仮定**

$\angle AED$ と $\angle BEC$ は等しい。…………… **対頂角は等しい。**

$\angle EAD$ と $\angle EBC$ は等しい。…………… **平行線の錯角は等しい。**

これらのことから

$\triangle AED$ と $\triangle BEC$ は合同である。…………… **1組の辺とその両端の角がそれぞれ**

これより

ED と EC は等しい。…………… **合同な図形の対応する辺は等しい。**

根拠となることから

EA と EB は等しい。……………	仮定
$\angle AED$ と $\angle BEC$ は等しい。……………	対頂角は等しい。
$\angle EAD$ と $\angle EBC$ は等しい。……………	平行線の錯角は等しい。
これらのことから	
$\triangle AED$ と $\triangle BEC$ は合同である。……………	1組の辺とその両端の角がそれぞれ
これより	等しい2つの三角形は合同である。
ED と EC は等しい。……………	合同な図形の対応する辺は等しい。

この証明のすじ道を、**根拠**となることがらがわかるように整理して書くと、次ページのようになる。

命題の真偽 と 命題の逆

HR: _____ 氏名: _____

1 次の命題の真偽を調べ、偽の場合には反例を示しなさい

(1) $n : 4$ の倍数 $\Rightarrow n : 偶数$

(2) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

(3) $x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

(4) $0 < x < 5 \Rightarrow 1 < x < 3$

(5) $x < 2 \Rightarrow x < -2$

(6) $\triangle ABC$ が正三角形 $\Rightarrow \triangle ABC$ は二等辺三角形

2 次の命題の逆をつくり、その真偽を調べよ

(1) $2x - 5 = 4 \Rightarrow x = 3$

(2) $n : 6$ の倍数 $\Rightarrow n : 3$ の倍数

(3) $x > 4 \Rightarrow x > 3$

(4) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

(5) 四角形 ABCD が正方形 \Rightarrow 2本の対角線の長さが等しい

必要条件と十分条件

HR: _____ 氏名: _____

- 次の□に「必要」「十分」のうち、あてはまる方を書き入れなさい

[例] (1) $x^2 = 4$ は $x = 2$ であるための□条件である。

(2) $x = 5$ は $x^2 = 25$ であるための□条件である。

[練習] (1) $x = -6$ は $x^2 = 36$ であるための□条件である。

(2) $x > -1$ は $x > -3$ であるための□条件である。

(3) n が偶数であることは、 n が4の倍数であるための□条件である。

(4) $x \leq 4$ は $x < 5$ であるための□条件である。

(5) $1 < x \leq 4$ は $0 < x < 5$ であるための□条件である。