集合と命題の壁

有朋高校単位制課程　大谷 健介

0　はじめに

昨年度からスタートした新学習指導要領は、データの分析のこと、課題学習のこと、整数の性質のこと、数学Cがなくなること等々、さまざまな分野に注目されていますが、実際に取り組んでみてここが問題…という課題が出てきています。それは、集合と命題が数学Aから数学Ⅰに移ったことです。

有朋単位制では、苦手な教科の科目は必履修科目を履修さえすれば卒業要件を満たします。したがって、数学がとても苦手な生徒は「数学Ⅰ基礎」の講座２単位を２講座履修すれば、必履修がクリアされることになり、ほかの科目を履修する義務がありません。そうした数学超苦手の生徒は集合と命題を教わることなく高校生活を送っていたので特段問題はなかったのですが，今回の改訂によりすべての生徒が集合と命題…とりわけ命題についての学習をしなければならなくなったわけです。実は昨年度は、夏休みと進度の関係からさらっと…本当にさらっとしか扱わなかったのですが、今年度は少ししっかりと取り組んでみようと思い実践してみました。

この分野の指導の在り方、ぜひ、いろいろな先生方の実践例を教えていただきたいものです。

1　集合と命題での目標

集合では、記号の理解が最も大切ですのでそのことが中心です。あまり複雑な問題には取り組まず、せいぜい$\overline{A\cap B}$や$\overline{A\cup B}$ くらいまでで、それ以上は扱いません。また、集合の要素の個数は，教科書で取り扱われていないためまったく触れないことになっています…ここは残念。

一方、命題のところは以下のようなものです。

① 命題の真偽が判断できる

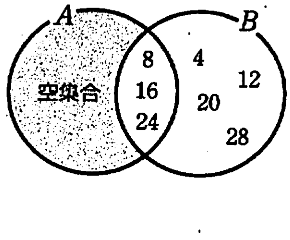
② 逆･対偶が言えて、その真偽が判断できる

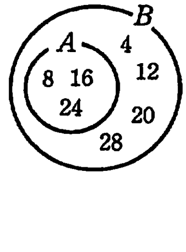
③ 必要条件と十分条件が（だいたいんなんとなく）理解できる

取り扱う問題も複雑なものは避けて、同じようなパターンを繰り返し練習するように留意しました。

2　授業にて

① 命題の真偽については、ベン図を使っての表現です。教科書には２つのパターンで載っていましたが、今回は左の方の $A\cap\overline{B}=\emptyset$ のベン図を使いました。反例を表現しやすいことが理由です。これについては効果が上がったかどうかはよくわかりません。





A は B に含まれます。

② 次に命題の記号化への手順です

「８の倍数は偶数である」　→この命題は真です

↓ このことを仰々しく書くと

↓

「ｎが８ ならば ｎは偶数である」と表現されます

↓ で、これを記号にすると

↓

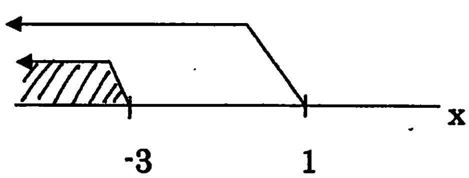
「ｎ＝８ $\Longrightarrow$ ｎ：偶数」と示されます

こんな感じであまりおもしろくありません。しかし、これが実生活に近い内容を例示したとして、数学としての実感がわかない…。だから、こういう簡単な命題をだしてやるべきであると考えるわけです。

③ 不等式の真偽のパターン化

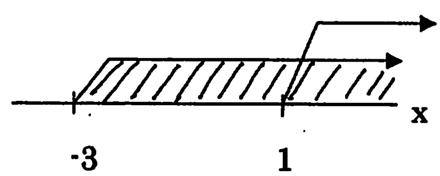
これはわかってくれるかと思ったのですが…　定着は今一歩です

(例)　$x < -3 \Rightarrow x < 1$



(全部覆っているのでこの命題は真)

$x > -3 \Rightarrow x > 1$



(はずれている部分があるので偽)

④ 必要条件と十分条件

卒業要件に見立てて考えてみます ← 一応導入です

修得単位	2単位　4単位　…　72単位	74単位	76単位　78単位　…　100単位　…
卒業するために	必要	必要十分	十分

その結果…

①「７４単位修得する　⇔　卒業する」これはピンとくるようです

②「８０単位修得すれば、卒業するには十分な単位数」これもピンとくるようです。

③「卒業する　⇒　２単位修得する」これはなかなか理解しがたいのですが、

卒業するには２単位とることも必要だし、４単位とることも必要だし…　というと実感としてわかってくるようです。目標達成までの道のりという点で…

じゃあ、このことがわかれば教科書や傍用問題集の「必要条件であるが十分条件ではない」っていう問題が理解できるかというとそれは別の話です。

ただ、社会では必要条件と十分条件はこんな意味で使われているはずなので、ひとつの例として示してみました。

以下、学習内容は別紙のプリントを参照されてください。

3　実践してみての感想

なんというか、この単元は本当に生徒の授業へ向かう姿勢が低く残念な思いをします。授業に参加しているであろう生徒は多く見積もっても６割程度です。厳しい状況です。

当然、授業をしている先生に問題があるし、取り扱っている内容が良くないこともたぶん問題です…。しかし、それにしても…と思って中学校の教科書を調べてこの手の内容をどこで取り扱っているか調べてみました。

「○○ならば◎◎」という“仮定と結論”の表現は、中学２年生で「合同な図形」の「証明のすすめ方」のセクションで初めて出てきます。そこでは「△ABC≡△DEF ならば∠C=∠F」といった例が挙げられております。さらに、「証明の根拠となることがら」から証明の例示へと進んでいきます。

少し合点がいきました。ここは言うなれば中学数学最大の難関ではありませんか。それは基本「数学は嫌い」「数学は苦手」の生徒たちのトラウマ要因の一つではないかと…「ここは聞いてもわからないだろう」という思考阻害が働いているような気がしました。

もちろん、指導側のがんばりのたりなさ、生徒の状況認識の甘さを反省の上で…です。

4　これからの課題

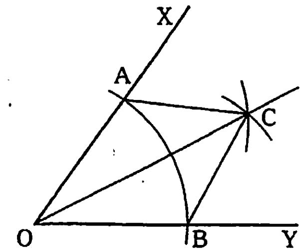
毎年、授業をしたあとにこういう気持ちにはなりたくないので、何とかしたいところです。
そこで…

① 中学校の学習のつながりを意識して、「○○ならば◎◎」がもう少しわかるようになりたいよね、という学習意欲の喚起　←　理想
② 「これは数学」という意識付けのための工夫　　たとえば真偽を調べるのに計算が必要、とか
③ 他の単元と同じような授業のメリハリ…
自分の中で授業の流れをうまくつかんでいないと思う
④ もっと教材の工夫　　生徒が興味を持つような……むずかしい…
といったようなことをやっていかないとなりません。

③ 証明のすすめ方

仮定と結論

右の図は，∠XOY の二等分線 OC を作図し，点 A と C，点 B と C を結んだものです。
この作図において，コンパスで等しい長さをとった線分に，等しいことを示す印をつけてみましょう。



前ページで証明したように，右の図で，
△ACO と △BCO において

OA＝OB，AC＝BC　ならば　∠AOC＝∠BOC

である。

このように，図形の性質は

〇〇〇　ならば　□□□

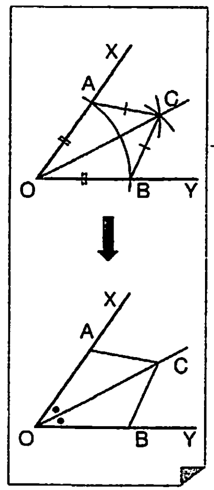
という形で述べられることが多い。

このような文では

「ならば」の前の　〇〇〇　の部分を 仮定（かてい）

「ならば」のあとの　□□□　の部分を 結論（けつろん）

という。



例1　△ABC≡△DEF　ならば　∠C＝∠F

ということがらでは

△ABC≡△DEF が仮定，∠C＝∠F が結論

である。

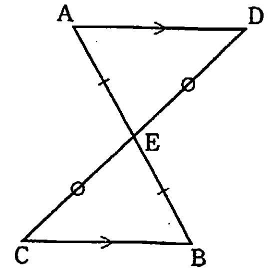
□ たしかめ ① 次の(1)，(2)について，それぞれ仮定と結論をいいなさい。

(1)　△ABC≡△DEF　ならば　AB＝DE

(2)　x が 6 の倍数　ならば　x は 2 の倍数である。

証明の根拠となることがら

●・・ 根拠となることがらを明らかにして，図形の性質を証明してみよう。



右の図は，線分 AB と CD の交点を E として

EA＝EB，AD∥CB

となるようにかいたものである。
このとき，ED＝EC となることを証明してみよう。

上のことがらの仮定と結論をいってみましょう。
また，仮定から結論を導くには，どの三角形とどの三角形の合同をいえばよいでしょうか。

等しい辺や角をみつけ，
三角形の合同条件のどれを
使えばよいか考えよう。

仮定から結論を導くために示すことがらと，その根拠をあげると，次のようになる。

〈証明のすじ道〉

仮定から結論を導くには，△AED と △BEC が合同であることをいえばよい。
そのためには，次の 3 つのことがらを示せばよい。

	根拠となることがら
EA と EB は等しい。	仮定
∠AED と ∠BEC は等しい。	対頂角は等しい。
∠EAD と ∠EBC は等しい。	平行線の錯角は等しい。
これらのことから	
△AED と △BEC は合同である。	1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい 2 つの三角形は合同である。
これより	
ED と EC は等しい。	合同な図形の対応する辺は等しい。

この証明のすじ道を，根拠となることがらがわかるように整理して書くと，次ページのようになる。

命題の真偽　と　命題の逆

HR:　　　氏名:

$\boxed{1}$ 次の命題の真偽を調べ、偽の場合には反例を示しなさい

(1)　n：4の倍数 ⇒ n：偶数　　(2) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

(3) $x \geqq 4 \Rightarrow x \geqq 2$　　(4) $0 < x < 5 \Rightarrow 1 < x < 3$

(5) $x < 2 \Rightarrow x < -2$　　(6) △ABCが正三角形 ⇒△ABCは二等辺三角形

$\boxed{2}$ 次の命題の逆をつくり、その真偽を調べよ

(1) $2x - 5 = 4 \Rightarrow x = 3$　　(2) n：6の倍数 ⇒ n：3の倍数

(3) $x > 4 \Rightarrow x > 3$　　(4) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

(5) 四角形ABCDが正方形 ⇒ 2本の対角線の長さが等しい

必要条件と十分条件

HR:　　　氏名:

■ 次の□に「必要」「十分」のうち、あてはまる方を書き入れなさい

[例] (1) $x^2 = 4$ は $x = 2$ であるための□条件である。

(2) $x = 5$ は $x^2 = 25$ であるための□条件である。

[練習] (1) $x = -6$ は $x^2 = 36$ であるための□条件である。

(2) $x > -1$ は $x > -3$ であるための□条件である。

(3) n が偶数であることは、n が 4 の倍数であるための□条件である。

(4) $x \leqq 4$ は $x < 5$ であるための□条件である。

(5) $1 < x \leqq 4$ は $0 < x < 5$ であるための□条件である。