三角比の表の呪縛

有明高校単位制課程　大谷 健介

0　はじめに

今回のレポートは、この表のお話です。

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin θ									
cos θ									
tan θ									

三角比の表に関わっては、表の値の暗記についてはいろいろな考え方があるようですが、こうあるべきという話をしようとしているわけではありません。

どちらかというと「覚えるために」といった感じのレポートになると思います。

1　教科書では

この表は、どれくらいの教科書に載っているかということをざっと調べてみました。教科書会社によっては、数値がすべて書かれている表、一部が穴埋めになっていて問いの形式になっている表、値をすべて埋める問いの形式になっている表の３パターンがありました（中には、表の次のページを「発展」にして、180°～360° の表を問いにしているものも見られました）。

この表を教科書に載せていないのは、数研出版の難しい版と大判の２つだけでした（もっとも、数研の大判は正弦定理・余弦定理まで終わったあとに、鈍角の三角比を学習する構成になっているため 30° 45° 60° だけの表で載っています)。その数研出版についても 4step「三角比の拡張」の１問目に「θ＝0° 30° 45° 60° 90° 120° 135° 150° 180° について、sin θ、cos θ、tan θ の値の表を作れ。」という、やや強引な形で出題しています。

やはり、三角比ではこの表は覚える覚えないは別として、整頓のためにも必要というわけのようです。

2　生徒は

生徒はこの表を手に入れると、正弦定理・余弦定理、三角形の面積等の場面で積極的に表を使います。三角定規の辺の比から考える生徒はまったくいません…ということは指導者である私がそういう風に仕向けているに違いありません。と、私の授業では、おそらく三角比の表が必要で、生徒はそれを覚えなければならないと考えているわけです。

でも、なかなか覚えられません。どうすればこれらの値は、効率よく整頓できるだろうか？…生徒と考えましたが、実は数学Ⅱを受講している生徒との補習でこんなことを考えついてみました。

…そういえば、過去に三角比の表を考査に出題する際、135° の角度のところを穴埋めする問題を出してみたところ、正答率がひじょうに低かったことがありました。

3　効率よく整頓するために

この表が覚えにくいのは、30° 系(?)と 45° 系(?)の角を１つの表にまとめてしまっているからではないか？それで、数字の流れが悪くなっているのでは？と思いました。

確かに $\sin\theta$ の 30° からの$\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}$とつづく値は悪い流れではない。しかし、実際にはこの値を表に記すのではなく、ルートをはずすなり、約分するなりの作業を伴って転記するわけだし、なによりこの整頓のしかたでは、角度との連動が薄い感じがしていました。

それで、この表を二つに分けてみました。

30° 系 …　$(30\times n)°$　　$n=0,1,2,3,4,5,6$

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

45° 系…　$(45\times n)°$　　$n=0,1,2,3,4$

	0°	45°	90°	135°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\tan\theta$	0	1	×	-1	0

表を分ける良さがいろいろと見えました。

① それぞれの表で、使われる数値が限定される。
② 角度と連動して覚えることができる…んじゃないかな？
③ それぞれの表が２種類の三角定規と対応することになる。
④ ①によって、30° 系では値の増減が見えやすい→のちのグラフにつながる
⑤ 実は１つの表にまとめる意味合いはない…のではないかな？

これらについて生徒と話したところ、「めっちゃ覚えやすい」と、とても喜んでいました。
「どうして、先生は今までこうして表をまとめてくれなかったの？」と指摘されました。
「だって、いま思いついた…」…

4　数学Ⅱへの応用

私は数学Ⅱでも０～２πの表を配付して、知識の整頓をしています…が、それを配るとやはり生徒はそれを頼りにします。指導者である私がそう仕向けていると言うことですね。

で、この方法で表を２つに分けると三角比の単元以上に、整頓の意味合いがあるように思いました。弧度法がでてきますので、この場合は$\dfrac{n\pi}{6}$系と$\dfrac{n\pi}{4}$系で表をまとめます。三角比のところよりも数学っぽいですね。

ちなみに、０～２πの表を載せている教科書があるかどうか調べたところ、１冊だけ、第一学習社の大判に２段にして載っていました。

5　さいごに

「どうして、先生は今までこうして表をまとめてくれなかったの？」という問いは、自分にとってはとてもインパクトのある投げかけでした。三角比の表はいまから数十年前、高校１年で出会ってから、何の疑いもなくずっと同じものを使い続け、そして教員になってからも同じ感覚で使ってきました。それは、まさに「三角比の表の呪縛」でした。

きっとほかにも自分は呪いにかかっている…

そう考えていた矢先…

わかりやすい授業とは、「わかりやすい説明をすること」だと考えてやってきました。ところが、その結果、見たことのない問題に取り組めない生徒の思考をつくってしまっていたことに、先日、気付かされました。

そうです。ほかにも自分は呪いにかかっているはず…。

$\dfrac{n\pi}{6}$系

度数法	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\dfrac{n\pi}{4}$系

度数法	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
弧度法	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\tan\theta$	0	1	×	-1	0	1	×	-1	0