

第58回 北海道算数数学教育研究大会

分科会：指導法（応用・発展）

三色ボールペンで学ぶ新しい数学 ・ A



平成15年10月17日（金）

北海道札幌真栄高等学校

北海道北広島高等学校

菅原 和良

1 はじめに

本校は人口増加が著しかった札幌郡北広島町において「地元北広島にも高校を」という地域住民の要望に応える形で、昭和53年4月に開校した。

開校から四半世紀を折り返し、地域の信頼に応える進学校として新たな歴史と伝統をつくりつつある、現在3学年27クラスの大規模校である。

全道や全国での研究指定校にも多数指定されており、教育実践表彰等の受賞も数多い。とりわけ、習熟度別学習指導においては、昭和63年度に文部省の研究指定校となり、その指導成果は全国的にも「習熟度別授業の北広島高校」として認知された。現在でも、英語、数学などの習熟度差の著しい教科・科目においては習熟度別学級編成による展開で、生徒の個性尊重の一助としている。

生徒は中学時代比較的優秀で大学進学をめざし、「熱心な指導」にひかれて入学してくる者も多い。また、都市部の学校としては素直で従順な生徒が多い印象を持つ。

本稿では、本年の授業実践を軸に論考を進める。

2 演習時間がないッ！

いよいよといった感じで新学習指導要領による教育課程が高等学校でも始まった。授業時数の削減や中学校数学からの移行事項など、高等学校数学も大きな変化が求められている。

そんな状況の中で完全学校週5日制の実施により、授業時数が減少し演習量も従前とは決定的に不足してきた。

当初は生徒の意欲を喚起し、自らのやる気を引き出すことで不足する演習量をカバーしようとした。しかし、仮に生徒が授業を理解しその内容に興味・関心を持ったとしても、そのことで生徒が休みの土・日を数学に使うことは稀である。殆どの生徒は授業が理解できたことですっかり安心し、わーいとかかりに週末ウキウキ *Boys and Girls* になって

「数学のことなんてこれっぽっちも考えないわ。2次関数って、なに？」

となっちゃうから現実には甘くない。

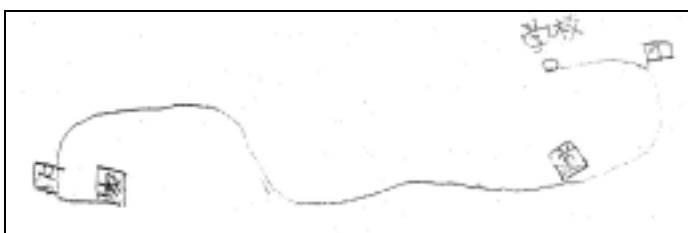
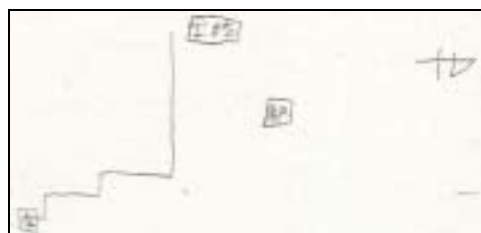
「あらら、弱っちゃったねどうも」

と愚鈍なる数学教師は頭を悩ませることになる。

演習量も授業の中で確保しなければならなくなってきたわけであり、そのことはとりもなおさずこれまでの授業方法を見直し、改善していくということでもあった。

3 地図の描けない生徒と数学的な表現・処理を考える教師

加えて地図の描けない生徒との遭遇が、自分の指導方法を見直そうと思わせる決定打となった。まず下の図を見ていただきたい。



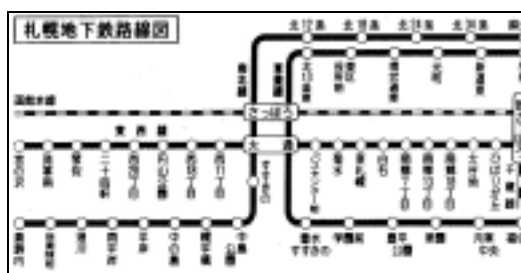
いずれも本校の3年生が今春、自宅から学校までの通学経路を描いてきたものである。

地図を描くという作業は、身近な事象を抽象化し、記号的・図的な思考力・表現力が求められる極め

て数学的な活動だと云える。距離や方位を定量的にとらえるならばユークリッド的地図となり、量を捨て性質を重視するならばトポロジー的地図となる。



ユークリッド的地図



トポロジー的地図

このように考えるとき、例示したような地図しか描くことのできない生徒は果たして今求められているような

- ・生きて働く力としての数学
- ・数学的な見方考え方のよさを積極的に活用する力

が身に付いていると云えるのだろうか。そのことはやはり指導する教師サイドの問題でもあり反省点でもあろう。

せめて日常生活で地図を描けるぐらいの力を数学でつけさせたいものだと切実に感じるようになった。

4 やってみよう試してみよう三色ボールペン

折しも学力低下論争が国民レベルで展開され、確かな学力の保障が声高に叫ばれている。このような時代には具体的な手段をもつ論が説得力を持って評価されるが、その代表例が「声に出して読みたい日本語」の齊藤孝氏と百ます計算の陰山英男氏だろう。

ドリルのような繰り返し指導に対する一部の批判はあるものの、どちらも具体的な実践を通し輝かしい成果を上げておられる。これを高校数学においても応用できないかと愚鈍なる数学教師はまたしても考えた。

そもそも学習の習得過程において、練習の絶対量は必要である。スポーツで考えると分かり易い。どんなに才能のある子どもでも、バッティングセンターで1日5球ずつ打っているだけではイチローにはなれない。1日5球打つのと、300球打つのでは雲泥の差となる。勿論毎日の授業の中で300球打つような演習時間を取ることは不可能である。しかし、1日5分か10分の演習時間でも、それを毎時間、毎週、毎月と一年間続けていったとき、生徒の中に質的な転化が起きるのではないか。

このことを前出の齊藤孝氏は自転車の練習を例に次のように説明している。

「例えば、自転車に乗る練習はそうですね。百回こらんで乗るのをあきらめてしまえば一生乗れない。しかし、百十回目に乗れるようになったら、もう後は一生乗れる。その百回目と百十回目の間に質的な転化が起こるわけです。それがたまたま起こったのではなく、その人にとっての量質転化が起きる蓄積の量というのは、たまたま百から百十の間だったということです。だから一個一個の知識についてもこういう量質転化が起きるのだというふうに考えますと、自分はどれくらい勉強すれば、それが一生身につく知識となるかという見通しが立ちます。」

したがって、同じ演習をするにしても、どれだけやったら何が身につくのかの見通しを立てた上で、量質転化のラインつまり自転車の乗り方というに乗れなかったものがあるところで突然乗れるようになるラインをしっかりと生徒にも判らせるということを教師側が意識し、本年度から次のような取組を試みた。

- (ア) 学習単元を細分化し、その項目毎に演習問題をプリントしたものを2～5分程度で生徒に行わせる。
- (イ) その後、赤青緑の三色ボールペンを使い
赤 = すごく重要 (客観的)
青 = まあ重要 (客観的)
緑 = おもしろい (感覚的)
でチェックさせ、周りの席の者と意見交換をさせる。
- (ウ) 場合によっては「その学習単元の要点を一言で表すキーワードは何か?」と聞いたり、「問題を創作せよ」といった作問を生徒にさせる。

短時間での演習プリントを行うことで演習時間を授業内に確保するためには、内容をシフト化しなければならぬ。そうすることで生徒は学習内容を段階的にクリアし、いつの間にか目標とする学習内容を習得していくことができる。自動車学校で行われているシェーピングという指導方法と同じである。

縦列駐車なら縦列駐車だけを練習し、クリアしたならその段階を終了。

坂道発進なら坂道発進ばかりを練習する。そうして最終的には車の運転ができるようになるというカリキュラム方法をイメージしてもらえばよい。

さらに、三色ボールペンで色分けし級友達と意見交換することで、互いに触発され学習内容をシェアリングすることができる。

このような授業を実践してみて感じられる教育効果には以下のようなものがある。

シェーピングにより最終的には生徒一人で学習することでは到達できない学習段階にまで、学習を進めることができる。

三色ボールペンを使った色分けにより、生徒が自分で復習する際の目安となる。

短時間でのプリント演習は、生徒の集中力を飛躍的に高める。

キーワードを使いその内容を表現することで、単元の内容を要約し、全体を大きく俯瞰的にとらえることができる。

作問により学習内容が深化されるとともに、他者の創作から新しい発想や感覚にふれることができる。

取り立てて目新しい実践でもなく、すでに手垢のついた指導法ではあるが、そこはそれ、授業は一種の相乗作用である。教えるこちらの個性、志向と教わる生徒の関心・意欲・態度で、授業は唯一無二のものとして成立しており、時によっては信じられないほど活気づく。

5 授業と生徒をつなぐ3つのメソッド

さて、前述のような授業を実践していくに当たって、大きく3つの点について意識的に行っていることがある。

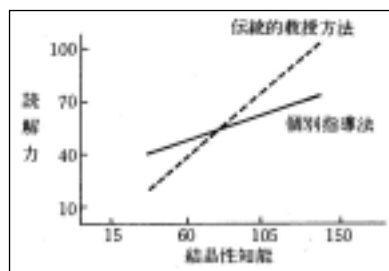
(1) 結論を先に示す

授業をする際に定理や公式を帰納的に説明するか演繹的に説明するかで、理解度に差が生ずることはすでに知られている。

次頁の図が2つの教授方法と事後テストの関係をグラフにしたものの一例である。

一寸簡単に説明したい。

- I. はじめに原理や定理を教えて、それから多くの例題をやらせていく方法
- II. はじめに多くの例題を考えてみて、そこから帰納的に原理や定理を導いていく方法



同じ授業者がこの2つの方法を別々に使い、確率の単元を2クラスで指導した後に、事後テストを行った。

その結果、次のような特徴が現れた。

平均点には特に差はない。

知能検査の得点が高いものは の指導方法による方が事後テストの成績がよい。

知能検査の得点が高いものは の指導方法による方が事後テストの成績がよい。

このことは1970年の日本教育心理学会で報告されている。

ちなみに数学の成績と事後テストの相関では、この特徴は失われている。つまり、どちらの指導法であっても数学の得意なものは事後テストの得点も高く、数学の苦手なものは事後テストの得点も低いという平凡な結果に終わっている。

このことを踏まえつつ、今年 は の指導法を多く採用した授業を行っているわけである。

帰納的に学習することで一般化した定理や公式を導くことは、数学のもつ美しさや有用性を認識させ、一度理解すれば確かな力として生徒の中にしっかりと蓄積されることは判ってはいるが、そのために必要な時間が残念ながら現状では取ることができない。加えて、本校においては帰納的に学習する途中で疲れてしまい、一般化する定理や公式までたどり着けない生徒も少なからずいる。したがって、演習時間を少しでもひねり出すための方便として、結果を先に示す の方法が有効だと判断したわけである。

この方法は生徒からしてみると、学習に対する見通しがよく、目標も把握しやすいようである。

(2) 生徒の思考力を引き出す発問

定理・公式を先に示し、それを活用できるように数値を代入し、計算するのであれば単なる技術の反復練習にしかすぎない。そうならないために、生徒の思考が揺り動くような発問を吟味し準備するようにしている。

例えば、10月6日の授業においては次のような発問を行った。

$3^n = {}_n C_0 + 2 {}_n C_1 + 2^2 {}_n C_2 + \dots + 2^n {}_n C_n$ を証明せよという問題において
 二項定理 $(a + b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_n C_n b^n$ を確認しておき、
 「 a と b は文字だから、特定の値を代入しても構わないよね。 a と b がどういう値ならば、問題にある 3^n になるだろうか？」

タイムリーで本質を突く発問ができたとき、教室は動き出す。

「あ～！判った!!」

「ええっー、どうしてどうして!?!」

といった声がわき上がり、教室内はたちまち騒然となり活力が出てくる。

この「ああ、そうか」という瞬間の気持ちが重要である。生徒はこの瞬間変化する自分を自覚し、質的に飛躍する瞬間の自分を知ることになるからである。どのように発問すれば、その教育的価値が生かせるか。毎日の授業において節目節目をスモールステップに分割し、階段を登るときに「ああ、そうか」と生徒が胸を打つ一言が出るような発問をしていこうと心がけている。

たったひとつの発問によって生徒の学習に取り組む姿勢が変わる「きっかけ」となることが本当にある。

さらに、この発問をうまく使うことで、授業においてアシスタント・ティーチャーやチーム・ティーチングの要素も取り入れるようにしている。

詳しくは研究会当日、口頭にて説明したい。

(3) 試験問題をひと工夫

近年、大学入試問題でも具体的な素材や事象を扱う問題や、思考力を問う問題が出題されるようになってきた。

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。(03 年 東京大・前期)

背理法とは何かを 20 字以上 100 字以内で説明せよ。(02 年 東京理科大)

次の定理と証明について、以下の問に答えよ。

定理 素数は無限に存在する。

証明 定理が成立しないとすると、素数は有限個である。それらの素数を p_1, p_2, \dots, p_n とする。このとき $q = (p_1 p_2 \dots p_n) + 1$ を考えると、 q は p_1, p_2, \dots, p_n のどれでも割り切れない。⁽¹⁾したがって、 q を素数の積として表したとき、この積に表れる素数は p_1, p_2, \dots, p_n のいずれとも異なる。これは矛盾である。⁽²⁾したがって定理が証明された。

(1) 上のように、結論が成り立たないと仮定して矛盾を導き出すことにより命題を証明する方法を何というか。(00 年 北見工大)

また、テスト問題と授業の関係について 9 月 4 日の道立教育研究所における教育講演会で道教育大旭川校の相馬一彦教授は考え方を問う問題が今後も増えてくることを指摘し、「テスト問題を指導に結びつけることが大事であり、授業への生徒の姿勢と方向づけるようなテストづくりをすること」の工夫・改善を求めている。

さらに、北海道において高教研などで何度か講演されている長岡亮介放送大学教授は、本年 3 月の日本数学会のシンポジウムにおいて

「入試問題を通じて数学者は『数学とは何か』を語っているんだということを忘れるべきではない」と述べておられるが、これは高校の教師における試験問題も同じ意味を持つ。

どのような問題を出題するかということは、生徒にどのような力を身につけてほしいかということの具体的な表現手段でもある。

そのため愚鈍なる数学教師は無い知恵絞りに、砂から水を絞り出すような思いをしつつ、粗悪な計算や技巧に墮することの無いような試験問題をひと工夫している。

次の 2 題は先日の 9 月 24 日に行われた本校 1 学年の前期期末考査で出題した問題である。

【問題 A】

サッカーゴール後方には防風林が植えられています。(図 1 参照)しかし、蹴ったボールがよく飛び出し木に当たるため、環境保護の立場から、木の高さまでの防ぎょネットをはることにしました。木の高さを直接測ることはできません。角度を測定する機器と巻き尺(メジャー)が使えるものとし、どうすれば木の高さを測ることができるのか、三角比の考えを利用して説明しなさい。ただし、目線の高さは考えなくてもよいこととします。

(図 1)



写真は本校のグラウンドで生徒をモデルに写したものである。

受験者 356 名中、正解者 193 名、正答率 54.2% であった。

これは知識偏重型の問題ではなく、解答の糸口を見つけていく部分に力点を置いた解法発見型の問題をねらいとして創った。

$\sin 30^\circ$ や $\cos 60^\circ$ の値は求められる - だがそのことがどんな意味を持っているのか、我々の生活にどのように生かされているのか。

そのことを理解せずに、ただ単にパターン化した解法を身につけたり、問題の量をこなしただけのものにはこの問題は解けなかったに違いない。

問われている内容は、どんな教科書にも冒頭で扱われているようなことだけに、基本中の基本とも云える問題なのだが、この正答率の示す意味は大きいと感じる。

\tan を使って説明した者は小数(25人)であり、圧倒的に正弦定理を使って説明した者が多かったのは予想外であった。

他の解答としては

- $CAB = 45^\circ$ となるように A の位置を定めると、このときの AB の長さが木の高さとなる。
- 面積を使って解く。

などがあった。

また誤答例としては

- 「AB を測り、CAB を測るで終わっている者
- $AB = 6$ とすると $AC = 8$ となるので高さは $2\sqrt{7}$

があった。

【問題 B】

1 階玄関横に下図のような自動販売機が設置されたとします。1 から 4 の各ラインには 6 個ずつの商品が並べられているとき、次の各問いに答えなさい。

- (1) ライン 1 における異なる 6 個の並べ方は何通りあるか。
- (2) ライン 3 における 2 種類 6 個の並べ方は何通りあるか。
- (3) ライン 1 において C アップル、D グレープ、E ピーチ の 3 つが隣り合うような並べ方は何通りあるか。
- (4) ライン 1 において B でいねい と D グレープ が両端にくるような並べ方は何通りあるか。
- (5) ライン 2 の異なる 6 個から 3 個を選ぶとき、選び方は何通りあるか。
- (6) ライン 2 の 6 個から 3 個を選ぶとき、L 聞茶 が含まれる場合は何通りあるか。
- (7) ライン 2 の 6 個から 3 個を選ぶとき、G パイ が選ばれ、I いちご は選ばれない場合は何通りあるか。
- (8) ライン 4 から 2 個取り出すとき、取り出し方の組合せは全部で何通りあるか。



こちらの方は、オーソドックスな順列と組合せの問題である。題材を本校に設置されている自動販売機としたものであり、その意味では北広島高校オリジナル問題とも云える。

数学は日常の身の回りに沢山あるんだとのメッセージを込めたつもりである。生徒が毎日目にして自動販売機を数学的にとらえているものがどれくらいいたかは判らないが、試験終了後その自動販売機の前でこの問題の解法を話し合っていた生徒がただで収穫はあったと思っている。これを機会に日常の事物を数学というフィルターを通してみることを身につけてくれればと思っている。

出題に当たっては職員室において 2 名の数学の先生にモニターテストをお願いした。

答案返却時には、出題意図や全体的な傾向、多くみられた誤答例など採点をしていて感じたことを書きまとめ、今後の弱点補強と学習計画も含めた講評として全生徒に配布した。このことは説明責任

を果たすという昨今の流れからも意義あることだと考えている。そのプリントには、定型的な処理法を覚えることも勿論大切ではあるが、それだけではなく、自分の力で考える練習を積み、考える力を身につけてほしいとの願いを込め、「平素から充実した数学的体験を蓄積してほしい」と書き結んだ。

6 今後の課題について

さて、三色ボールペンを使い演習時間を確保するための工夫をこれまで書いてきたが、このような授業を実践してみて、新たな課題や反省も見えてきた。

- (ア) 解法をルーチン化し単なる計算力の技巧化に陥る危険性があり、論理的な思考力の育成に課題が残る。
- (イ) 発展的な内容、系統的なつながりへの広がりが乏しい。
- (ウ) 進度とペースが手探り状態のため三色ボールペンの活用が不規則となる。
- (エ) 三色ボールペンでどこに赤をつけるかを全員で確認しておかないと、生徒は瑣末でも判らなかつたところ、難しくできなかったところに赤印を付けたがる傾向がある。
- (オ) 1校時45分といった短縮授業などのエンジニア・スケジュールの対応が難しい

(ア)、(イ)については「5 授業と生徒をつなぐ3つのメソッド」のところで、補うための方策について述べた。(ウ)、(オ)についても今後指導実績を重ねることで改善されてくるものと思われる。

この実践を通して気づいたことの1番大きな収穫は前記した(エ)であった。このことは教師側のエポケットであり、全く迂闊だったと反省している。

どうということかという、何題かの問題を前に

「1番大事だと思うところ、試験前にこれだけは確認しておくべきだと思う問題に赤いマークを付ける」

と指示したとき、生徒は難しい問題、できなかった問題に印を付けたがる傾向があるということである。このことは、とりわけ数学を得意としないタイプの生徒に多く見られる。

この事実気づいてからは赤いマークについては全員で確認するようにした。さらに、

「単元全体を見渡し、1番大事なところはどこかを見極め、その習得に多くの時間とエネルギーをかけるんだ。そこのところを押さえておくと、後は単なるバリエーションであることも多い。特別な場合や独特の技法を使うような問題にエネルギーをかけても得はない。何でもかんでも解こうと思って、かえって解かなければならないものを解けなくしてはいけない」と語るようにしている。

その結果、最近ではようやく半数以上の生徒がこちらの意図を汲み取り、学習単元の本質を示すような問題に赤いマークを付けるようになってきた。しかし、油断するとすぐにテクニカルで難しい問題に意識がシフトしてしまうこともまた事実である。

7 まとめにかえて

現在進行形の教育改革に身を置くものとして、大学入試に必要なだからと一片の知識を注入しすぎるのではなく、ゆとりを持って基礎基本を徹底し学ぶ意欲を育てたいという工夫や取組について書くつもりが、いざ文字にしてみると実践の化けの皮ともいべき正体が見えてきて、その薄っぺらさに気づかされる結果となった。

しかしながら、わずかな救いもある。

文部科学省初等中等教育局の根本博視学官が平成13年度教育課程実施状況調査報告書の指導上の改善事項として、以下の点を上げている。

問題文の記述量や生徒に記述させる量を増やしていく。

単に、結果を出すだけでなく、何を根拠にどのような手順でその結果を導いたかを説明できるように注意する。

自分なりの考えを筋道立てたり、過程を振り返って考えたりする活動を充実する。

これを読んだとき愚鈍なる数学教師は、目指すべき方向 赤ペンをつけるところは間違っていないと、人気の無くなった職員室で一人納得しているのである。

今までの授業に比べ、何の具体的な手筋も見えてこないことに変わりはないけれど、あたりの空気がわずかに明るさを帯びてきた、そんな気持ちに最近はなってきた。

皆様方のご批判、ご助言をいただければ幸いである。

参考文献

齊藤孝『子どもの日本語力をきたえる』（文藝春秋）

陰山英男・小河勝『学力低下を克服する本』（文藝春秋）

仲田紀夫『意外に役立つ数学67の発見』（黎明書房）

北尾倫彦『学習指導の心理学』（有斐閣）

東洋『子どもの能力と教育評価』（東京大学出版会）

磯田正美「個に応じた指導と教材開発」（中等教育資料H15・2月号）

根本博「平成13年度教育課程実施状況調査の結果と指導の改善」

（中等教育資料H15・8月号）

進研VIEW21 2003年度個別試験分析（ベネッセ）

北海道通信（H15年9月10日）

内外教育（H15年4月8日）