このノートについて

北海道算数数学教育会高校部会研究部代数解析研究会（以下代数解析研究会）では，その例会において現代数学に関する理論を学び，その周辺の話題を研究してきている。

代数解析研究会の活動の柱は 3 つある。具体的には，

① 現代数学の勉強会

② 大学等の入試問題の研究

③ 北海道高等学校数学コンテストの実施

である。

中学・高校で学習する数学の内容をより高い位置から眺め，深く理解することは，数学全体での位置づけや他の事項との関連を認識し，いかに教えるかを意識することにもつながり，教科研究を深めることになると考えられるため①を一つの柱としている。

さらに現代数学理論の特殊な場合が大学入試問題として出題されることもあり，現代数学を学ぶことは②においても参考になる場合がある。当然，③の数学コンテストの問題のアイディアも数学的理論がもととなっていることがある。

現代数学の勉強会では，今まで長年 OB 会員の 関口　隆 先生が講師となって「関数解析」や「ガロア理論」を講義されてきたが，2020，21 年度は筆者（杉本）が「ルベーグ積分入門」「確率過程入門」の講義を担当することになった。

このノートは筆者が講義したことではないが，今後勉強会を開催するときの資料として「差分と和分」について執筆したものの一つである。特に，自主ゼミでもやりやすいように，難しい内容は一切排除して，高校数学の延長線上にある内容のみに絞った。もし参考になれば幸いである。そのため，講義の内容はその分野のすべてを網羅するものではないことをお断りしておく。

このノートを読んで代数解析研究会に興味を持っていただけたらご連絡いただきたい。また，本文中に誤りなどがあったら同じくご連絡いただきたい。

Ver.1.1

差分と和分

― 微分と積分の数列版 ―

もくじ

杉　本　幸　司

（連絡先）golicol0214○yahoo.co.jp（○は@）

第 0 章　はじめに

この章では，これから学習する差分と和分の導入として，大学入試問題を題材にしてその内容の一部を概観する。

まずは少し古いが次の大学入試問題を解こう。

問題 0.1　負でない整数 n と正の整数 k に対して，

$$n^{(k)}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

とおく。

(1) 一般に，負でない整数 n を変数とする関数 $f(n)$ に対して，関数 $\Delta f(n)$ を，

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$$

で定義する。このとき，$k\geqq 2$ に対して，

$$\Delta n^{(k)}=kn^{(k-1)}$$

となることを示せ。

(2) また一般に，負でない整数 n を変数とする関数 $f(n)$ に対して，関数 $Sf(n)$ を，

$$Sf(0)=0\ ,\ \ n\geqq 1 \text{ のとき，} Sf(n)=\sum_{i=0}^{n-1}f(i)$$

と定義する。このとき，すべての負でない整数 n に対して，

$$S(\Delta f)(n)=f(n)-f(0)$$

であることを示せ。また，

$$Sn^{(k)}=\frac{1}{k+1}n^{(k+1)}$$

を示せ。

(3) $n^3=n^{(3)}+3n^{(2)}+n^{(1)}$ であることを示し，$\sum_{i=0}^{n-1}i^3$ を求めよ。

（96　岐阜大　教・農　一部改題）

［略解］(1) 左辺$=(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)-n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$

$$=n(n-1)\cdots(n-k+2)\{(n+1)-(n-k+1)\}$$
$$=n(n-1)\cdots(n-k+2)k=\text{右辺}$$

(2) （前半）$n=0$ のとき，左辺$=0$，右辺$=f(0)-f(0)=0$

$n\geqq 1$ のとき，左辺$=\sum_{i=0}^{n-1}\{f(i+1)-f(i)\}=$右辺

（後半）$n^{(k+1)}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)$ であるから，$n=0$ のとき $n^{(k+1)}=0$ である。また(1)より，

$n^{(k)}=\frac{1}{k+1}\Delta n^{(k+1)}$ であるから前半の結果より得られる。

(3) （前半）右辺$=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n=n\{(n-1)(n-2)+3(n-1)+1\}=$左辺

（後半）$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} i^{(3)} + 3\sum_{i=0}^{n-1} i^{(2)} + \sum_{i=0}^{n-1} i^{(1)}$

$$= Sn^{(3)} + 3Sn^{(2)} + Sn^{(1)}$$

$$= \frac{1}{4}n^{(4)} + n^{(3)} + \frac{1}{2}n^{(2)}$$

$$= \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) + n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n-1)\{(n-2)(n-3) + 4(n-2) + 2\}$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n-1)^2 \ \blacksquare$$

さて，この問題のルーツは「差分と和分」である。

「微分と積分」では，関数 $f(x)$ において変数 x は実数の値をとる。しかし問題 0.1 では，関数 $f(n)$ において変数 n は負でない整数の値をとっている。すなわちここでの関数 $f(n)$ は，数列 a_n と同一視できる（ただし $n=0$ を含む）。

以下で差分と和分を考察するにあたって，関数 $f(n)$ における変数 n は（問題 0.1 よりもう少し広げて）整数の値をとることにする。ここでも関数は数列と同一視することにしよう。

「差分と和分」とは，数列 $f(n)$ に対して「微分と積分」を考えるというものである。

数列に対する微分積分とはいっても，そんなに簡単ではない点もある。たとえば通常の関数において微分を考えるとき，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。差分を考える場合には，この定義では $h \to 0$ といっても，h は整数の値しかとり得ることができず，しかも $h=0$ とはなれないのだから，これはいったいどうしたらよいだろうか。

しかたがないので，h はたとえば…→4→3→2→1 のように 1 に到達するしかない。つまり，導関数に相当するものは，

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f(x+1) - f(x)$$

である，すなわち数列 $f(n)$ の差分とは

$$f(n+1) - f(n)$$

と定義しよう。

このノートでは，数学Ⅱないし数学Ⅲで展開される通常の「微分と積分」と並行して「差分と和分」を定義して，その性質を調べようというものである。

上に述べたように，以下では定義域が整数である関数 $x(t)$ （t は整数）を数列といい，$\{x(t)\}$ と表す。たとえば，

$$x(t)=4t-3 \quad (t \text{ は整数})$$

なる関数 $x(t)$ を考えれば，数列 $\{x(t)\}$ は，

$$\cdots,\ x(-1)=-7\ ,\ x(0)=-3\ ,\ x(1)=1\ ,\ x(2)=5\ ,\ x(3)=9\ ,\ \cdots$$

である。また，

$$x(t)=5 \quad (t \text{ は整数})$$

なる関数 $x(t)$ を考えれば，数列 $\{x(t)\}$ は，

$$\cdots,\ x(-1)=5\ ,\ x(0)=5\ ,\ x(1)=5\ ,\ x(2)=5\ ,\ x(3)=5\ ,\ \cdots$$

である。

各章の概要について述べる。

第 0 章（本章）では，差分と和分の導入となる説明をした。

第 1 章では導関数（微分）の数列版として「差分」を定義し，その性質を調べる。

第 2 章では高次導関数の数列版として「高階差分」を定義し，その性質，特に Newton の補間法とその応用について述べる。

第 3 章では不定積分の数列版として「不定和分」を定義し，その性質ならびに具体的な計算例について述べる。

第 4 章では定積分の数列版として「定和分」を定義し，その性質ならびに具体的な計算例について述べる。

第 5 章では，微分方程式の数列版として「差分方程式」について学習する。ここでは簡単のため，おもに定数係数 1 階型差分方程式について考察する。

第 1 章　差分

この章では，はじめに数列の差分を定義し，その性質を調べる。和，定数倍，積，商の差分の公式が微分法の公式と同様に形で導き出される。そのあとで階乗数列を定義し，多項式で表される関数と同じような性質をもつことを示す。なお，差分については高等学校の数学 B でも，「階差数列」として学習している。

定義 1.1　$\{x(t)\}$ を数列とする。数列$\{\Delta x(t)\}$ を，任意の整数 t に対して，

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$$

で定義して，数列$\{x(t)\}$ の**差分**という。

命題 1.2　(1) $\Delta c = 0$ （c は定数）

n が正の整数のとき，$\Delta t^n = {}_n\mathrm{C}_1 t^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 t^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} t + {}_n\mathrm{C}_n$

したがって特に，$\Delta t = 1$ ，$\Delta t^2 = 2t+1$ ，$\Delta t^3 = 3t^2 + 3t + 1$

(2) $a \fallingdotseq 0,1$ のとき，$\Delta a^t = a^t(a-1)$

したがって特に，$\Delta 2^t = 2^t$

［証明］(1) $\Delta c = c - c = 0$

$$\begin{aligned}\Delta t^n &= (t+1)^n - t^n \\ &= ({}_n\mathrm{C}_0 t^n + {}_n\mathrm{C}_1 t^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 t^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} t + {}_n\mathrm{C}_n) - t^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_1 t^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 t^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} t + {}_n\mathrm{C}_n\end{aligned}$$

後半は明らか。

(2) $\Delta a^t = a^{t+1} - a^t = a^t(a-1)$

後半は明らか。■

定義 1.3　$\{x(t)\}$ ，$\{y(t)\}$ を数列とし，c を実数の定数とする。

(1) 数列$\{(x+y)(t)\}$ ，$\{(cx)(t)\}$ を，

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t) \text{ , } (cx)(t) = cx(t)$$

で定義する。

(2) 数列$\{(xy)(t)\}$ ，$x(t) \fallingdotseq 0$ のとき$\left\{\left(\dfrac{y}{x}\right)(t)\right\}$ を，

$$(xy)(t) = x(t)y(t) \text{ , } \left(\frac{y}{x}\right)(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

で定義する。

命題 1.4　$\{x(t)\}$ ，$\{y(t)\}$ を数列とし，c を実数の定数とする。

任意の整数 t に対して次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) $\Delta(x+y)(t) = \Delta x(t) + \Delta y(t)$

(2) $\Delta(cx)(t)=c\Delta x(t)$

(3) $\Delta(xy)(t)=(\Delta x(t))y(t+1)+x(t)(\Delta y(t))$,

(4) $x(t)\fallingdotseq 0$, $x(t+1)\fallingdotseq 0$ のとき$\Delta\left(\frac{y}{x}\right)(t)=\frac{(\Delta y(t))x(t)-y(t)(\Delta x(t))}{x(t+1)x(t)}$

［証明］任意の整数 t をとり固定する。

(1) $$\begin{aligned}\Delta(x+y)(t) &=(x+y)(t+1)-(x+y)(t)\\ &=(x(t+1)+y(t+1))-(x(t)+y(t))\\ &=(x(t+1)-x(t))+(y(t+1)-y(t))\\ &=\Delta x(t)+\Delta y(t)\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\Delta(cx)(t) &=(cx)(t+1)-(cx)(t)\\ &=cx(t+1)-cx(t)\\ &=c\{x(t+1)-x(t)\}\\ &=c\Delta x(t)\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\Delta(xy)(t) &=(xy)(t+1)-(xy)(t)\\ &=x(t+1)y(t+1)-x(t)y(t)\\ &=x(t+1)y(t+1)-x(t)y(t+1)+x(t)y(t+1)-x(t)y(t)\\ &=\{x(t+1)-x(t)\}y(t+1)+x(t)\{y(t+1)-y(t)\}\\ &=(\Delta x(t))y(t+1)+x(t)(\Delta y(t))\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{y}{x}\right)(t) &=\left(\frac{y}{x}\right)(t+1)-\left(\frac{y}{x}\right)(t)\\ &=\frac{y(t+1)}{x(t+1)}-\frac{y(t)}{x(t)}\\ &=\frac{y(t+1)x(t)-y(t)x(t+1)}{x(t+1)x(t)}\\ &=\frac{y(t+1)x(t)-y(t)x(t)+y(t)x(t)-y(t)x(t+1)}{x(t+1)x(t)}\\ &=\frac{\{y(t+1)-y(t)\}x(t)+y(t)\{x(t)-x(t+1)\}}{x(t+1)x(t)}\\ &=\frac{(\Delta y(t))x(t)-y(t)(\Delta x(t))}{x(t+1)x(t)}\ \blacksquare\end{aligned}$$

例　1.5

(1) $$\begin{aligned}\Delta(t^2+2t-3) &=\Delta t^2+2\Delta t-\Delta 3\\ &=(2t+1)+2\cdot 1-0\\ &=2t+3\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\Delta(2^t t^2) &=(\Delta 2^t)(t+1)^2+2^t\Delta(t^2)\\ &=2^t(t^2+2t+1)+2^t(2t+1)\\ &=2^t(t^2+4t+2)\end{aligned}$$

(3) $\Delta\left(\dfrac{2^t}{t}\right)=\dfrac{(\Delta 2^t)t-2^t(\Delta t)}{(t+1)t}$

$$=\frac{2^t t-2^t\cdot 1}{(t+1)t}$$

$$=\frac{2^t(t-1)}{(t+1)t}\ \blacksquare$$

定義 1.6　$\{x(t)\}$ を数列とし，n を整数とする。このとき数列$\{x^{(n)}(t)\}$ を，

$$x^{(n)}(t)=\begin{cases} x(t)x(t-1)x(t-2)\cdots x(t-n+1) & (n\geqq 1)\\ 1 & (n=0)\\ \dfrac{1}{x(t+1)x(t+2)x(t+3)\cdots x(t+|n|)} & (n\leqq -1)\end{cases}$$

で定義して，$\{x(t)\}$ の**階乗数列**という。

特に$x(t)=t$ のとき，$x^{(n)}(t)$ を$t^{(n)}$ と書くと，

$$t^{(n)}=\begin{cases} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) & (n\geqq 1)\\ 1 & (n=0)\\ \dfrac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)\cdots(t+|n|)} & (n\leqq -1)\end{cases}$$

である。いくつかを具体的に書くと，

$$t^{(1)}=t \qquad t^{(-1)}=\frac{1}{t+1}=\frac{1}{(t+1)^{(1)}}$$

$$t^{(2)}=t(t-1)=t^2-t \qquad t^{(-2)}=\frac{1}{(t+1)(t+2)}=\frac{1}{(t+2)^{(2)}}$$

$$t^{(3)}=t(t-1)(t-2)=t^3-3t^2+2t \qquad t^{(-3)}=\frac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)}=\frac{1}{(t+3)^{(3)}}$$

となる。

例　1.7　たとえば 3 次の多項式

$$P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$$

を階乗数列$t^{(n)}$　$(0\leqq n\leqq 3)$　をもちいて

$$P(t)=c_0+c_1t^{(1)}+c_2t^{(2)}+c_3t^{(3)}$$

と表すことを考えよう。

$$\begin{aligned} P(t) &=c_0+c_1t^{(1)}+c_2t^{(2)}+c_3t^{(3)}\\ &=c_0+c_1t+c_2t(t-1)+c_3t(t-1)(t-2)\\ &=c_0+t[c_1+(t-1)\{c_2+(t-2)c_3\}]\end{aligned}$$

であるから，

① c_0 は$P(t)$ をt で割ったときの余り

② c_1 は①の商を$(t-1)$ で割ったときの余り

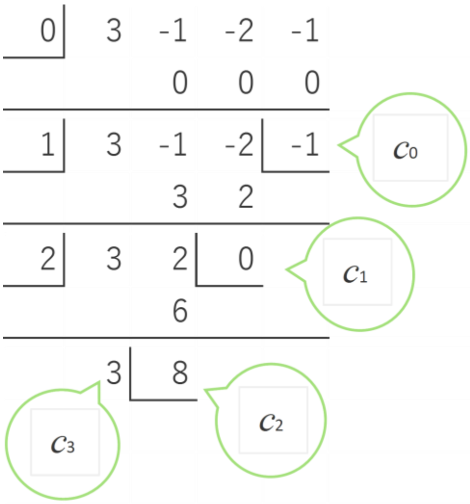
③ c_2 は②の商を$(t-2)$ で割ったときの余り

④ c_3 は③の商

になっている。このことを利用して，

$$P(t) = -1 - 2t - t^2 + 3t^3$$

を階乗数列$t^{(n)}$ （$0 \leqq n \leqq 3$）で表してみよう。組立除法を用いると簡単でわかりやすい。



上記の組立除法から，

$$P(t) = -1 + 8t^{(2)} + 3t^{(3)}$$

である。■

命題 1.8　n を整数とし，a，b を実数の定数とする。このとき次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) $\Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)}$

(2) $\Delta (at+b)^{(n)} = na(at+b)^{(n-1)}$，

［証明］(1)（$n \geqq 1$ のとき）

$$\begin{aligned}\Delta t^{(n)} &= (t+1)^{(n)} - t^{(n)} \\ &= (t+1)t(t-1)\cdots(t-n+2) - t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) \\ &= t(t-1)\cdots(t-n+2)\{(t+1)-(t-n+1)\} \\ &= t(t-1)\cdots(t-n+2)n \\ &= nt^{(n-1)}\end{aligned}$$

（$n=0$ のとき）左辺$= \Delta t^{(0)} = \Delta 1 = 0$，右辺$= 0t^{(-1)} = 0$

（$n \leqq -1$ のとき）$-n = m$ とおく。このとき $m \geqq 1$ で，

$$t^{(n)} = t^{(-m)} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+m)}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\Delta t^{(n)} &= \Delta t^{(-m)} \\ &= (t+1)^{(-m)} - t^{(-m)} \\ &= \frac{1}{(t+2)(t+3)\cdots(t+m+1)} - \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+m)} \\ &= \frac{1}{(t+2)(t+3)\cdots(t+m)}\left(\frac{1}{t+m+1} - \frac{1}{t+1}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(t+2)(t+3)\cdots(t+m)}\cdot\frac{(t+1)-(t+m+1)}{(t+m+1)(t+1)}$$

$$=\frac{-m}{(t+2)(t+3)\cdots(t+m)}$$

$$=-mt^{(-m-1)}$$

$$=nt^{(n-1)}$$

(2)（n が負でない整数のとき）n についての数学的帰納法で示す。

$n=0$ のとき，左辺$=\Delta(at+b)^{(0)}=\Delta 1=0$，右辺$=0a(at+b)^{(-1)}=0$ で成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき，$(at+b)^{(k+1)}=(at+b)^{(k)}\{a(t-k)+b\}$ であるから，

$$\begin{aligned}\Delta(at+b)^{(k+1)}&=\Delta[(at+b)^{(k)}\{a(t-k)+b\}]\\&=\Delta(at+b)^{(k)}\{a(t+1-k)+b\}]+(at+b)^{(k)}\Delta\{a(t-k)+b\}]\\&=ka(at+b)^{(k-1)}\{a(t-k+1)+b\}]+(at+b)^{(k)}a\\&=ka(at+b)^{(k)}+a(at+b)^{(k)}\\&=(k+1)a(at+b)^{(k)}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

したがって数学的帰納法によりすべての負でない整数 n について成り立つ。

（$n\leqq-1$ のとき）$-n=m$ とおく。このとき $m\geqq 1$ である。示すべき式は

$$\Delta(at+b)^{(-m)}=-ma(at+b)^{(-m-1)}$$

である。m についての数学的帰納法で示す。

$m=0$ のとき，$n=0$ であるからすでに示されている。

$m=k$ のとき成り立つと仮定する。

$m=k+1$ のとき，$(at+b)^{(-k-1)}=\dfrac{(at+b)^{(-k)}}{a(t+k+1)+b}$ であるから，

$$\begin{aligned}\Delta(at+b)^{(-k-1)}&=\Delta\left(\frac{(at+b)^{(-k)}}{a(t+k+1)+b}\right)\\&=\frac{\Delta(at+b)^{(-k)}\{a(t+k+1)+b\}-(at+b)^{(-k)}\Delta\{a(t+k+1)+b\}}{\{a(t+k+2)+b\}\{a(t+k+1)+b\}}\\&=\frac{-ka(at+b)^{(-k-1)}\{a(t+k+1)+b\}-(at+b)^{(-k)}a}{\{a(t+k+2)+b\}\{a(t+k+1)+b\}}\\&=\frac{-ka(at+b)^{(-k)}-a(at+b)^{(-k)}}{\{a(t+k+2)+b\}\{a(t+k+1)+b\}}\\&=\frac{-(k+1)a(at+b)^{(-k)}}{\{a(t+k+2)+b\}\{a(t+k+1)+b\}}\\&=-(k+1)a(at+b)^{(-k-2)}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

したがって数学的帰納法によりすべての負でない整数 m について成り立つ。■

例　1.9

(1) $\Delta(2t-3)^{(3)}=3\cdot 2(2t-3)^{(2)}$

$$=6(2t-3)\{2(t-1)-3\}$$

$$=6(2t-3)(2t-5)$$

(2) $\Delta(2t-3)^{(-3)}=-3\cdot 2(2t-3)^{(-4)}$

$$=\frac{-6}{\{2(t+1)-3\}\{2(t+2)-3\}\{2(t+3)-3\}\{2(t+4)-3\}}$$

$$=\frac{-6}{(2t-1)(2t+1)(2t+3)(2t+5)}\ \blacksquare$$

第 2 章　高階差分

この章では，差分を何回もとることにより高階差分を定義し，その性質を調べる。特に，高階差分により数列を多項式で表される関数で補間することができ，その応用として関数の値の近似値を求めることもできる。

定義 2.1　$\{x(t)\}$ を数列とし，n を負でない整数とする。このとき数列$\{\Delta^n x(t)\}$ を，

$$\Delta^0 x(t) = x(t)$$

$$\Delta^n x(t) = \Delta(\Delta^{n-1} x(t)) \qquad (n \geqq 1)$$

で定義して，$\{x(t)\}$ の**第 n 差分**という。第 2 差分以上の差分をまとめて**高階差分**という。

	$x(t)$	$\Delta^1 x(t)$	$\Delta^2 x(t)$	$\Delta^3 x(t)$	
0	$x(0)$	$\Delta^1 x(0)$	$\Delta^2 x(0)$	$\Delta^3 x(0)$	$\cdots$
1	$x(1)$	$\Delta^1 x(1)$	$\Delta^2 x(1)$	$\Delta^3 x(1)$	
2	$x(2)$	$\Delta^1 x(2)$	$\Delta^2 x(2)$	$\vdots$	
3	$x(3)$	$\Delta^1 x(3)$	$\vdots$		
4	$x(4)$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				

（上の表で（斜め線）－（横線）に着目せよ）

命題 2.2　$\{x(t)\}$ を数列とし，n を負でない整数とする。このとき，

$$\Delta^n x(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} {}_n\mathrm{C}_i\, x(t+i)$$

が成り立つ。

［証明］n についての数学的帰納法で証明する。

$n=0$ のとき，左辺$=\Delta^0 x(t) = x(t)$，右辺$=(-1)^0 {}_0\mathrm{C}_0 x(t) = x(t)$ で成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta^{k+1} x(t) &= \Delta(\Delta^k x(t)) \\
&= \Delta\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} {}_k\mathrm{C}_i\, x(t+i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} {}_k\mathrm{C}_i\, \Delta x(t+i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} {}_k\mathrm{C}_i \{x(t+i+1) - x(t+i)\} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} {}_k\mathrm{C}_i\, x(t+i+1) - \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} {}_k\mathrm{C}_i\, x(t+i)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{k-i+1}{}_k\mathrm{C}_{i-1}x(t+i)-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}{}_k\mathrm{C}_i x(t+i) \quad \text{←第 1 項は } i \text{ を } i-1 \text{ と置きなおした}$$

$$=(-1)^0{}_k\mathrm{C}_k x(t+k+1)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i+1}({}_k\mathrm{C}_{i-1}+{}_k\mathrm{C}_i)x(t+i)-(-1)^k{}_k\mathrm{C}_0 x(t)$$

$$=x(t+k+1)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_i x(t+i)+(-1)^{k+1}x(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k-i+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_i x(t+i)+(-1)^{k+1}{}_k\mathrm{C}_0 x(t)$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

したがって数学的帰納法により，すべての負でない整数 n について成り立つ。■

定理 2.3　（Newton の補間法）$\{x(t)\}$ を数列とし，n を正の整数とする。$\{x(t)\}$ は,

$x(0)=c_0$，$x(1)=c_1$，…，$x(n)=c_n$ （c_0，c_1，…，c_n は実数の定数）

をみたすとする。

このとき（高々）n 次多項式 $P(t)$ で,

$P(0)=c_0$，$P(1)=c_1$，…，$P(n)=c_n$

となるものは,

$$P(t)=x(0)+\frac{\Delta^1 x(0)}{1!}t^{(1)}+\frac{\Delta^2 x(0)}{2!}t^{(2)}+\cdots+\frac{\Delta^n x(0)}{n!}t^{(n)}$$

である。

［証明］求める多項式を

$$P(t)=a_0+a_1t^{(1)}+a_2t^{(2)}+\cdots+a_nt^{(n)} \qquad \cdots \quad ①$$

とする。両辺に $t=0$ を代入すれば $P(0)=a_0$ より,

$$a_0=P(0)=x(0)$$

である。

①式の両辺の第 1 差分をとれば

$$\Delta P(t)=a_1+2a_2t^{(1)}+\cdots+na_nt^{(n-1)}$$

であるから，両辺に $t=0$ を代入すれば $\Delta P(0)=a_1$ より,

$$a_1=\frac{\Delta P(0)}{1!}=\frac{\Delta x(0)}{1!}$$

である。

①式の両辺の第 2 差分をとれば

$$\Delta^2 P(t)=2a_2+3\cdot 2a_3t^{(1)}+\cdots+n(n-1)a_nt^{(n-2)}$$

であるから，両辺に $t=0$ を代入すれば $\Delta^2 P(0)=2a_2$ より,

$$a_2=\frac{\Delta^2 P(0)}{2!}=\frac{\Delta^2 x(0)}{2!}$$

である。

①式の両辺の第 3 差分をとれば

$$\Delta^3 P(t)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4 t^{(1)}+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n t^{(n-3)}$$

であるから，両辺に $t=0$ を代入すれば$\Delta^3 P(0)=3\cdot 2a_3$ より，

$$a_3=\frac{\Delta^3 P(0)}{3!}=\frac{\Delta^3 x(0)}{3!}$$

である。

以下同様にして$\Delta^k P(0)=k!a_k$ （$1\leqq k\leqq n$） より，

$$a_k=\frac{\Delta^k P(0)}{k!}=\frac{\Delta^k x(0)}{k!}$$

である。以上より得られる。■

例　2.4　(1) 数列$\{x(t)\}$ は

$$x(0)=1\text{ ，}x(1)=3\text{ ，}x(2)=11\text{ ，}x(3)=25$$

をみたす。$\{x(t)\}$ を定理 2.3 を用いて高々3 次多項式$P(t)$ を用いて表そう。

第 3 差分までを表にすると，

	$x(\mathrm{t})$	$\Delta^1 x(\mathrm{t})$	$\Delta^2 x(\mathrm{t})$	$\Delta^3 x(\mathrm{t})$
0	**1**	**2**	**6**	**0**
1	3	8	6	
2	11	14		
3	25			

であるから，

$$\begin{aligned}P(t)&=1+\frac{2}{1!}t^{(1)}+\frac{6}{2!}t^{(2)}+\frac{0}{3!}t^{(3)}\\&=1+2t+3t(t-1)+0t(t-1)(t-2)\\&=1+2t+3t^2-3t\\&=1-t+3t^2\end{aligned}$$

である。

(2) $\sin 1.00=0.84147$，$\sin 1.05=0.86742$，$\sin 1.10=0.89121$，$\sin 1.15=0.91276$ であることを用いて $\sin 1.06$ の近似値を求めよう。

$x(t)=\sin(0.05t+1.00)$ とおくと，

$$\begin{aligned}x(0)&=\sin 1.00=0.84147\\x(1)&=\sin 1.05=0.86742\\x(2)&=\sin 1.10=0.89121\\x(3)&=\sin 1.15=0.91276\end{aligned}$$

である。

いま，かりに$x(t)$ の定義域を実数全体とすれば，$\sin 1.06=x(1.2)$ である。

$\{x(t)\}$ を定理 2.3 を用いて多項式$P(t)$ で表し，$x(1.2)$ の値を$P(1.2)$ で近似しよう。

第 3 差分までを表にすると，

	$x(t)$	$\Delta^1 x(t)$	$\Delta^2 x(t)$	$\Delta^3 x(t)$
0	**0.84147**	**0.02595**	**-0.00216**	**-0.00008**
1	0.86742	0.02379	-0.00224	
2	0.89121	0.02155		
3	0.91276			

であるから，

$$P(t)=0.84147+\frac{0.02595}{1!}t^{(1)}+\frac{-0.00216}{2!}t^{(2)}+\frac{-0.00008}{3!}t^{(3)}$$

$$=0.84147+\frac{0.02595}{1}t-\frac{0.00216}{2}t(t-1)-\frac{0.00008}{6}t(t-1)(t-2)$$

$\sin 1.06=x(1.2)\fallingdotseq P(1.2)$

$$=0.84147+\frac{0.02595}{1}\times1.2-\frac{0.00216}{2}\times1.2(1.2-1)-\frac{0.00008}{6}\times1.2(1.2-1)(1.2-2)$$

$$=0.87237$$

である。

（注意）実際，$\sin 1.06=0.872355482\cdots$である。

(3) （例 1.7 の別解）$P(t)=-1-2t-t^2+3t^3$ を階乗数列$t^{(n)}$ （$0\leqq n\leqq 3$）で表してみよう。

$x(t)=P(t)$ とおくと，

$x(0)=-1-2\times0-0^2+3\times0^3=-1$

$x(1)=-1-2\times1-1^2+3\times1^3=-1$

$x(2)=-1-2\times2-2^2+3\times2^3=15$

$x(3)=-1-2\times3-3^2+3\times3^3=65$

である。

$\{x(t)\}$ を定理 2.3 を用いて$t^{(n)}$ の 3 次多項式で表そう。

第 3 差分までを表にすると，

	$x(t)$	$\Delta^1 x(t)$	$\Delta^2 x(t)$	$\Delta^3 x(t)$
0	**-1**	**0**	**16**	**18**
1	-1	16	34	
2	15	50		
3	65			

であるから，

$$P(t)=-1+\frac{0}{1!}t^{(1)}+\frac{16}{2!}t^{(2)}+\frac{18}{3!}t^{(3)}$$

$$=-1+8t^{(2)}+3t^{(3)}$$

である。

参考 2.5　（Lagrange の補間法）定理 2.3 の補間法の他に次のような方法も知られている。

$\{x(t)\}$ を数列とし，n を正の整数とする。$\{x(t)\}$ は,

$$x(t_0)=c_0,\ x(t_1)=c_1,\ \cdots,\ x(t_n)=c_n\quad (c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_n \text{は実数の定数})$$

をみたすとする。

このとき（高々）n 次多項式 $P(t)$ で,

$$P(t_0)=c_0,\ P(t_1)=c_1,\ \cdots,\ P(t_n)=c_n$$

となるものは,

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)}$$

である。

［証明］ほぼ明らかなので証明省略。■

例　2.6　（例 2.4(1)の問題）　数列 $\{x(t)\}$ は

$$x(0)=1,\ x(1)=3,\ x(2)=11,\ x(3)=25$$

をみたす。$\{x(t)\}$ を参考 2.5 を用いて高々3 次多項式 $P(t)$ を用いて表そう。

$$P(t)=1\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+3\frac{(t-0)(t-2)(t-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$+11\frac{(t-0)(t-1)(t-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+25\frac{(t-0)(t-1)(t-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$=1\frac{t^3-6t^2+11t-6}{-6}+3\frac{t^3-5t^2+6t}{2}+11\frac{t^3-4t^2+3t}{-2}+25\frac{t^3-3t^2+2t}{6}$$

$$==3t^2-t+1$$

となり，例 2.4(1)と同じ結果が得られる。■

第 3 章　不定和分

この章では，不定和分を定義し，その性質を調べる。不定積分に積分定数だけの違いが生じるのと同様，不定和分には和分定数だけの違いが生じる。不定積分の場合とほぼ同じような公式が成り立ち，部分積分の公式と同じように部分和分の公式が導かれる。

定義 3.1　$\{x(t)\}$ を数列とする。このとき

$$\Delta \mathrm{X}(t)=x(t)$$

となる数列$\{\mathrm{X}(t)\}$ を$\{x(t)\}$ の**不定和分**といい，$\mathrm{X}(t)$ を$\Delta^{-1}x(t)$ と表す。

注意 3.2　(1) 定義より明らかに$\Delta(\Delta^{-1}x(t))=x(t)$ である。

(2) $\{x(t)\}$ の不定和分は定数の差を除いて一意である。

すなわち，$\{\mathrm{X}_1(t)\}$，$\{\mathrm{X}_2(t)\}$ がともに$\{x(t)\}$ の不定和分

$\Longrightarrow$　次のような定数 C がある。　任意の整数 t に対して$\mathrm{X}_2(t)-\mathrm{X}_1(t)=C$

［この C を**和分定数**という。］

［(2)の証明］仮定より$\Delta\mathrm{X}_1(t)=\Delta\mathrm{X}_2(t)(=x(t))$ であるから，$\Delta(\mathrm{X}_2-\mathrm{X}_1)(t)=0$ である。

いま，$\mathrm{Y}(t)=(\mathrm{X}_2-\mathrm{X}_1)(t)$ とおくと，$\Delta\mathrm{Y}(t)=0$ より$\mathrm{Y}(t+1)-\mathrm{Y}(t)=0$ である。よって$\mathrm{Y}(t+1)=\mathrm{Y}(t)$ となり$\mathrm{Y}(t)$ は t の値によらず定数 C である。

したがって，$\mathrm{X}_2(t)-\mathrm{X}_1(t)=C$ である。■

命題 3.3　(1) a，b を実数の定数とする。$n\neq-1$ のとき，

$$\Delta^{-1}t^{(n)}=\frac{t^{(n+1)}}{n+1}+C \qquad (C\text{ は和分定数})$$

$$\Delta^{-1}(at+b)^{(n)}=\frac{(at+b)^{(n+1)}}{(n+1)a}+C \qquad (C\text{ は和分定数})$$

(2) $a\neq 0,1$ のとき，

$$\Delta^{-1}a^{t}=\frac{a^{t}}{a-1}+C \qquad (C\text{ は和分定数})$$

したがって特に，

$$\Delta^{-1}2^{t}=2^{t}+C \qquad (C\text{ は和分定数})$$

［証明］(1)（前半）$\Delta\left(\dfrac{t^{(n+1)}}{n+1}+C\right)=\dfrac{\Delta t^{(n+1)}}{n+1}+\Delta C=\dfrac{(n+1)t^{(n)}}{n+1}+0=t^{(n)}$ より明らか。

（後半）および(2)も同様。■

命題 3.4　$\{x(t)\}$，$\{y(t)\}$ を数列とし，c を実数の定数とする。

任意の整数 t に対して次の(1)，(2)の事項が成り立つ。

(1) $\Delta^{-1}(x+y)(t)=\Delta^{-1}x(t)+\Delta^{-1}y(t)$，

(2) $\Delta^{-1}(cx)(t)=c\Delta^{-1}x(t)$

ここで，等号は和分定数の違いを除いて等しいことを表す。

［証明］(1)（前半）$\Delta\{\Delta^{-1}(x+y)(t)-(\Delta^{-1}x(t)+\Delta^{-1}y(t))\}=0$ を示せばよい。実際,

$$
\begin{aligned}
&\Delta\{\Delta^{-1}(x+y)(t)-(\Delta^{-1}x(t)+\Delta^{-1}y(t))\}\\
&=\Delta(\Delta^{-1}(x+y)(t))-\Delta(\Delta^{-1}x(t))-\Delta(\Delta^{-1}y(t))\\
&=(x+y)(t)-x(t)-y(t)\\
&=x(t)+y(t)-x(t)-y(t)\\
&=0
\end{aligned}
$$

である。

(2) も同様。■

命題 3.5　（部分和分）$\{x(t)\}$，$\{y(t)\}$ を数列とする。任意の整数 t に対して,

$$\Delta^{-1}(x(t)\Delta y(t))=x(t)y(t)-\Delta^{-1}(\Delta x(t)y(t+1))$$

が成り立つ。

ここで，等号は和分定数の違いを除いて等しいことを表す。

［証明］命題 1.4(3)より $\Delta(xy)(t)=(\Delta x(t))y(t+1)+x(t)(\Delta y(t))$ であるから,

$$x(t)(\Delta y(t))=\Delta(xy)(t)-(\Delta x(t))y(t+1)$$

である。よって,

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-1}(x(t)\Delta y(t))&=\Delta^{-1}(\Delta(xy)(t)-\Delta x(t)y(t+1))\\
&=\Delta^{-1}(\Delta(xy)(t))-\Delta^{-1}(\Delta x(t)y(t+1))\\
&=(xy)(t)-\Delta^{-1}(\Delta x(t)y(t+1))
\end{aligned}
$$

となる。■

例　3.6

(1) $\Delta^{-1}(t^3-3t^2+t-3)$

$$
\begin{aligned}
&=\Delta^{-1}(t^{(3)}-t^{(1)}-3)\\
&=\frac{t^{(4)}}{4}-\frac{t^{(2)}}{2}-3t^{(1)}+C\\
&=\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4}-\frac{t(t-1)}{2}-3t+C\\
&=\frac{t^4-6t^3+11t^2-6t}{4}-\frac{t^2-t}{2}-3t+C\\
&=\frac{t^4-6t^3+9t^2-16t}{4}+C \qquad (C\text{ は和分定数})
\end{aligned}
$$

0	1	-3	1	-3
		0	0	0
1	1	-3	1	-3
		1	-2	
2	1	-2	-1	
		2		
	1	0		

(2) $\Delta^{-1}(t(t+1)(t+2))$

$$
\begin{aligned}
&=\Delta^{-1}(t+2)^{(3)}\\
&=\frac{(t+2)^{(4)}}{4}+C
\end{aligned}
$$

$$=\frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4}+C$$

$$=\frac{t^4+2t^3-t^2-2t}{4}+C$$ （C は和分定数）

(3) $\Delta^{-1}((2t+3)(2t+1)(2t-1))$

$=\Delta^{-1}((2t+3)(2(t-1)+3)(2(t-2)+3))$

$=\Delta^{-1}(2t+3)^{(3)}$

$$=\frac{(2t+3)^{(4)}}{4\times 2}+C$$

$$=\frac{(2t+3)(2t+1)(2t-1)(2t-3)}{8}+C$$

$$=\frac{16t^4-40t^2+9}{4}+C$$

$=2t^4-5t^2+C'$ （C' は和分定数 $C'=\frac{9}{4}+C$）

(4) $\Delta^{-1}(t\cdot 2^t)$

$x(t)=t$, $\Delta y(t)=2^t$ とする。$y(t)=2^t$ であるから命題 3.5 より,

$\Delta^{-1}(t\cdot 2^t)$

$=t\cdot 2^t-\Delta^{-1}(\Delta t\cdot 2^{t+1})$

$=t\cdot 2^t-\Delta^{-1}(2^{t+1})$

$=t\cdot 2^t-2\Delta^{-1}(2^t)$

$=t\cdot 2^t-2\cdot 2^t+C$

$=(t-2)2^t+C$ （C は和分定数）■

第 4 章　定和分

この章では，定和分とよばれる数列の和が不定和分の値の差で計算できることを示す。また，定積分の部分積分の公式と同じように定和分の部分和分の公式が導かれる。

さらに，具体的な例で数列の和を計算する。

関数の場合に用いた記号と同様に，数列$\{\mathrm{X}(t)\}$ と整数 m, n に対して，$\mathrm{X}(n)-\mathrm{X}(m)$ を$[\mathrm{X}(t)]_m^n$ で表す。

定理 4.1　$\{x(t)\}$ を数列とし，m，n を $m<n$ なる整数とする。このとき，

$$\sum_{t=m}^{n-1} x(t)=[\Delta^{-1}x(t)]_m^n$$

が成り立つ。

［これを数列$\{x(t)\}$ の m から n までの**定和分**という。］

［証明］$\Delta^{-1}x(t)=\mathrm{X}(t)$ とおく。このとき，$\Delta\mathrm{X}(t)=\Delta(\Delta^{-1}x(t))=x(t)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\sum_{t=m}^{n-1} x(t) &= \sum_{t=m}^{n-1} \Delta\mathrm{X}(t) \\
&=\Delta\mathrm{X}(m)+\Delta\mathrm{X}(m+1)+\Delta\mathrm{X}(m+2)+\cdots+\Delta\mathrm{X}(n-1) \\
&=(\cancel{\mathrm{X}(m+1)}-\mathrm{X}(m)) \\
&\quad+(\cancel{\mathrm{X}(m+2)}-\cancel{\mathrm{X}(m+1)}) \\
&\quad+(\cancel{\mathrm{X}(m+3)}-\cancel{\mathrm{X}(m+2)}) \\
&\quad+\cdots \\
&\quad+(\mathrm{X}(n)-\cancel{\mathrm{X}(n-1)}) \\
&=\mathrm{X}(n)-\mathrm{X}(m) \\
&=[\Delta^{-1}x(t)]_m^n
\end{aligned}$$

となる。■

命題 4.2　（部分和分）$\{x(t)\}$，$\{y(t)\}$ を数列とし，m，n を $m<n$ なる整数とする。このとき，

$$\sum_{t=m}^{n-1} x(t)\Delta y(t)=[x(t)y(t)]_m^n-\sum_{t=m}^{n-1}\Delta x(t)y(t+1)$$

が成り立つ。

［証明］命題 3.5 より，

$$\Delta^{-1}(x(n)\Delta y(n))=x(n)y(n)-\Delta^{-1}(\Delta x(n)y(n+1)) \qquad \cdots \quad ①$$

$$\Delta^{-1}(x(m)\Delta y(m))=x(m)y(m)-\Delta^{-1}(\Delta x(m)y(m+1)) \qquad \cdots \quad ②$$

が成り立つ。①－②より，

$$\begin{aligned}
&\Delta^{-1}(x(n)\Delta y(n))-\Delta^{-1}(x(m)\Delta y(m)) \\
&\quad=(x(n)y(n)-x(m)y(m))-\{\Delta^{-1}(\Delta x(n)y(n+1))-\Delta^{-1}(\Delta x(n)y(n+1))\}
\end{aligned}$$

すなわち，

$$[\Delta^{-1}(x(t)\Delta y(t))]_m^n=[x(t)y(t)]_m^n-[\Delta^{-1}(\Delta x(t)y(t+1))]_m^n$$

となるから定理 5.1 より

$$\sum_{t=m}^{n-1}x(t)\Delta y(t)=[x(t)y(t)]_m^n-\sum_{t=m}^{n-1}\Delta x(t)y(t+1)$$

が得られる。■

例　4.3　n を正の整数とする。

(1) $1+2+3+\cdots+n$

$$=\sum_{t=1}^{n}t$$

$$=\sum_{t=1}^{n}t^{(1)}$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^{(2)}\right]_1^{n+1}$$

$$=\left[\frac{1}{2}t(t-1)\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)n-\frac{1}{2}\times 1\times 0$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\sum_{t=1}^{n}t^2$$

$$=\sum_{t=1}^{n}(t^{(2)}+t^{(1)})$$

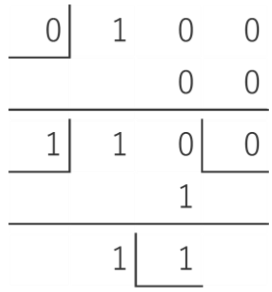
$$=\left[\frac{1}{3}t^{(3)}+\frac{1}{2}t^{(2)}\right]_1^{n+1}$$

$$=\left[\frac{1}{3}t(t-1)(t-2)+\frac{1}{2}t(t-1)\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)n\{2(n-1)+3n\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$



(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

$$=\sum_{t=1}^{n}t^3$$

0	1	0	0	0
		0	0	0
1	1	0	0	0
		1	1	
2	1	1	1	
		2		
	1	3		

$$=\sum_{t=1}^{n}(t^{(3)}+3t^{(2)}+t^{(1)})$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^{(4)}+t^{(3)}+\frac{1}{2}t^{(2)}\right]_{1}^{n+1}$$

$$=\left[\frac{1}{4}t(t-1)(t-2)(t-3)+t(t-1)(t-2)+\frac{1}{2}t(t-1)\right]_{1}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n-1)(n-2)+4(n-1)+2\}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n)$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(4) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$$=\sum_{t=1}^{n}t(t+1)$$

$$=\sum_{t=1}^{n}(t+1)^{(2)}$$

$$=\left[\frac{1}{3}(t+1)^{(3)}\right]_{1}^{n+1}$$

$$=\left[\frac{1}{3}(t+1)t(t-1)\right]_{1}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{3}(n+2)(n+1)n$$

(5) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

$$=\sum_{t=1}^{n}t(t+1)(t+2)$$

$$=\sum_{t=1}^{n}(t+2)^{(3)}$$

$$=\left[\frac{1}{4}(t+2)^{(4)}\right]_{1}^{n+1}$$

$$=\left[\frac{1}{4}(t+2)(t+1)t(t-1)\right]_{1}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}(n+3)(n+2)(n+1)n$$

(6) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t(t+1)}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}(t-1)^{(-2)}$$

$$=[-(t-1)^{(-1)}]_1^{n+1}$$

$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n+1}$$

$$=-\frac{1}{n+1}+1$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

(7) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t(t+1)(t+2)}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}(t-1)^{(-3)}$$

$$=\left[-\frac{1}{2}(t-1)^{(-2)}\right]_1^{n+1}$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t(t+1)}\right]_1^{n+1}$$

$$=-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}+\frac{1}{2\times1\times2}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

(8) $1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$

$$=\sum_{t=1}^{n}t\cdot2^t$$

ここで，$x(t)=t$ ，$\Delta y(t)=2^t$ とする。$\Delta x(t)=1$ ，$y(t)=2^t$ であるから命題 4.2 より

$$=[t\cdot2^t]_1^{n+1}-\sum_{t=1}^{n}1\cdot2^{t+1}$$

$$=(n+1)\cdot2^{n+1}-1\cdot2^1-4\cdot\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$=(n+1)\cdot2^{n+1}-2-4(2^n-1)$$

$$=(n-1)\cdot2^{n+1}+2 \blacksquare$$

第 5 章　差分方程式

この章では，差分方程式について学習する。高等学校の数学Ⅲでは，微分法は「発展」的な内容であり，しかも変数分離型のもののみ扱っている。そこで，この章では定数係数 1 階線型差分方程式について考察する。なお，これらの一部は高等学校の数学 B でも，「漸化式」として学習している。

定理 5.1　（1 階線型差分方程式）$\{x(t)\}$，$\{f(t)\}$ を数列とし，a，b を実数の定数とする。

(1)1 階同次線型差分方程式

$$x(t+1)-ax(t)=0$$

の解は次で与えられる。

$$x(t)=Ca^t$$

(2) 1 階非同次線型差分方程式

$$x(t+1)-ax(t)=f(t)$$

の解は次で与えられる。

$$x(t)=Ca^t+a^{t-1}\Delta^{-1}\left(\frac{f(t)}{a^t}\right)$$

したがって特に，

$$x(t+1)-ax(t)=b$$

の解は次で与えられる。

$$x(t)=Ca^t+\frac{b}{1-a}\qquad (a\neq 1 \text{ のとき})$$

$$x(t)=bt+C\qquad (a=1 \text{ のとき})$$

［C は初期値$x(0)$ により定まる定数で，**任意定数**という。］

［証明］(1) $x(t+1)-ax(t)=0$ より，$x(t+1)=ax(t)$ である。したがって，

$$\begin{aligned} x(t) &= ax(t-1) \\ &= a^2x(t-2) \\ &= \cdots \\ &= a^tx(0) \end{aligned}$$

であるから$x(0)=C$ とおけば得られる。

(2)（前半）（定数変化法で示す）(1)の解の任意定数 C を t の関数 $C(t)$とみて，

$$x(t)=C(t)a^t$$

とする。このとき，$C(t+1)a^{t+1}-aC(t)a^t=f(t)$ より$C(t+1)-C(t)=\frac{1}{a}\cdot\frac{f(t)}{a^t}$ すなわち，

$$\Delta C(t)=\frac{1}{a}\cdot\frac{f(t)}{a^t}$$

である。したがって，

$$C(t)=\frac{1}{a}\Delta^{-1}\left(\frac{f(t)}{a^t}\right)+C \qquad (C\text{は和分定数})$$

となる。$x(t)=C(t)a^t$ であるから，

$$x(t)=Ca^t+a^{t-1}\Delta^{-1}\left(\frac{f(t)}{a^t}\right)$$

が得られる。これが実際に解になることを確かめる。はじめの式に代入して，

$$x(t+1)-ax(t)=\left\{Ca^{t+1}+a^t\Delta^{-1}\left(\frac{f(t+1)}{a^{t+1}}\right)\right\}-\left\{Ca^{t+1}+a^t\Delta^{-1}\left(\frac{f(t)}{a^t}\right)\right\}$$

$$=a^t\Delta^{-1}\left(\frac{f(t+1)}{a^{t+1}}-\frac{f(t)}{a^t}\right)$$

$$=a^t\Delta^{-1}\left(\Delta\left(\frac{f(t)}{a^t}\right)\right)$$

$$=a^t\frac{f(t)}{a^t}$$

$$=f(t)$$

となる。

（後半）$f(t)=b$ の場合であるから，

$a\fallingdotseq 1$ のとき，

$$x(t)=Ca^t+a^{t-1}\Delta^{-1}\left(\frac{b}{a^t}\right)$$

$$=Ca^t+a^{t-1}b\Delta^{-1}\left(\left(\frac{1}{a}\right)^t\right)$$

$$=Ca^t+a^{t-1}b\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^t}{\frac{1}{a}-1}$$

$$=Ca^t+\frac{b}{1-a}$$

$a=1$ のとき

$$x(t)=C+\Delta^{-1}(b)$$

$$=C+bt$$

となる。■

例　5.2　(1) 1 階同次線型差分方程式

$$x(t+1)-3x(t)=0 \qquad \cdots \quad ①$$

$$x(0)=5 \qquad \cdots \quad ②$$

を解く。

①より　$x(t)=C\cdot 3^t$

②より　$C\cdot 3^0=5$　よって$C=5$

したがって，$x(t)=5\cdot 3^t$

(2) 1 階非同次線型差分方程式

$$x(t+1)-3x(t)=-2 \quad \cdots \quad ③$$
$$x(0)=5 \quad \cdots \quad ④$$

を解く。

③より　$x(t)=C\cdot 3^t+\dfrac{-2}{1-3}$

$=C\cdot 3^t+1$

④より　$C\cdot 3^0+1=5$　よって$C=4$

したがって，$x(t)=4\cdot 3^t+1$

(3) 1 階非同次線型差分方程式

$$x(t+1)-3x(t)=2^t \quad \cdots \quad ⑤$$
$$x(0)=5 \quad \cdots \quad ⑥$$

を解く。

⑤より　$x(t)=C\cdot 3^t+3^{t-1}\Delta^{-1}\left(\dfrac{2^t}{3^t}\right)$

$=C\cdot 3^t+3^{t-1}\Delta^{-1}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\right)$

$=C\cdot 3^t+3^{t-1}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^t}{\dfrac{2}{3}-1}$

$=C\cdot 3^t-2^t$

⑥より　$C\cdot 3^0-2^0=5$　よって$C=6$

したがって，$x(t)=6\cdot 3^t-2^t$ ■

参考 5.3　2 階線型差分方程式については次のような結果が知られている。

$\{x(t)\}$，$\{f(t)\}$ を数列とし，a，b を実数の定数とする。

(1)2 階同次線型差分方程式

$$x(t+2)+ax(t+1)+bx(t)=0 \quad \cdots \quad (☆)$$

の解は,

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t) \quad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

で与えられる。ここで$x_1(t)$，$x_2(t)$ は，2 次方程式

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

の 2 解を$\lambda=\lambda_1,\lambda_2$ とし，$D=a^2-4b$ とするときに,

(a) $D>0$ のとき，　$x_1(t)=\lambda_1^t$，$x_2(t)=\lambda_2^t$

(b) $D>0$ のとき，　$x_1(t)=\lambda_1^t$，$x_2(t)=t\lambda_1^t$　（この場合，$\lambda_1=\lambda_2$）

(c) $D>0$ のとき，　$x_1(t)=r^t\cos\theta t$，$x_2(t)=r^t\sin\theta t$　（この場合，$\overline{\lambda_1}=\lambda_2$，$r=|\lambda_1|=|\lambda_2|$，$\theta=\arg\lambda_1$）

である。

(2) 2 階非同次線型差分方程式

$$x(t+2)+ax(t+1)+bx(t)=f(t)$$

の解は,

$$x(t)=\text{（（☆）の解）}-\Delta^{-1}\left(\frac{x_2(t+1)}{D(t+1)}f(t)\right)x_1(t)+\Delta^{-1}\left(\frac{x_1(t+1)}{D(t+1)}f(t)\right)x_2(t)$$

で与えられる。ここで$D(t+1)$は,

$$D(t+1)=\begin{vmatrix} x_1(t+1) & x_2(t+1) \\ x_1(t+2) & x_2(t+2) \end{vmatrix}$$

である。

［証明］かなり複雑になるので証明省略。■

例　5.4　(1) 2 階同次線型差分方程式

$$x(t+2)-3x(t+1)+2x(t)=0 \qquad \cdots \ ①$$

$$x(0)=4\ ,\ x(1)=5 \qquad \cdots \ ②$$

を解く。参考 5.3 と同じ記号を用いる。

2 次方程式

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

の解は$\lambda=1$，2 である。$D=3^2-4\times2=1>0$ より，$x_1(t)=1^t=1$，$x_2(t)=2^t$ であるから①の解は,

$$x(t)=C_1+C_2\cdot2^t \qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である。

②より　$C_1+C_2=4$，$C_1+2C_2=5$ であるから$C_1=3, C_2=1$

したがって，$x(t)=3+2^t$

(2) 2 階非同次線型差分方程式

$$x(t+2)-3x(t+1)+2x(t)=3^t \qquad \cdots \ ③$$

$$x(0)=-\frac{1}{2}\ ,\ x(1)=\frac{7}{2} \qquad \cdots \ ④$$

を解く。参考 5.3 と同じ記号を用いる。

③で右辺$=0$ の場合の解は①で求めたように$x(t)=C_1+C_2\cdot2^t$（C_1，C_2は任意定数）である。

$x_1(t)=1^t=1$，$x_2(t)=2^t$ であるから

$$\begin{aligned} D(t+1)&=\begin{vmatrix} 1 & 2^{t+1} \\ 1 & 2^{t+2} \end{vmatrix} \\ &=1\times2^{t+2}-1\times2^{t+1} \\ &=2^{t+1}(2-1) \\ &=2^{t+1} \end{aligned}$$

である。また,

$$\Delta^{-1}\left(\frac{x_2(t+1)}{D(t+1)}f(t)\right)=\Delta^{-1}\left(\frac{2^{t+1}}{2^{t+1}}\cdot3^t\right)$$

$$=\Delta^{-1}(3^t)$$

$$=\frac{3^t}{3-1}$$

$$=\frac{3^t}{2}$$

$$\Delta^{-1}\left(\frac{x_1(t+1)}{D(t+1)}f(t)\right)=\Delta^{-1}\left(\frac{1}{2^{t+1}}\cdot 3^t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\Delta^{-1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^t}{\frac{3}{2}-1}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^t$$

である。したがって，

$$x(t)=C_1+C_2\cdot 2^t-\frac{3^t}{2}\times 1+\left(\frac{3}{2}\right)^t\times 2^t$$

$$=C_1+C_2\cdot 2^t-\frac{3^t}{2}+3^t$$

$$=C_1+C_2\cdot 2^t+\frac{3^t}{2}\qquad (C_1,\ C_2 \text{は任意定数})$$

である。

④より　$C_1+C_2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，$C_1+2C_2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$ であるから$C_1=-4, C_2=3$

したがって，$x(t)=-4+3\cdot 2^t+\frac{3^t}{2}$ ■

参考文献

［1］小林龍一　他『解析序説（ちくま学芸文庫)』，筑摩書房，2010.

［2］白岩　謙一　『常微分方程式論序説（ｻｲｴﾝｽﾗｲﾌﾞﾗﾘ現代数学への入門6)』，ｻｲｴﾝｽ社，1975.

［3］高橋陽一郎　『詳説数学Ⅲ』，(文部科学省検定済教科書)，啓林館，2012.

著者プロフィール

杉本　幸司（すぎもと　こうじ）

略歴　1965 年　北海道釧路市に生まれる。

1989 年　北海道大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了。

北海道立高等学校教諭，予備校講師を経て，

現在，私立札幌静修高等学校教諭。理学修士，修士（教育学)，博士（工学)。

専攻　確率過程論，エルゴード理論，数学科教育法，脳工学

著書　時をかける少年～時系列解析への入門～（ポレポレ出版，1993）

脳トレし MATH？（ぽすと出版，2008）

じっくり考える平面ベクトルと平面図形（文芸社，2013）

「複素数平面」で解く「図形と方程式」（学研プラス，2019）