このノートについて

北海道算数数学教育会高校部会研究部代数解析研究会（以下代数解析研究会）では，その例会において現代数学に関する理論を学び，その周辺の話題を研究してきている。

代数解析研究会の活動の柱は 3 つある。具体的には，

① 現代数学の勉強会

② 大学等の入試問題の研究

③ 北海道高等学校数学コンテストの実施

である。

中学・高校で学習する数学の内容をより高い位置から眺め，深く理解することは，数学全体での位置づけや他の事項との関連を認識し，いかに教えるかを意識することにもつながり，教科研究を深めることになると考えられるため①を一つの柱としている。

さらに現代数学理論の特殊な場合が大学入試問題として出題されることもあり，現代数学を学ぶことは②においても参考になる場合がある。当然，③の数学コンテストの問題のアイディアも数学的理論がもととなっていることがある。

現代数学の勉強会では，今まで長年 OB 会員の 関口　隆 先生が講師となって「関数解析」や「ガロア理論」を講義されてきたが，2020，21 年度は筆者（杉本）が「ルベーグ積分入門」「確率過程入門」の講義を担当することになった。

このノートは筆者が講義した内容のレクチャーノートである。もし参考になれば幸いである。なお，私たちの目的は数学の専門家になることではないので，講義の内容はその分野のすべてを網羅するものではもちろんなく，とくに必要な部分のみ限定し，難解部分は省略したり，その概略を述べたりするのにとどめている。

このノートを読んで代数解析研究会に興味を持っていただけたらご連絡いただきたい。また，本文中に誤りなどがあったら同じくご連絡いただきたい。

Ver.5.1

積分と確率の現代的アプローチ

― ルベーグ積分から確率論への入門 ―

もくじ

第 0 章　はじめに	2
第 1 章　測度空間	8
第 2 章　可測関数	12
第 3 章　ルベーグ積分	15
第 4 章　ラドン-ニコディム導関数	23
第 5 章　確率論の基本概念	30
第 6 章　マルチンゲール	40
第 7 章　おわりに	44
さくいん	50

札幌静修高等学校数学科

杉　本　幸　司

第 0 章　はじめに

この章では，これから学習する事項の導入部分として，高校数学の一つの問題を題材にして内容の一部を概観し，問題点を洗い出す。そののち，このノートの目的を述べ，全体の構成を示す。

まずは次の数学Ⅲの問題を解こう。

問題 0.1　n を正の整数とする。関数 $f(x)=\sqrt{x}$ に対して

$$I_k=\left\{x\middle|\frac{k-1}{n}\leqq f(x)<\frac{k}{n}\right\}\quad(1\leqq k\leqq n)$$

とおく。

(1) 各 I_k は，x 軸上の区間になることを示し，区間 I_k の幅 d_k を求めよ。

(2) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}d_k$$

を求めよ。

［略解］(1) $\frac{k-1}{n}\leqq\sqrt{x}<\frac{k}{n}$ より，$\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\leqq x<\left(\frac{k}{n}\right)^2$ であるから，$I_k=\left[\left(\frac{k-1}{n}\right)^2,\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$ なる区間である。したがって，

$$d_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2=\frac{2k-1}{n^2}$$

である。

(2) (1)より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}d_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\cdot\frac{2k-1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3k+1)$$

$$=\frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)+n\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\to\frac{2}{3}\ (n\to\infty)$$

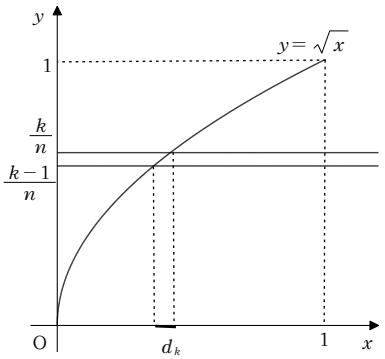
である。

(2)の別解　この極限の図形的意味を考えると

与式＝（$y=\sqrt{x}$，$x=1$，x 軸で囲まれる部分の面積）

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^1$$

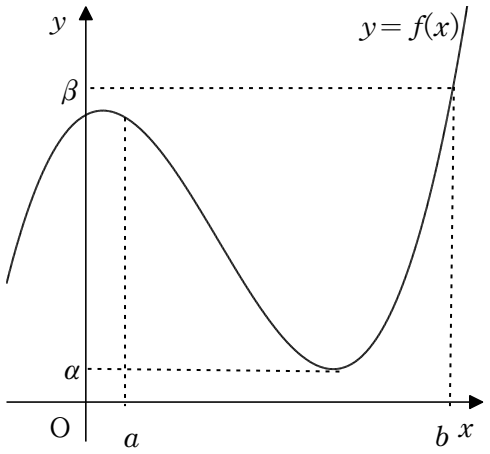


$$=\frac{2}{3}$$

である。

さて，この問題のルーツはなんであろうか。実はルーツは「ルベーグ積分」である。ここで，リーマン積分とルベーグ積分について“ざっくり”述べておこう。

注意 0.2　（リーマン積分とルベーグ積分の比較）ここでは簡単に，有界な区間を定義域とする有界な関数 $f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ を考えよう。



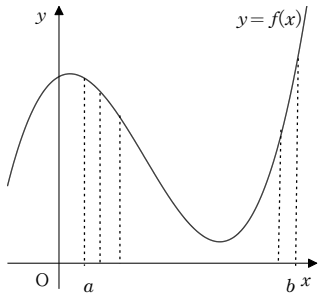
【リーマン積分】x 軸上の区間 $[a,b]$ の分割

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$$

（ただし，$\mathrm{Max}\{a_k-a_{k-1}\,|\,1\leqq k\leqq n\}\to 0$ ）を考えて，近似和の極限値

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)(a_k-a_{k-1})$$

（ただし，$a_{k-1}\leqq x_k\leqq a_k$ ）として定義した。



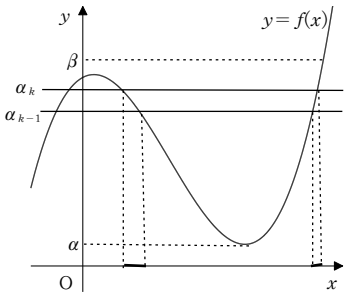
【ルベーグ積分】y 軸上の区間 $[\alpha,\beta]$ の分割

$$\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n=\beta$$

（ただし，$\mathrm{Max}\{\alpha_k-\alpha_{k-1}\,|\,1\leqq k\leqq n\}\to 0$ ）を考えて，x 軸上の集合

$$A_k=\{x\,|\,\alpha_{k-1}\leqq f(x)<\alpha_k\}\quad(1\leqq k\leqq n)\qquad\cdots\quad①$$

の“長さ”$\mu(A_k)$ を用いて，



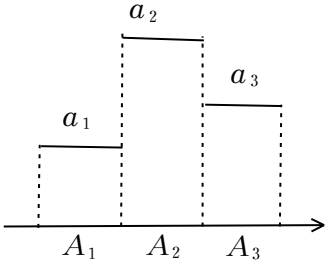
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k-1}\mu(A_k)$$

と定義するのである。

（注意）f が有限個の離散的な値 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ をとる場合には

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\mu(A_k)\qquad\cdots\quad②$$

とすればよい。



つまり，

「リーマン積分は縦に分割」「ルベーグ積分は横に分割」

である。この定義の違いで，「リーマン積分では成立しなかったことがルベーグ積分ではスムーズに成立しますよ」ということが多い。

ただし，この定義はざっくり言っただけであるが，細かく見てみるといくつかの問題点がある。たとえば，一般にはA_kは区間（の和集合）とは限らない。

［区間とならない例］関数$f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$（$\boldsymbol{R}$は実数全体の集合）を

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\boldsymbol{Q}\cap[0,1]\\ 0 & x\notin\boldsymbol{Q}\cap[0,1]\end{cases}$$

で定義する（$\boldsymbol{Q}$は有理数全体の集合)。このとき，$A=\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqq f(x)\leqq\frac{3}{2}\right\}=\boldsymbol{Q}\cap[0,1]$である。■

このような例をはじめとして，いくつかの疑問点が生じる。

まず，上のA_kの“長さ”って定義できるのだろうか。そもそも，

（疑問点 1）“長さ” が定義できる集合って何だろうか。

ということを解決したい。つまり，“長さ”が定義できる集合全体の集合を$\mathcal{M}$としよう。この$\mathcal{M}$を明確にしたい。

さらに，

（疑問点 2）“長さ”という概念を拡張しなければならないのではないか。

ということを解決したい。つまり，ある集合$A\in\mathcal{M}$に対してAの“長さ”に相当する量$\mu(A)$をどう考えたらよいのだろうか。

次に，実数値関数fに対して積分を考えたい。ここで，

（疑問点 3）関数fの積分を考えるためにはどのような条件が必要であろうか。

ということを解決したい。①のA_kを参考にすると，

$$\{x|\alpha\leqq f(x)<\beta\}\in\mathcal{M}$$

である必要があるのではないか。

そして今までの議論では関数fの定義域はすべて実数の区間であった。

（疑問点 4）関数fの定義域を一般の集合Xに拡張することができないだろうか。

さらに，

（疑問点 5）そのような関数に対しても積分が定義できるだろうか。

ということを解決したい。

まとめると，われわれの目標は

X　一般の集合

に対して，

$\mathcal{M}$　“長さ”を測ることができる集合を全部集めたもの

μ　“長さ”を測る“ものさし”

を明確にして，これらを元にして積分できる関数$f: X \to \boldsymbol{R}$の条件を考え，その上で積分

$$\int_X f(x)d\mu(x)$$　（μを強調するために通常このように書く）

を定義することである。

まずは関数fが離散的な値をとる場合について考えよう。この場合は②のように考えればよい。

例　0.3　（Xが実数（の区間）ではない，μが純粋な意味での長さではない例）

(1) Xを財布の中にあるコイン全体の集合とする。

関数$f: X \to \{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$を，コイン$x \in X$に対して，

$f(x)$ ＝コインxの額面

と定義する。さらに，

$A_k = \{x | f(x) = M_k\}$　（$1 \leqq k \leqq n$）（要するに額面がM_kのコイン全体の集合）

$\mu(A_k)$ ＝集合A_kの個数

とすれば，積分値

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu(A_k)$$

は，X（財布の中のコイン全体）の総額を表す。

(2) XをN枚の宝くじ全体の集合とする。

関数$f: X \to \{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$を，宝くじ$x \in X$に対して，

$f(x)$ ＝宝くじxの賞金

と定義する。さらに，

$A_k = \{x | f(x) = M_k\}$　（$1 \leqq k \leqq n$）（要するに賞金M_k円が当たった宝くじ全体の集合）

$$\mu(A_k) = \frac{A_k\text{の個数}}{N}$$ ＝賞金M_k円が当たる確率

とすれば，積分値

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu(A_k)$$

は，X（宝くじ全体）の賞金の期待値（期待金額）を表す。

このように，積分した値は必ずしも面積を表すだけとは限らない。

例 0.3(2)でも期待値の話が出てきたが，確率論の基礎にはルベーグ積分論があり，確率論を学ぶためにはこれらの知識が要求されることが想像されると思う。

このノートではまず第 1 章から第 4 章までの前半部分でルベーグ積分論の「基礎中の基礎」というべき内容を紹介する。

次に第 5 章と第 6 章では，前半部分で学んだルベーグ積分論を確率論に応用していく。そのことを実

感していただくために，次の問題を考えることにする。

1 個のさいころを投げて，出た目を得点とするゲームを行う。ただし，
①さいころは 10 回まで投げることができる。
②出た目を見たうえで 10 回より前に止めることもできる。
③新たにさいころを投げると直近の得点は無効になる。
④止めたときのさいころの目が得点になる。
このゲームでできるだけ高得点を狙うにはどのような戦略をとることが有利であるか。

さいころを 10 回まで投げることができるので 1 回ぐらいは 6 の目が出るだろうと予想して，最初の数回は 6 が出るまで挑戦して 6 点を手に入れようとするだろう。でもたまたま運が悪くしばらく投げても 6 の目が出ないかもしれない。そのようなときは 5 や 4 の目で妥協することも得策かもしれない。それでは 6 の目が出ることに固執して挑戦し続けるのは何回目までにしたらよいだろうか。そのあとは何の目が出たら止めるだろうか。どんな時に 10 回目まで挑戦するだろうか。要するに 1 回目から 9 回目について，どんな目が出たら止めて，どんな目が出たら次に挑戦するべきなのだろうか。

第 5 章と第 6 章はこの問題を解決することを目的として確率論の学習をしようというものである。この問題を解決するための最小限の確率論の学習をするのみなので，もちろん確率論を網羅するような性格のものではない。詳細は確率論の教科書を参照してほしい。そして第 7 章でこの問題の解答を導き出そう。

各章の概要について述べる。

第 0 章（本章）では，ルベーグ積分の導入となる説明と，確率論を学ぶきっかけとなるような問題を提起した。

第 1 章では（疑問点 1）と（疑問点 2）を受けて，ルベーグ積分のもととなる基礎的な空間，すなわち可測空間や測度空間について学習する。

第 2 章では（疑問点 3）を受けて，可測空間を定義域とする実数値関数である可測関数について学習する。

第 3 章では（疑問点 4）と（疑問点 5）を受けて，測度空間を基にして，ルベーグ積分を学習する。また，ルベーグ積分の重要な性質である収束定理について学習する。

第 4 章では，第 5 章以降で用いる「条件つき期待値」の存在のよりどころとなるラドン-ニコディム導関数について学習する。

第 5 章では，確率論の基本的概念を，測度論やルベーグ積分論に基づいて学習する。

第 6 章では，マルチンゲールとよばれる確率過程に対して，その定義と基本的性質，とくに任意停止定理について学ぶ。

第 7 章では，これらの知識を応用して，第 0 章で提起した問題の解答を導き出す。

上で述べたように第 1 章から第 4 章までがルベーグ積分論のごく一部であり，第 5 章と第 6 章が確率論の入り口に相当する内容である。これらには対応する，または類似している概念が少なくない。参考までに，ルベーグ積分の概念と確率論の概念とがどのように対応するか，さらに，確率論独特の理論もごく一部の項目だけ紹介する。

【対応する理論】

ルベーグ積分論		確率論
測度空間（X, $\mathcal{M}$, μ）	$\Longleftrightarrow$	確率空間（Ω , $\mathcal{F}$, P） $P(\Omega)=1$
ほとんどいたるところ　μ-a.e.	$\Longleftrightarrow$	ほとんど確実に　P-a.s.
$\mathcal{M}$-可測関数	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{F}$-確率変数
像測度	$\Longleftrightarrow$	確率分布
ルベーグ積分	$\Longleftrightarrow$	期待値
ラドン-ニコディム導関数	$\Longleftrightarrow$	条件つき期待値
フーリエ変換	$\Longleftrightarrow$	特性関数

etc…

【確率論独特の理論】

・独立性，大数の法則，中心極限定理

・確率過程（マルチンゲール，ブラウン運動，定常過程，マルコフ過程，…）

・確率積分，伊藤の公式，確率微分方程式

・時系列解析，ARMA 過程，KMO ランジュヴァン方程式

・エルゴード理論，カオス力学系

etc…

第 1 章　測度空間

この章では第 0 章の（疑問点 1）を受けて，まず，“長さ”に相当する量が定義できる集合全体の集合を定め，基礎となる空間の性質を考えたい。次に，その空間上に（疑問点 2）である“長さ”を拡張した概念を導入するために適当な“ものさし”を考え，その性質を調べよう。

定義 1.1　Xを空でない集合とする。
Xの部分集合を要素とする集合$\mathcal{M}$がXの**σ -加法族**（σ-additive class）とは，

(F1)　$X\in\mathcal{M}$

(F2)　$A\in\mathcal{M} \implies A^c\in\mathcal{M}$

(F3)　$A_1,A_2,\cdots$（可算個）$\in\mathcal{M} \implies \cup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$

をみたすことである。このとき，組（X, $\mathcal{M}$）を**可測空間**（measurable space）という。

（注意 1）$\phi\in\mathcal{M}$　（$\because \phi=X^c\in\mathcal{M}$）

（注意 2）(F3) は有限個$A_1,A_2,\cdots,A_N$でも成り立つ　（$\because k\geqq N+1$ に対して$A_k=\phi$ とすればよい）

（注意 3）(F3) で，$\cap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$も成り立つ　（$\because \cap_{n=1}^{\infty}A_n=\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n{}^c\right)^c\in\mathcal{M}$）

（注意 4）$A,B\in\mathcal{M}$, $A\subset B$のとき，$B\setminus A\in\mathcal{M}$　（$\because B\setminus A=A^c\cap B\in\mathcal{M}$）

例　1.2　(1) $X=\{1,2,3\}$ とする。

$\mathcal{M}_1=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$　（Xの部分集合の全体　これを2^X と表す）

$\mathcal{M}_2=\{\phi,\{1,2,3\}\}$　（自明な σ -加法族）

$\mathcal{M}_3=\{\phi,\{1\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

とすれば（X, $\mathcal{M}_k$）（$k=1,2,3$）は可測空間である。

(2) $X=[0,1]$ とする。（一般に$\boldsymbol{R}$の区間または$\boldsymbol{R}$自身でも同様）

$[0,1]$ の σ -加法族として$[0,1]$ の部分集合の全体$2^{[0,1]}$ はあまり適当ではない。通常は，

“ボレル加法族”または“ルベーグ可測加法族”

とよばれるものがよく用いられる。

［ここでは詳しくは述べないが，“ボレル加法族”は$[0,1]$ の開集合を含む最小の σ -加法族，“ルベーグ可測加法族”はボレル加法族を完備化したもの，または外側度から定義される σ -加法族］

$[0,1]$ とボレル加法族$\mathcal{B}$との組（$[0,1]$, $\mathcal{B}$）を**ルベーグ可測空間**（Lebesgue measurable space）という。また，$\mathcal{B}$の元を**ボレル集合**（Borel set）という。

定義 1.3　（X, $\mathcal{M}$）を可測空間とする。
$\mathcal{M}$を定義域とする集合関数$\mu:\mathcal{M}\to\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$が$\mathcal{M}$上の**測度**（measure）とは，

(M1)　任意の$A\in\mathcal{M}$に対して $\mu(A)\geqq 0$

(M2)　とくに，$\mu(\phi)=0$

(M3)　$A_1,A_2,\cdots$（可算個）$\in\mathcal{M}$, $A_i\cap A_j=\phi$ $(i\neq j)$　$\implies$　$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

をみたすことである。このとき，3 つ組（X, $\mathcal{M}$, μ）を**測度空間**（measure space）という。

（注意）（M3）は有限個$A_1,A_2,\cdots,A_N$でも成り立つ　（$\because k\geqq N+1$ に対して$A_k=\emptyset$ とすればよい）

命題 1.4　（X, $\mathcal{M}$, μ）を測度空間とする。このとき次の(1)～(3)が成り立つ。

(1) $A,B\in\mathcal{M}$, $A\subset B \implies \mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$

(2) $A,B\in\mathcal{M}$, $A\subset B \implies \mu(A)\leqq\mu(B)$

(3) $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{M} \implies \mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

［証明］(1) $B=A\cup(B\setminus A)$ と表され，$A\cap(B\setminus A)=\emptyset$ であるから，

$$\mu(B)=\mu(A\cup(B\setminus A))=\mu(A)+\mu(B\setminus A)$$

よって，$\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$ が成り立つ。

(2) (1)で，$\mu(B\setminus A)\geqq 0$ であるから$\mu(B)-\mu(A)\geqq 0$，したがって$\mu(A)\leqq\mu(B)$ が成り立つ。

(3) $B_1,B_2,\cdots$ を，

$$B_1=A_1,\quad B_n=\cup_{k=1}^{n}A_k\setminus\cup_{k=1}^{n-1}A_k\quad(n\geqq 2)$$

で定義する。このとき，各 $n\geqq 1$ に対して$B_n\in\mathcal{M}$ であり，

$$B_i\cap B_j=\emptyset\quad(i\neq j),\quad B_n\subset A_n,\quad \cup_{n=1}^{\infty}B_n=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$$

であるから，

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\mu(\cup_{n=1}^{\infty}B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

となる。■

例　1.5　ルベーグ可測空間（$[0,1]$, $\mathcal{E}$）に対しては，“ルベーグ測度”とよばれる測度l がある。これは直観的には“長さ”を一般化したもので，$[0,1]$ の区間$I=(a,b)$（$[a,b],(a,b],[a,b)$ でも同じ）に対して

$$l(I)=b-a$$

が成り立つものである。測度空間（$[0,1]$, $\mathcal{E}$, l）を**ルベーグ測度空間**（Lebesgue measure space）という。

たとえば，$[0,1]$ の有理数全体の集合$\boldsymbol{Q}\cap[0,1]$ に対して

$$l(\boldsymbol{Q}\cap[0,1])=0$$

が成り立つ。

［証明］$\boldsymbol{Q}\cap[0,1]$ は可算集合であるから$\boldsymbol{Q}\cap[0,1]=\{q_n|n=1,2,\cdots\}$ とする。

任意の$\varepsilon>0$ をとり固定する。

$$A_n=(q_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},q_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$$

とおけば$l(A_n)=\frac{\varepsilon}{2^n}$ である。

一方，$\boldsymbol{Q}\cap[0,1]\subset\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ であるから命題 1.4(2)と(3)より

$$0\leqq l(\boldsymbol{Q}\cap[0,1])\leqq l(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}l(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$

となるが，$\varepsilon>0$ は任意だから$l(\boldsymbol{Q}\cap[0,1])=0$ である。■

命題 1.6　(X, $\mathcal{M}$, μ) を測度空間とし，$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ とする。このとき次の(1)，(2)が成り立つ。

(1) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Longrightarrow \quad \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

(2) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，$\mu(A_1) < \infty \Longrightarrow \quad \mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

［証明］(1) $B_1, B_2, \cdots$ を，

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

で定義する。このとき，各 $n \geqq 1$ に対して $B_n = A_n \cap A_{n-1}{}^c \in \mathcal{M}$ であり，

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j), \quad A_n = \cup_{k=1}^{n} B_k, \quad \cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$$

である。したがって，

$$\mu(A_n) = \mu(\cup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

となる。

(2) $B_1, B_2, \cdots$ を，

$$B_n = A_1 \setminus A_n \quad (n \geqq 1)$$

で定義する。このとき，各 $n \geqq 1$ に対して $B_n = A_1 \cap A_n{}^c \in \mathcal{M}$ であり，

$$A_n \cap B_n = \emptyset$$

$$A_1 = A_n \cup B_n = (\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} B_n), \quad (\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \emptyset$$

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) &= \mu((\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} B_n)) \\
&= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) + \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \\
&= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) + \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \\
&= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\
&= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) + \lim_{n\to\infty} \{\mu(A_1) - \mu(A_n)\} \\
&= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) + \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

となるが，$\mu(A_1) < \infty$ であるから $\mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ となる。■

定義 1.7　(X, $\mathcal{M}$, μ) を測度空間とする。

$x \in X$ に関する命題 $p(x)$ が測度 μ に関して**ほとんどいたるところ**（almost everywhere）の $x \in X$ で成り立つとは

① 任意の $x \in N^c$ に対して $p(x)$ が成り立つ。

② $\mu(N)=0$

をみたす$N\in\mathcal{M}$ が存在することである。このとき，

$p(x)$　μ -a.e. $x\in X$　（または単に p　μ -a.e.）

と略記する（a.e.は almost everywhere の略）。

例　1.8　（$[0,1]$，$\mathcal{B}$，l ）をルベーグ測度空間とする。

関数$f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\boldsymbol{Q}\cap[0,1]\\ 0 & x\notin\boldsymbol{Q}\cap[0,1]\end{cases}$$

で定義する。このとき，

$f(x)=0$　l -a.e. $x\in[0,1]$

である。

［証明］$N=\{x\in[0.1]\,|\,f(x)\neq 0\}$ とすれば，$N=\boldsymbol{Q}\cap[0,1]\in\mathcal{B}$ である。このとき，

① 任意の$x\in N^c$ に対して$f(x)=0$ が成り立つ。

② $l(N)=l(\boldsymbol{Q}\cap[0,1])=0$　（例 1.5 より）

である。■

第 2 章　可測関数

第 0 章の（疑問点 3）を受けて，可測空間（X, $\mathcal{M}$）においては，実数値関数fに対して

$$\{x|\alpha \leqq f(x) < \beta\} \in \mathcal{M}$$

である必要があったことを思い出そう。この章では関数fに対して必要な条件を定め，その性質を調べよう。

命題 2.1　（X, $\mathcal{M}$）を可測空間とする。関数$f: X \to \boldsymbol{R}$に対して次の(1)～(4)は同値である。

(1) 任意の実数aに対して$\{x \in X | f(x) < a\} \in \mathcal{M}$

(2) 任意の実数aに対して$\{x \in X | f(x) \leqq a\} \in \mathcal{M}$

(3) 任意の実数aに対して$\{x \in X | f(x) \geqq a\} \in \mathcal{M}$

(4) 任意の実数aに対して$\{x \in X | f(x) > a\} \in \mathcal{M}$

［fが(1)～(4)のいずれか（したがってすべて）をみたすとき，**$\mathcal{M}$-可測**（$\mathcal{M}$-measurable）といい，関数fを**$\mathcal{M}$-可測関数**（$\mathcal{M}$-measurable function）または単に**可測関数**（measurable function）という。］

［証明］((1)$\Longleftrightarrow$(3)) $\{x \in X | f(x) < a\}^c = \{x \in X | f(x) \geqq a\}$ より明らか。

((2)$\Longleftrightarrow$(4)) $\{x \in X | f(x) \leqq a\}^c = \{x \in X | f(x) > a\}$ より明らか。

((2)$\Longrightarrow$(1)) $\{x \in X | f(x) < a\} = \cup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X | f(x) \leqq a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$ である。

((3)$\Longrightarrow$(4)) $\{x \in X | f(x) > a\} = \cup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X | f(x) \geqq a + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$ である。■

注意 2.2　（X, $\mathcal{M}$）を可測空間とする。

関数$f: X \to \boldsymbol{R}$が$\mathcal{M}$-可測のとき，たとえば

$$\{x \in X | f(x) \in [a,b)\} = \{x \in X | a \leqq f(x) < b\} = \{x \in X | f(x) \geqq a\} \cap \{x \in X | f(x) < b\} \in \mathcal{M}$$

となる。さらに一般に，$\boldsymbol{R}$の任意のボレル集合 A に対して

$$\{x \in X | f(x) \in A\} \in \mathcal{M}$$

となることが証明できる。

命題 2.3　（X, $\mathcal{M}$）を可測空間とし，$f,g: X \to \boldsymbol{R}$を可測関数とする。このとき次の(1)～(5)は可測関数である。

(1) kf（kは実数）(2) $f+g$　(3) $(f)^2$　(4) $f \cdot g$　(5) Max$\{f,g\}$，Min$\{f,g\}$

［証明］任意の実数 a をとり固定する。

(1) $k=0$ のときは明らか。

$k>0$ のとき $\{x|kf(x) < a\} = \left\{x | f(x) < \frac{a}{k}\right\} \in \mathcal{M}$

$k<0$ のとき $\{x|kf(x) < a\} = \left\{x | f(x) > \frac{a}{k}\right\} \in \mathcal{M}$

(2) $\{x|f(x)+g(x)<a\}=\{x|f(x)<-g(x)+a\}$

$=\cup_{r\in\boldsymbol{Q}}[\{x|f(x)<r\}\cap\{x|r<-g(x)+a\}]$

$=\cup_{r\in\boldsymbol{Q}}[\{x|f(x)<r\}\cap\{x|g(x)<a-r\}]\in\mathcal{M}$

(3) $a>0$ のとき $\{x|(f(x))^2<a\}=\left\{x|f(x)<\sqrt{a}\right\}\cap\left\{x|f(x)>-\sqrt{a}\right\}\in\mathcal{M}$

$a\leqq 0$ のとき $\{x|(f(x))^2<a\}=\phi\in\mathcal{M}$

(4) $f\cdot g=\frac{1}{4}\{(f+g)^2-(f-g)^2\}$ だから(1)～(3)より出る。

(5) $\{x|\mathrm{Max}\{f(x),g(x)\}<a\}=\{x|f(x)<a\}\cap\{x|g(x)<a\}\in\mathcal{M}$

$\{x|\mathrm{Min}\{f(x),g(x)\}<a\}=\{x|f(x)<a\}\cup\{x|g(x)<a\}\in\mathcal{M}$ ■

命題 2.4　$(X,\ \mathcal{M})$ を可測空間とし，$f_1,f_2,\cdots:X\to\boldsymbol{R}$ を可測関数とする。このとき次の(1)，(2)は可測関数である。

(1) $\sup_{n\geqq 1}f_n$，$\inf_{n\geqq 1}f_n$

(2) $\limsup_{n\to\infty}f_n$，$\liminf_{n\to\infty}f_n$　とくに $\lim_{n\to\infty}f_n=f$ が存在するとき，f は可測関数である。

［証明］任意の実数 a をとり固定する。

(1) $\{x|\sup_{n\geqq 1}f_n(x)<a\}=\cup_{k=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)<a-\frac{1}{k}\}\in\mathcal{M}$

$\{x|\inf_{n\geqq 1}f_n(x)<a\}=\cup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)<a\}\in\mathcal{M}$

(2) $\limsup_{n\to\infty}f_n=\inf_{n\geqq 1}\sup_{k\geqq n}f_k$，$\liminf_{n\to\infty}f_n=\sup_{n\geqq 1}\inf_{k\geqq n}f_k$ より明らか。■

定義 2.5　(1) A を X の部分集合とする。関数 $\chi_A:X\to\boldsymbol{R}$ を

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

で定義する。

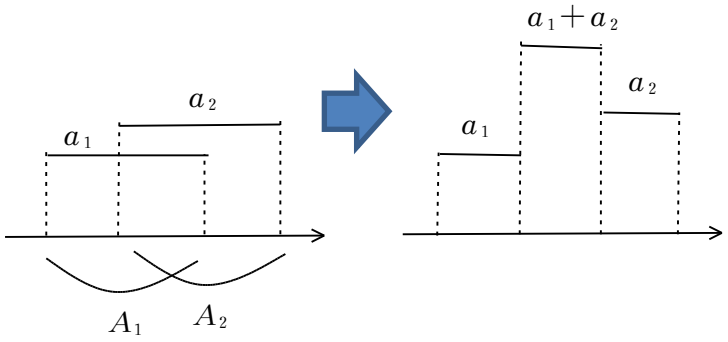
(2) 関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ が**単関数**（simple function）とは有限個の X の部分集合 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ があって，

$$f=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{A_k}\qquad(a_1,a_2,\cdots,a_N\in\boldsymbol{R})$$

と書けることである。

（注意 1）$(X,\ \mathcal{M})$ が可測空間で，$A_1,A_2,\cdots,A_N\in\mathcal{M}$　$\Longrightarrow$　f は $\mathcal{M}$-可測

（注意 2）$A_1,A_2,\cdots,A_N$ は互いに共通部分をもたないようにとれる。



次の定理 2.6 の証明は，注意 0.2 で指摘したように「ルベーグ積分は横に分割」の本質となるところである。

定理 2.6　$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする。

関数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ が $\mathcal{M}$-可測で，$f \geqq 0$ とする。

このとき $\mathcal{M}$-可測な単関数の列 $f_1, f_2, \cdots : X \to \boldsymbol{R}$ で，各点 $x \in X$ に対して

① $0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \cdots$

② $f_1(x), f_2(x), \cdots$ は $f(x)$ に収束する　$f_n(x) \nearrow f(x)$　$(n \to \infty)$

となるものがある。

［証明］$n \geqq 1$ に対して

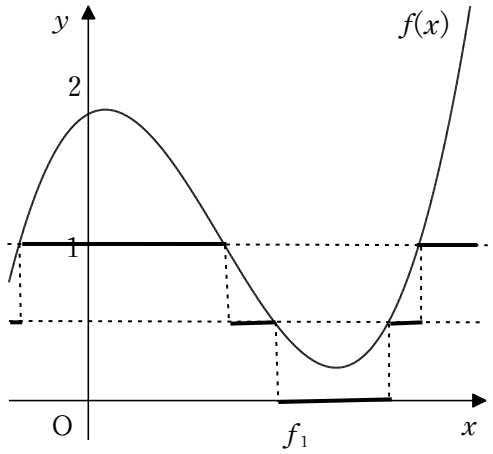
$$A(n,k) = \left\{ x \middle| \frac{k}{2^n} \leqq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} \qquad (0 \leqq k \leqq n2^n - 1)$$

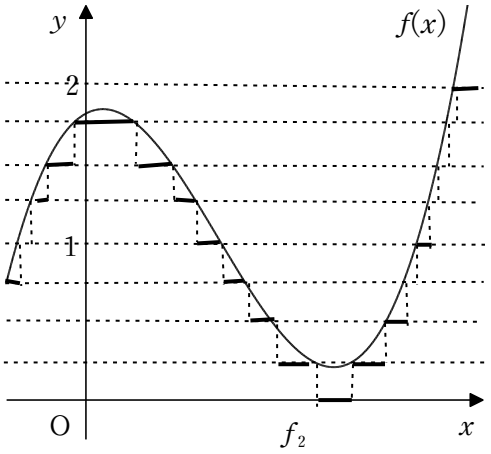
$$A(n, n2^n) = \{ x | f(x) \geqq n \}$$

とおき，

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{A(n,k)}$$

と定義する。このとき，f_n は $\mathcal{M}$-可測な単関数で，① $0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \cdots$ をみたす。





また，各点 $x \in X$ に対して十分大きな n をとれば，

$$0 \leqq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

であるから② $f_1(x), f_2(x), \cdots$ は $f(x)$ に収束する。■

第 3 章　ルベーグ積分

この章では第 0 章の（疑問点 4）と（疑問点 5）を受けて，実数の区間とは限らない，一般の測度空間上に定義された関数に対してその積分を定義し，積分の性質を調べよう。

定義 3.1　$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，$f: X \to \boldsymbol{R}$ を可測関数とする。

(1) f の**ルベーグ積分**（Lebesgue integral）

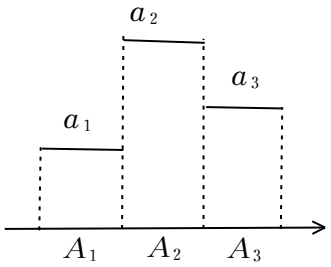
$$\int_X f d\mu \quad \left(\int_X f(x)d\mu(x)\ ,\ \int_X f(x)\mu(dx) \text{ とも書く}\right)$$

を 3 段階に分けて以下のように定義する。

(i) f が $\mathcal{M}$-可測な単関数で，$f \geqq 0$ のとき

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_k} \qquad (a_1, a_2, \cdots, a_N > 0)$$

と表され，$A_1, A_2, \cdots, A_N \in \mathcal{M}$ かつ $A_1, A_2, \cdots, A_N$ は互いに共通部分をもたないようにとる。このとき，



$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(A_k)$$

と定義する。

（注意 1）これは f の表し方によらない。（証明省略）

(ii) f が可測関数で，$f \geqq 0$ のとき

定理 2.6 より $\mathcal{M}$-可測な単関数の列 $f_1, f_2, \cdots : X \to \boldsymbol{R}$ で，各点 $x \in X$ に対して

① $0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \cdots$

② $f_1(x), f_2(x), \cdots$ は $f(x)$ に収束する　$f_n(x) \nearrow f(x)$　$(n \to \infty)$

となるものがある。このとき，

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

と定義する。

（注意 2）これは f に収束する単関数の列 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ のとり方によらない。（実はこの証明がとても長くてメンドウなので証明省略）

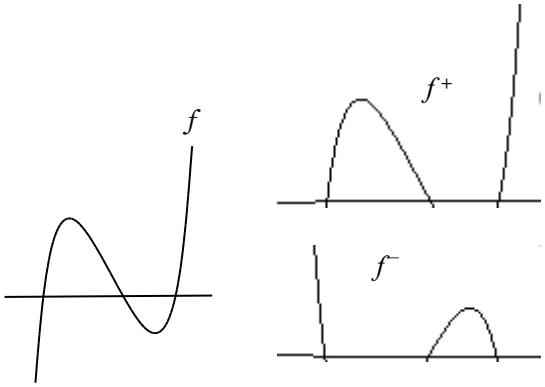
(iii) f が一般の可測関数のとき

$$f^+ = \mathrm{Max}\{f, 0\}\ ,\ f^- = \mathrm{Max}\{-f, 0\}$$

とおく。命題 2.3(5)より，f^+，f^- は可測関数であり，

$$f^+, f^- \geqq 0\ ,\quad f = f^+ - f^-$$

をみたす。このとき，



$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

と定義する。

(2) $A \in \mathcal{M}$ とする。$\chi_A \cdot f$ のルベーグ積分が確定するとき，

$$\int_A f d\mu = \int_X \chi_A \cdot f d\mu$$

と定義する。

例　3.2　（[0,1]，$\mathcal{B}$，l）をルベーグ測度空間とする。

関数 $f:[0,1] \to \boldsymbol{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \boldsymbol{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \notin \boldsymbol{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

で定義する。このとき

$$\int_{[0,1]} f dl = 1 \times l(\boldsymbol{Q} \cap [0,1]) + 0 \times l(\boldsymbol{Q}^c \cap [0,1]) = 0$$

となる。

（注意）この積分はリーマン積分では存在しない。

定義 3.3　（X, $\mathcal{M}$, μ）を測度空間，$f: X \to \boldsymbol{R}$ を可測関数とする。f が μ **-可積分**（μ -integrable）または単に**可積分**（integrable）とは，

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \quad , \quad \int_X f^- d\mu < \infty$$

の両方をみたすことである。

例　3.4　（[0,∞)，$\mathcal{B}$，l）をルベーグ測度空間とする。

関数 $f:[0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

で定義する。このとき f は可積分ではない。

［証明］$\int_{[0,\infty)} f^+ dl = \infty$ を示せば十分である。

正の整数 n に対して

$$A_n = \left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \right]$$

とすると，$A_i \cap A_j = \emptyset$　$(i \neq j)$　で，

$$\mu(A_n) = \frac{2\pi}{3}$$

である。$x \in A_n$ に対して，

$$f(x) \geqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{6} + 2n\pi} = \frac{1}{4\pi(n + \frac{1}{12})} \geqq \frac{1}{4\pi(n+1)}$$

であるから，

$$\int_{[0,\infty)} f^+ dl \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi(n+1)} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

となる。■

命題 3.5　（X, $\mathcal{M}$, μ）を測度空間，$f,g : X \to \boldsymbol{R}$ を可積分関数とする。このとき次の(1)〜(3)が成り立つ。

(1) $af+bg$ （a, b は実数）は可積分で，

$$\int_X (af+bg)d\mu = a\int_X f d\mu + b\int_X g d\mu$$

(2) $f \geqq g$　μ-a.e.　$\Longrightarrow$　$\int_X f d\mu \geqq \int_X g d\mu$

とくに $f=g$　μ-a.e.　$\Longrightarrow$　$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$

つまり，ほとんどいたるところ等しい関数の積分値は等しい。

(3) 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して　$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$　$\Longleftrightarrow$　$f=g$　μ-a.e.

［証明］(1), (2) いずれも非負単関数の場合，非負関数の場合，一般の場合の順に証明する。いずれも長くなるので証明省略。

(3) （$\Longrightarrow$）$h=f-g$ とおく。

任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して　$\int_A h d\mu = 0$　$\Longrightarrow$　$h=0$　μ-a.e.

を証明すればよい。いま，

$$A^+ = \{x \in X : h(x) \geqq 0\},\quad A^- = \{x \in X : h(x) < 0\}$$

とおく。A^+，$A^- \in \mathcal{M}$ であるから仮定より

$$\int_{A^+} h d\mu = 0,\quad \int_{A^-} h d\mu = 0$$

である。したがって，

$$\int_X h^+ d\mu = 0,\quad \int_X h^- d\mu = 0$$

となる。$|h| = h^+ + h^-$ であるから，

$$\int_X |h| d\mu = \int_X h^+ d\mu + \int_X h^- d\mu = 0$$

となる。よって任意の正の整数 n に対して，

$$0 = \int_X |h| d\mu$$

$$= \int_{\{x \in X : |h(x)| \geqq \frac{1}{n}\}} |h| d\mu + \int_{\{x \in X : |h(x)| < \frac{1}{n}\}} |h| d\mu$$

$$\geqq \int_{\{x\in X:|h(x)|\geqq\frac{1}{n}\}} |h| d\mu$$

$$\geqq \int_{\{x\in X:|h(x)|\geqq\frac{1}{n}\}} \frac{1}{n} d\mu$$

$$= \frac{1}{n}\mu(\{x\in X:|h(x)|\geqq\frac{1}{n}\})$$

であるから,

$$\mu(\{x\in X:|h(x)|>0\})$$

$$= \mu(\cup_{n=1}^{\infty}\{x\in X:|h(x)|\geqq\frac{1}{n}\})$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x\in X:|h(x)|\geqq\frac{1}{n}\})$$

$$\leqq 0$$

となり，$\mu(\{x\in X:|h(x)|>0\})=0$ である。

このことより，$|h(x)|=0$　μ -a.e. $x\in X$ となり，$h=0$　μ -a.e.である。

（$\Longleftarrow$）$f=g$　μ -a.e. とする。このとき任意の$A\in\mathcal{M}$に対して$\chi_A\cdot f=\chi_A\cdot g$　μ -a.e.であるから(2)より

$$\int_X \chi_A\cdot f d\mu = \int_X \chi_A\cdot g d\mu$$

すなわち$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ が得られる。■

積分に関する基本的な性質はいろいろある。ここでは「収束定理」のみを扱い，他の性質については専門書を参照されたい。

定理 3.6　単調収束定理（monotone convergence theorem）（X, $\mathcal{M}$, μ ）を測度空間とする。

$f_1, f_2, \cdots : X\to\boldsymbol{R}$ を可積分関数の列で,

① $0\leqq f_1\leqq f_2\leqq f_3\leqq\cdots$　μ -a.e.

② f_n がμ -a.e.でf に収束する　$f_n\nearrow f$ （$n\to\infty$）μ -a.e.

をみたすとする。このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ。

［証明］結論の式「$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ 」に対して≦と≧が同時に成り立つことを示す。

（≦）$f_n\leqq f$　μ -a.e.であるから命題 3.5(2)より $\int_X f_n d\mu \leqq \int_X f d\mu$ である。

$n\to\infty$とすれば得られる。

（≧）各$f_n\geqq 0$ に対して定理 2.6 より $\mathcal{M}$ -可測な単関数の列$f_{n,k}$ で

$f_{n,k} \nearrow f_n$ （$k \to \infty$）

となるものがある。

各 k に対して

$g_k = \mathrm{Max}\{f_{1,k}, f_{2,k}, \cdots, f_{k,k}\}$

とおく。このとき g_k は $\mathcal{M}$-可測な単関数の列で,

① $g_1 \leqq g_2 \leqq g_3 \leqq \cdots$ μ-a.e.

② $f_{n,k} \leqq g_k \leqq f_k$ μ-a.e.（$n \leqq k$）

をみたしている。

g_1		g_2		g_3		g_4		
$f_{1,1}$	$\leqq$	$f_{1,2}$	$\leqq$	$f_{1,3}$	$\leqq$	$f_{1,4}$	$\nearrow$	f_1
								$\shortparallel\wedge$
$f_{2,1}$	$\leqq$	$f_{2,2}$	$\leqq$	$f_{2,3}$	$\leqq$	$f_{2,4}$	$\nearrow$	f_2
								$\shortparallel\wedge$
$f_{3,1}$	$\leqq$	$f_{3,2}$	$\leqq$	$f_{3,3}$	$\leqq$	$f_{3,4}$	$\nearrow$	f_3
								$\shortparallel\wedge$
$f_{4,1}$	$\leqq$	$f_{4,2}$	$\leqq$	$f_{4,3}$	$\leqq$	$f_{4,4}$	$\nearrow$	f_4
								$\shortparallel\wedge$

②でまず $k \to \infty$ とすると

$f_n \leqq \lim_{k\to\infty} g_k \leqq f$ μ-a.e.

となる。次に $n \to \infty$ とすると

$f \leqq \lim_{k\to\infty} g_k \leqq f$ μ-a.e.

となるから，$\lim_{k\to\infty} g_k = f$ μ-a.e.である。

g_k は $\mathcal{M}$-可測な単関数の列だから f の積分の定義から

$$\lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu = \int_X f d\mu$$

である。一方，$f_k \geqq g_k$ より $\int_X f_k d\mu \geqq \int_X g_k d\mu$ であるから

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu \geqq \lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ。■

補題 3.7　ファトゥの補題（Fatou's lemma）（X, $\mathcal{M}$, μ）を測度空間，$f_1, f_2, \cdots : X \to \boldsymbol{R}$ を可積分関数の列とする。このとき次の(1)，(2)が成り立つ。

(1) $f_n \geqq g$ μ-a.e. となる可積分関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ が存在する

$$\Longrightarrow \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

(2) $f_n \leqq g$ μ-a.e. となる可積分関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ が存在する

$$\Longrightarrow \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geqq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

（注意）上極限，下極限の復習

①（定義）$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geqq 1}\sup_{k\geqq n} f_k$，$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geqq 1}\inf_{k\geqq n} f_k$

② $\lim_{n\to\infty} f_n$ は存在するとは限らない（振動するかもしれない）が，$\limsup_{n\to\infty} f_n$，$\liminf_{n\to\infty} f_n$ は$\pm\infty$も込めて必ず存在し，$\liminf_{n\to\infty} f_n \leqq \limsup_{n\to\infty} f_n$ が成り立つ。

③ ②で，等号が成り立つのは，$\lim_{n\to\infty} f_n$ が（$\pm\infty$も込めて）存在するときである。

さらにこのとき，$\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n$

④ $\liminf_{n\to\infty}(-f_n) = -\limsup_{n\to\infty} f_n$

［証明］(1) $h_n = \inf_{k\geqq n}(f_k - g)$ とおく。このとき，$h_n \geqq 0$ で，$h_n \nearrow \liminf_{k\to\infty}(f_k - g)$ （$n\to\infty$）μ-a.e.である。よって，

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n - g)d\mu + \int_X g d\mu$$

$$= \int_X \liminf_{n\to\infty}(f_n - g)d\mu + \int_X g d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu + \int_X g d\mu \qquad (h_n \nearrow \liminf_{n\to\infty}(f_k - g) \text{ で単調収束定理})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_X \inf_{k\geqq n}(f_k - g)d\mu + \int_X g d\mu$$

$$\leqq \liminf_{n\to\infty}\int_X (f_n - g)d\mu + \int_X g d\mu \qquad (\inf_{k\geqq n}(f_k - g) \leqq f_n - g \quad \text{極限は存在を考慮})$$

$$= \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

(2) 仮定より $-f_n \geqq -g$ μ-a.e. で，$-f_n$，$-g$ も可積分だから(1)より

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(-f_n)d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty}\int_X (-f_n)d\mu$$

であるが，（注意）④より

$$-\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \leqq -\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

であるから成り立つ。■

定理 3.8　ルベーグの収束定理（Lebesgue's convergence theorem）（X, $\mathcal{M}$, μ）を測度空間とする。

$f_1, f_2, \cdots : X \to \boldsymbol{R}$ を可積分関数の列で

①（優関数条件）$|f_n| \leqq g$　μ-a.e.（$n=1,2, \cdots$）となる可積分関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ が存在する

②（収束条件）f_n がμ-a.e.でfに収束する。$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-a.e.

をみたすとする。このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ。

［証明］①より $-g \leqq f_n \leqq g$ であるから補題 3.7（ファトゥの補題）より

$$\int_X f d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

$$\int_X f d\mu = \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geqq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

となる。したがって，

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leqq \int_X f d\mu \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

となるが，補題 3.7（注意）②より $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leqq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ だからこれらは等しく

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ。■

例　3.9　$([0,1], \mathcal{B}, l)$ をルベーグ測度空間，m を正の整数とする。

n を正の整数として，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x(\cos m\pi x)^{2n} dl(x)$$

を求めよう。

$0 \leqq x \leqq 1$ に対して $f_n(x) = x(\cos m\pi x)^{2n}$ とする。

（優関数条件）任意の正の整数 n に対して

$$|f_n(x)| = |x||(\cos m\pi x)^{2n}| \leqq 1$$

であり，1 は可積分である。

（収束条件）まず，$(\cos m\pi x)^2$ について 2 つの場合に分けて考える。

① x が有理数で，$x = \frac{q}{p}$（既約 $0 < q \leqq p$）と表したとき，$p | m$ の場合

mx は整数になるので $(\cos m\pi x)^2 = 1$ である。

② それ以外のとき

mx は整数にならないので $0 \leqq (\cos m\pi x)^2 < 1$ である。

したがって，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x(\cos m\pi x)^{2n} = \begin{cases} x & \text{①の場合} \\ 0 & \text{②の場合} \end{cases}$$

である。ここで，

$$A = \{x \in [0,1] \mid \text{①が成り立つ}\}$$

とおけば，$A \in \mathcal{B}$ であり，$A \subset \boldsymbol{Q} \cap [0,1]$ であるから，例 1.5 より $l(A) = 0$ である。よって，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \mu\text{-a.e. } x \in [0,1]$$

である。

したがって定理 3.8（ルベーグの収束定理）より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} x(\cos m\pi x)^{2n} dl(x) = \int_{[0,1]} 0 dl = 0$$

である。

例　3.10　$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，$f: X\to \boldsymbol{R}$ を可積分関数とする。$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$，$A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ とし，$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする。このとき

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

が成り立つことを証明しよう。積分の定義より，

$$\int_X \chi_A \cdot f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_n} \cdot f d\mu$$

が成り立つことを証明する。いま，各正の整数 N に対して

$$g_N = \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \cdot f$$

とおく。$\sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \cdot f = \chi_{\cup_{n=1}^{N} A_n} \cdot f$ であることに注意しよう。

（優関数条件）任意の正の整数 N に対して

$$|g_N(x)| = |\chi_{\cup_{n=1}^{N} A_n}(x) \cdot f(x)| \leqq |f(x)|$$

であり，$|f|$ は可積分である。

（収束条件）任意の $x \in X$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} g_N(x) = \lim_{N\to\infty} \chi_{\cup_{n=1}^{N} A_n}(x) \cdot f(x) = \chi_A(x) \cdot f(x)$$

である。

したがって定理 3.8（ルベーグの収束定理）より

$$\int_X \chi_A \cdot f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X g_N d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X \chi_{A_n} \cdot f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_n} \cdot f d\mu$$

である。

第 4 章　ラドン-ニコディム導関数

この章では第 3 章で定義された積分を基にして，ラドン-ニコディム導関数について述べる。これは第 5 章で確率測度の条件つき期待値の存在を示す際に使われる。

定義 4.1　$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする。

$\mathcal{M}$ 上の実数値集合関数 $\varphi : \mathcal{M} \to \boldsymbol{R}$ が $\mathcal{M}$ 上の**符号つき測度**（signed measure）とは，定義 1.3 の（M2）と（M3），すなわち，

（M2）　$\varphi(\emptyset) = 0$

（M3）　$A_1, A_2, \cdots$（可算個）$\in \mathcal{M}$，$A_i \cap A_j = \emptyset$　$(i \neq j)$　$\Longrightarrow$　$\varphi\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$

をみたすことである。

（注意 1）（M3）は有限個 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ でも成り立つ

（注意 2）［符号つき測度 φ と測度 μ の違い］① μ は非負の値をとるが，φ は負の値をとってもよい。

② μ の値は ∞ になることもあるが，φ は $\pm\infty$ にはならない。

したがって，

φ が $\mathcal{M}$ 上の非負符号つき測度　$\Longleftrightarrow$　φ が $\mathcal{M}$ 上の有限測度

が成り立つ。

（注意 3）命題 1.4(1)，(3)や命題 1.6 の証明では，μ の非負性を用いていないので，これらは符号つき測度に対しても成り立つ。

定義 4.2　$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし，$\varphi : \mathcal{M} \to \boldsymbol{R}$ を $\mathcal{M}$ 上の符号つき測度，μ を $(X, \mathcal{M})$ の有限測度とする。

(1) φ が $\mathcal{M}$ において μ **-絶対連続**（μ -absolute continuous）とは，

$A \in \mathcal{M}$，$\mu(A) = 0$　$\Longrightarrow$　$\varphi(A) = 0$

をみたすことである。

(2) φ が $\mathcal{M}$ において μ **-特異**（μ -singular）とは，

$\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{M}$ があって，$\varphi(A) = \varphi(A \cap N)$　$(A \in \mathcal{M})$

をみたすことである。

（注意 1）φ，ψ が μ -絶対連続［μ -特異］　$\Longrightarrow$　$a\varphi + b\psi$ も μ -絶対連続［resp. μ -特異］

（注意 2）φ が μ -絶対連続かつ μ -特異　$\Longrightarrow$　$\varphi(A) = 0$（$A \in \mathcal{M}$）

［証明］φ が μ -特異だから $\mu(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{M}$ があって，$\varphi(A) = \varphi(A \cap N)$ である。

一方 $0 \leqq \mu(A \cap N) \leqq \mu(N) = 0$ より $\mu(A \cap N) = 0$ であるが，φ が μ -絶対連続だから $\varphi(A \cap N) = 0$ である。

よって $\varphi(A) = 0$ となる。■

例　4.3　$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ を可積分関数とする。このとき，

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu \left(= \int_X \chi_A \cdot f d\mu \right) \quad (A \in \mathcal{M})$$

とすればφは$\mathcal{M}$上のμ-絶対連続な符号つき測度である。

［証明］（φが$\mathcal{M}$上の符号つき測度であること）fは可積分であるから$\varphi(A)$は$\pm\infty$にはならない。

定義 4.1 の（M2），（M3）を確認する。

（M2）は明らか。

（M3）は例 3.10 より得られる。

（φがμ-絶対連続であること）$\mu(A)=0$ （$A\in\mathcal{M}$）のとき，ルベーグ積分の定義より明らかに

$$\varphi(A)=\int_A f d\mu=0$$

である。■

この章の目的は次の定理を証明することである。

定理 4.4　ラドン-ニコディムの定理（Radon-Nikodým theorem）（X, $\mathcal{M}$, μ）を有限測度空間，$\varphi:\mathcal{M}\to\boldsymbol{R}$を$\mathcal{M}$上の符号つき測度とする。このとき次の(1)～(3)が成り立つ。

(1) $\mathcal{M}$上の符号つき測度φ_c，φ_sで，次の①～③をみたすものがただ一つ存在する。

① φ_cはμ-絶対連続

② φ_sはμ-特異

③ **ルベーグ分解**（Lebesgue decomposition）$\varphi(A)=\varphi_c(A)+\varphi_s(A)$　　（$A\in\mathcal{M}$）

(2) φ_cに対して，

$$\varphi_c(A)=\int_A f d\mu \qquad (A\in\mathcal{M})$$

となる可積分関数$f: X\to\boldsymbol{R}$がμ-a.e.のちがいを除いてただ一つ存在する。

［fを$\frac{d\varphi_c}{d\mu}$と表し，φ_cのμに関する**ラドン-ニコディム導関数**（Radon-Nikodým derivative）という。］

（3）φがμ-絶対連続

$\Longleftrightarrow$　φのμに関するラドン-ニコディム導関数$\frac{d\varphi}{d\mu}$がμ-a.e.のちがいを除いてただ一つ存在する。

定理 4.4 を証明するためにいくつかの準備をする。

補題 4.5　（X, $\mathcal{M}$）を可測空間とし，$\varphi:\mathcal{M}\to\boldsymbol{R}$を$\mathcal{M}$上の符号つき測度とする。$A\in\mathcal{M}$に対して，

$\varphi^+(A)=\sup\{\varphi(B)\mid B\subset A, B\in\mathcal{M}\}$

$\varphi^-(A)=\sup\{-\varphi(B)\mid B\subset A, B\in\mathcal{M}\}$

と定義する。このときφ^+，φ^-は$\mathcal{M}$上の有限測度である。

［φ^+，φ^-をそれぞれφの**上変分**（upper variation），**下変分**（lower variation）という。］

［証明］（φ^+が$\mathcal{M}$上の有限測度であること）定義 1.3 の（M1）～（M3）と有限性を確認する。

（M1）$A\in\mathcal{M}$に対して$\emptyset\subset A, \emptyset\in\mathcal{M}$，$\varphi(\emptyset)=0$であるから，$\varphi^+(A)\geqq 0$である。

（M2）$\varphi(\emptyset)=0$より明らかに$\varphi^+(\emptyset)=0$である。

（M3）$A_1,A_2,\cdots$（可算個）$\in \mathcal{M}$，$A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ とする。

証明すべき式「$\varphi^+(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^+(A_n)$」に対して≦と≧が同時に成り立つことを示す。

（≦）$B \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n, B \in \mathcal{M}$ に対して，

$$\varphi(B) = \varphi(B \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \varphi(\cup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B \cap A_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^+(A_n)$$

である。両辺の B に関する上限をとれば，

$$\varphi^+(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^+(A_n)$$

である。

（≧）任意の $\varepsilon > 0$ に対して，φ^+ の定義より

$$\varphi^+(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leqq \varphi(B_n) \quad B_n \subset A_n$$

となる $B_n \in \mathcal{M}$ が存在する。このとき，$\cup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$ だから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^+(A_n) - \varepsilon \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n) = \varphi(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \leqq \varphi^+(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

である。$\varepsilon > 0$ は任意だから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^+(A_n) \leqq \varphi^+(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

である。

（有限性）$\varphi^+(X) < \infty$ を示す。$\varphi^+(X) = \infty$ であると仮定する。このとき，

主張 4.5.1　次をみたす $X_1,X_2,\cdots \in \mathcal{M}$ が存在する。

① $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots$

② $\varphi^+(X_n) = \infty$

③ $|\varphi(X_n)| \geqq n - 1$

（∵）$X_1 = X$ とする。これは②，③をみたす。

①～③をみたすように $X_1,X_2,\cdots,X_n$ まで定まったとする。

このとき X_{n+1} を次のように定義する。

$\varphi^+(X_n) = \infty$ だから $A \subset X_n, A \in \mathcal{M}$ で，$\varphi(A) \geqq |\varphi(X_n)| + n$ となるものが存在する。

(i) $\varphi^+(A) = \infty$ のとき　$X_{n+1} = A$ とするとよい。

(ii) $\varphi^+(A) < \infty$ のとき

$$\varphi^+(X_n \setminus A) = \varphi^+(X_n) - \varphi^+(A) = \infty$$

$$|\varphi(X_n \setminus A)| = |\varphi(X_n) - \varphi(A)| \geqq \varphi(A) - |\varphi(X_n)| \geqq n$$

であるから $X_{n+1} = X_n \setminus A$ とするとよい。■

命題 1.6(2)より，

$$\varphi(\cap_{n=1}^{\infty} X_n) = \lim_{n \to \infty} \varphi(X_n) = \infty \quad \text{または} \quad -\infty$$

となるが，これは φ が有限の値をとることに矛盾する。したがって，$\varphi^+(X) < \infty$ である。

（φ^- が $\mathcal{M}$ 上の有限測度であること） φ^- の定義より明らかに$\varphi^-(A)=(-\varphi)^+(A)$ であるから(1)より成り立つ。■

補題 4.6 （X, $\mathcal{M}$）を可測空間とし，φ: $\mathcal{M}\to\boldsymbol{R}$ を $\mathcal{M}$ 上の符号つき測度とする。このとき，次の(1), (2)が成り立つ。

(1) **ジョルダン分解**（Jordan decomposition）$\varphi(A)=\varphi^+(A)-\varphi^-(A)$ （$A\in\mathcal{M}$）

(2) **ハーン分解**（Hahn decomposition）次をみたす$D\in\mathcal{M}$ が存在する。

$$\varphi^+(A)=\varphi(A\cap D),\quad \varphi^-(A)=-\varphi(A\cap D^c) \qquad (A\in\mathcal{M})$$

［証明］(1) $B\subset A, B\in\mathcal{M}$ に対して,

$$\varphi(B)=\varphi(A)-\varphi(A\setminus B)\leqq\varphi(A)+\varphi^-(A)$$

である。両辺の B に関する上限をとれば,

$$\varphi^+(A)\leqq\varphi(A)+\varphi^-(A)$$

すなわち$\varphi(A)\geqq\varphi^+(A)-\varphi^-(A)$ である。

同様にして,

$$\varphi^-(A)\leqq\varphi^+(A)-\varphi(A)$$

すなわち$\varphi(A)\leqq\varphi^+(A)-\varphi^-(A)$ である。

よって$\varphi(A)=\varphi^+(A)-\varphi^-(A)$ が成り立つ。

(2) $\varphi^+(D^c)=0$, $\varphi^-(D)=0$ となる$D\in\mathcal{M}$ が存在することを示せば十分である。

各正の整数 n に対して,

$$\varphi^+(X)-\frac{1}{2^n}\leqq\varphi(D_n)$$

となる$D_n\in\mathcal{M}$ をとる。(1)より,

$$\varphi^-(D_n)=\varphi^+(D_n)-\varphi(D_n)\leqq\varphi^+(X)-\varphi(D_n)\leqq\frac{1}{2^n}$$

$$\varphi^+(D_n^c)=\varphi^+(X)-\varphi^+(D_n)\leqq\varphi^+(X)-\varphi(D_n)\leqq\frac{1}{2^n}$$

である。ここで,

$$D=\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{k=n}^{\infty}D_k$$

とおく。$D^c=\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}D_k^c$ であり，$\cup_{k=n}^{\infty}D_k^c$ は n について単調減少であるから，命題 1.6(2)より,

$$\varphi^+(D^c)=\varphi^+(\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}D_k^c)=\lim_{n\to\infty}\varphi^+(\cup_{k=n}^{\infty}D_k^c)\leqq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\varphi^+(D_k^c)\leqq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=0$$

$$\varphi^-(D)=\varphi^-(\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{k=n}^{\infty}D_k)=\lim_{n\to\infty}\varphi^-(\cap_{k=n}^{\infty}D_k)\leqq\lim_{n\to\infty}\varphi^-(D_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

となる。よって，$\varphi^+(D^c)=0$, $\varphi^-(D)=0$ である。■

［定理 4.4 の証明］(1)の（一意） $\varphi=\varphi_c+\varphi_s=\varphi'_c+\varphi'_s$ （φ'_c はμ -絶対連続，φ'_s はμ -特異）と分解できたとする。このとき

$$\varphi_c-\varphi'_c=\varphi'_s-\varphi_s$$

となるが，定義 4.3（注意 1）より左辺はμ -絶対連続，右辺はμ -特異なので，定義 4.3（注意 2）より

$$\varphi_c-\varphi'_c=\varphi'_s-\varphi_s=0$$

である。したがって，$\varphi_c=\varphi'_c$，$\varphi_s=\varphi'_s$ である。

(1)の（存在）と(2)の（存在） 必要ならばジョルダン分解$\varphi=\varphi^+-\varphi^-$ をすることにより，φ は有限測度であるとしてもよい。いま，

$$\boldsymbol{F}=\left\{f\middle|\int_A fd\mu\leqq\varphi(A)\,(A\in\mathcal{M}),\,f\geqq 0\right\}$$

とおく。f=0 は明らかに$f\in\boldsymbol{F}$なので，$\boldsymbol{F}\neq\emptyset$ である。

$$a=\sup\left\{\int_X fd\mu\middle|f\in\boldsymbol{F}\right\}$$

とおく。$\int_X fd\mu\leqq\varphi(X)$ より，$a\leqq\varphi(X)<\infty$ である。

いま，$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=a$ となる$f_1,f_2,\cdots\in\boldsymbol{F}$をとり，

$$f=\sup\{f_n|n=1,2,\cdots\}$$

とする。

主張 4.4.1 ① $f\in\boldsymbol{F}$ ② fは可積分 ③ $\int_X fd\mu=a$

（∵）各正の整数 n に対して

$$g_n=\sup\{f_k|1\leqq k\leqq n\}$$

とおく。このとき，$0\leqq g_1\leqq g_2\leqq\cdots$，$g_n\nearrow f$ （$n\to\infty$）である。さらに，$1\leqq k\leqq n$ に対して

$$A(n,k)=\{x\in X|f_1(x)<g_n(x),f_2(x)<g_n(x),\cdots,f_{k-1}(x)<g_n(x),f_k(x)=g_n(x)\}$$

とおく。このとき

$$A(n,k)\in\mathcal{M}\ (1\leqq k\leqq n),\ A(n,i)\cap A(n,j)=\emptyset\ (i\neq j),\ \cup_{k=1}^{n}A(n,k)=X$$

である。したがって任意の$A\in\mathcal{M}$に対して，

$$\int_A g_n d\mu=\sum_{k=1}^{n}\int_{A\cap A(n,k)}g_n d\mu=\sum_{k=1}^{n}\int_{A\cap A(n,k)}f_k d\mu\leqq\sum_{k=1}^{n}\varphi(A\cap A(n,k))=\varphi(A)$$

となる。定理 3.6（単調収束定理）より，

$$\int_A fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A g_n d\mu\leqq\varphi(A)$$

となり①をみたす。

$\int_X fd\mu\leqq\varphi(X)<\infty$ より②をみたす。

a の定義より$\int_X fd\mu\leqq a$ である。一方，

$$a=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\leqq\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu=\int_X fd\mu$$

であるから③をみたす。■

そこで,

$$\varphi_c(A)=\int_A f d\mu \quad ,\ \varphi_s(A)=\varphi(A)-\varphi_c(A) \qquad (A\in\mathcal{M})$$

と定義する。主張 4.4.1②，例 4.3 よりφ_cはμ-絶対連続であるからφ_sがμ-特異な有限測度であることを示せばよい。

まず，φ_sが有限測度であることを証明する。定義 1.3 の（M1）～（M3）と有限性を確かめればよい。

（M1）$A\in\mathcal{M}$とする。主張 4.4.1①より$f\in\boldsymbol{F}$であるから

$$\varphi_s(A)=\varphi(A)-\int_A f d\mu\geqq 0$$

である。

（M2）$\varphi_s(\emptyset)=\varphi(\emptyset)-\int_\emptyset f d\mu=0$ である。

（M3）$A_1,A_2,\cdots$（可算個）$\in\mathcal{M}$，$A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ とする。

$$\varphi_s\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\varphi\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)-\varphi_c\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\varphi\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)-\int_{\cup_{n=1}^{\infty}A_n} f d\mu$$

であるが，右辺第 1 項はφが符号つき測度であること，右辺第 2 項は例 3.10 より

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(A_n)-\varphi_c(A_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_s(A_n)$$

となる。

（有限性）$\varphi_s(X)<\infty$ であることは明らか。

次に，φ_sがμ-特異であることを証明する。

各正の整数 n に対して

$$\varphi_n=\varphi_s-\frac{1}{n}\mu$$

とおく。φ_nは符号つき測度であるから補題 4.6(2)（ハーン分解）より，

$$\varphi_n^+(A)=\varphi_n(A\cap D_n)\geqq 0\ ,\ \varphi_n^-(A)=-\varphi_n(A\cap D_n^c)\geqq 0 \qquad (A\in\mathcal{M})$$

をみたす$D_n\in\mathcal{M}$が存在する。いま，

$$N=\cup_{n=1}^{\infty}D_n$$

とおく。この Nがμ-特異の条件をみたすものであることを確かめる。$N\in\mathcal{M}$ であるから，$\mu(N)=0$ であることと，$\varphi_s(A)=\varphi_s(A\cap N)$ $(A\in\mathcal{M})$ であることを確かめればよい。

（$\varphi_s(A)=\varphi_s(A\cap N)$ であること）任意の$A\in\mathcal{M}$に対して，

$$0\leqq\varphi_s(A\cap N^c)\leqq\varphi_s(A\cap D_n^c)=\varphi_n(A\cap D_n^c)+\frac{1}{n}\mu(A\cap D_n^c)\leqq\frac{1}{n}\mu(A\cap D_n^c)\leqq\frac{1}{n}\mu(X)$$

であるから $n\to\infty$ として$\varphi_s(A\cap N^c)=0$ である。したがって，

$$\varphi_s(A)=\varphi_s(A\cap N)+\varphi_s(A\cap N^c)=\varphi_s(A\cap N)$$

となる。

（$\mu(N)=0$ であること）主張 4.4.1③より$\int_X f d\mu=a$ であるから，

$$a+\frac{1}{n}\mu(D_n)=\int_X(f+\frac{1}{n}\chi_{D_n})d\mu$$

である。

主張 4.4.2　$f+\frac{1}{n}\chi_{D_n}\in \boldsymbol{F}$

（$\because$）$\varphi_c(A)=\varphi(A)-\varphi_s(A)=\varphi(A)-\varphi_s(A\cap N)\leqq\varphi(A)-\varphi_s(A\cap D_n)$
より，

$$\int_A(f+\frac{1}{n}\chi_{D_n})d\mu=\int_A fd\mu+\frac{1}{n}\int_{A\cap D_n}1d\mu$$

$$=\varphi_c(A)+\frac{1}{n}\mu(A\cap D_n)$$

$$\leqq\varphi(A)-\varphi_s(A\cap D_n)+\frac{1}{n}\mu(A\cap D_n)$$

$$=\varphi(A)-\varphi_n(A\cap D_n)$$

$$\leqq\varphi(A)\ \blacksquare$$

したがって，

$$a+\frac{1}{n}\mu(D_n)=\int_X(f+\frac{1}{n}\chi_{D_n})d\mu\leqq a$$

となり，$\mu(D_n)=0$ である。このことより

$$\mu(N)=\mu(\cup_{n=1}^{\infty}D_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_n)=0$$

となり，$\mu(N)=0$ である。

(2)の（一意）可積分関数$g: X\to\boldsymbol{R}$ も

$$\varphi_c(A)=\int_A gd\mu\qquad(A\in\mathcal{M})$$

をみたすとする。このとき$\int_A fd\mu=\int_A gd\mu$ （$A\in\mathcal{M}$）であるから，命題 3.5(3)より$f=g$　μ -a.e.である。

(3) (2)と例 4.3 より明らか。■

第 5 章　確率論の基本的事項

この章では, 今までの章で学んだルベーグ積分論に関する基礎的知識をもととして, 確率論の基本的事項について述べる。一部の証明は省略する。詳細は確率論の文献を参照されたい。

はじめに確率空間について述べる。

定義 5.1　Ω を空でない集合とする。

3 つ組（Ω , $\mathcal{F}$, P）が**確率空間**（probability space）とは，全空間の測度が 1 である測度空間をいう。すなわち，次の①～⑦をみたすことである。

[1] Ω の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{F}$ はΩ の σ -加法族である。すなわち,

① （F1）$\Omega \in \mathcal{F}$

② （F2）$A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$

③ （F3）$A_1, A_2, \cdots$（可算個）$\in \mathcal{F} \implies \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

[2] $\mathcal{F}$ を定義域とする集合関数 $P : \mathcal{F} \to R$ が $\mathcal{F}$ 上の測度ある。すなわち,

④ （M1）任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $P(A) \geqq 0$

⑤ （M2）とくに，$P(\phi) = 0$

⑥ （M3）$A_1, A_2, \cdots$（可算個）$\in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j) \implies P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

[3]　⑦ $P(\Omega) = 1$

確率空間（Ω , $\mathcal{F}$, P）において，測度 P をとくに**確率測度**(probability measure)という。

（注意）確率空間（Ω , $\mathcal{F}$, P）の場合は「ほとんどいたるところ」の代わりに「**ほとんど確実に**」と言い，a.e.の代わりに a.s. と略記する（a.s.は almost surely の略)。

定義 5.2　（Ω , $\mathcal{F}$, P）を確率空間とする。

(1) $\mathcal{F}$ の元を**事象**（event）という。

とくに事象Ω を**全事象**（whole event），事象 ϕ を**空事象**（empty event）という。

(2) A, B を事象とする。このとき,

A に対して事象 A^c を A の**余事象**（complementary event）

A, B に対して 事象 $A \cup B$ を A と B の**和事象**（sum event），

事象 $A \cap B$ を A と B の**積事象**（product event）

という。

(3) 事象 A, B が $A \cap B = \phi$ をみたすとき，A と B は互いに**排反**（exclusive）という。

(4) 事象 A に対して，$P(A)$ を A の**確率**（probability）という。

（注意 1）（和事象の確率）$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

［証明］ $C = A \cap B$，$A' = A \setminus C$，$B' = B \setminus C$ とおくと，

$A = A' \cup C$，$B = B' \cup C$，$A \cup B = A' \cup B' \cup C$

であり，A'，B'，Cはどの 2 つも互いに排反である。したがって，

$P(A\cup B)=P(A'\cup B'\cup C)=P(A')+P(B')+P(C)$

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\{P(A')+P(C)\}+\{P(B')+P(C)\}-P(C)=P(A')+P(B')+P(C)$

となり，等式は成り立つ。■

（注意 2）（余事象の確率）$P(A^c)=1-P(A)$

［証明］ 命題 1.4(1)で，$B=\Omega$ とすればよい。■

例　5.3　(1)（さいころ投げ）$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\mathcal{F}=2^{\Omega}$ とする。

Ω を「さいころの目」と考えれば，$\mathcal{F}$の元はさいころを 1 回投げたときに起こる事象を表す。例えば，$\{2,4,6\}\in\mathcal{F}$はさいころを 1 回投げたとき，偶数の目が出る事象と考える。

つぎに，$A\in\mathcal{F}$に対して

$$P(A)=\frac{n(A)}{6}\qquad (n(A)\text{ は }A\text{ の個数})$$

と定義する。このとき（Ω，$\mathcal{F}$，P）は確率空間である。

(2)（コイン投げの反復試行）$\Omega=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)|\omega_k=0\text{または}1(1\leqq k\leqq n)\}$，$\mathcal{F}=2^{\Omega}$ とし，$A\in\mathcal{F}$に対して

$$P(A)=\frac{n(A)}{2^n}$$

と定義すれば，（Ω，$\mathcal{F}$，P）は確率空間である。これはコインを n 回反復して投げるときの確率モデルで，k 回目に表が出るとき$\omega_k=1$，裏が出るとき$\omega_k=0$ と考える。

たとえば，$n=3$ のときはコインを 3 回反復して投げる場合で，

$A=\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)|\omega_1+\omega_2+\omega_3=2\}$

は 3 回中 2 回表が出る事象である。

$A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$

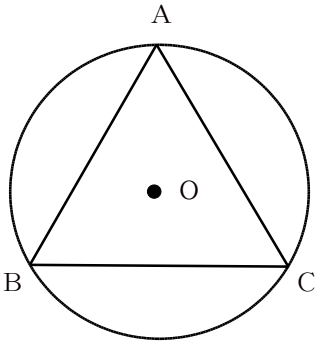
であるから$P(A)=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$ である。

(3)（ベルトランの逆説）確率測度は定義 5.1 の条件④～⑦をみたすものであればどのようなものでも可能である。そのため，次のような**ベルトランの逆説**（Bertrand paradox）ということが起こり得る。

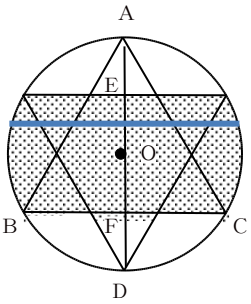
円に任意に弦をひくとき，その長さが内接正三角形の一辺より長くなる確率を求めよ。

この内接正三角形を△ABC とする。

円の半径を 1 とすると△ABC の一辺の長さは$\sqrt{3}$ である。



（解 1）必要ならば回転することにより，一般性を失うことなく弦は点 A を通る直径 AD に垂直に引くとしてよい。

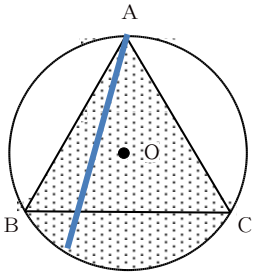


事象の確率を弦が直径 AD と交わっている部分の“長さ”の割合と定義すればこれは条件④～⑦をみたし，求める確率は，

$$\frac{\text{EFの長さ}}{\text{ADの長さ}}=\frac{1}{2}$$

である。

（解 2）必要ならば回転することにより，一般性を失うことなく弦の一端は点 A であるとしてよい。

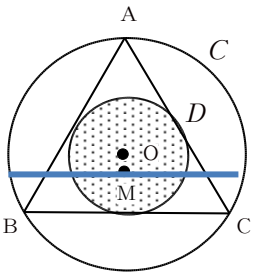


事象の確率を弦の他端がある部分の弧の“長さ”の割合と定義すればこれは条件④～⑦をみたし，求める確率は，

$$\frac{\widehat{\text{BC}}\text{の長さ}}{\text{円周の長さ}}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1}{3}$$

である。

（解 3）円に引いた弦の中点を M とすると M は常に円の内部にある。逆に円の内部に任意の点 M を取ると M を中点とする弦が存在する。

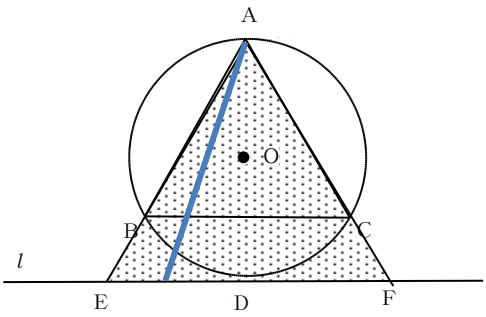


事象の確率を中点 M が存在する領域の面積の割合と定義すればこれは条件④～⑦をみたし，求める確率は，

$$\frac{\text{円}D\text{の面積}}{\text{円}C\text{の面積}}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}=\frac{1}{4}$$

である。

（解 4）必要ならば回転することにより，一般性を失うことなく弦の一端は点 A であるとしてよい。点 A を通る直径 AD の，点 D における接線 l をひく。



事象の確率を弦の他端の延長と l の交点の“長さ”の割合と定義すればこれは条件④～⑦をみたし，求める確率は，

$$\frac{\text{EFの長さ}}{l\text{の長さ}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\infty}=0$$

である。

このように，この問題の解はいくつも存在する。それではどれが正しいのであろうか。

（解 1）～（解 4）は確率測度の入れ方が異なるだけで，いずれも正しい。「任意に弦をひく」の「任意」の意味があいまいである。（解 1）では直径 AD 上に任意に 1 点をとり，（解 2）では円上に任意に 1 点をとり，（解 3）では円内に任意に 1 点をとり，（解 4）では接線 l 上に任意に 1 点をとる。この問題のままでは，それらが判別できないのでどのように確率測度を入れるとよいのか明記されていない。このように「任意」の意味があいまいなのでどれが正解なのかは決められない。

定義 5.4　（Ω，$\mathcal{F}$，P）を確率空間とする。

関数 $X:\Omega\to\boldsymbol{R}$ が**確率変数**（random variable）とは，X が可測関数であることをいう。すなわち，任意の実数a に対して

$$\{\omega\in\Omega|X(\omega)<a\}\in\mathcal{F}$$

をみたすことである。

（注意 1）この条件の不等号は≦，＞，≧でも同値である（命題 2.1 参照）。すなわち，この条件は，

$$\{\omega\in\Omega|X(\omega)\leqq a\}\in\mathcal{F}\quad\text{または，}\{\omega\in\Omega|X(\omega)>a\}\in\mathcal{F}\quad\text{または，}\{\omega\in\Omega|X(\omega)\geqq a\}\in\mathcal{F}$$

としてもよい。

（注意 2）X，Y を確率変数とする。このとき，

(1) $aX+bY$（a，b は定数）　(2) $X\vee Y$（＝Max{ X, Y }）　(3) $X\wedge Y$（＝Min{ X, Y }）

も確率変数である（命題 2.3 参照）。

例　5.5　（コイン投げの反復試行）$\Omega=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)|\omega_k=0\text{または}1(1\leqq k\leqq n)\}$，$\mathcal{F}=2^\Omega$ とし，関数 $X:\Omega\to\{0,1,2,\cdots,n\}$ を

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\in\Omega$$

に対して

$$X(\omega)=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n$$

と定義すると X は確率変数である（$\mathcal{F}=2^\Omega$ だから）。これはコインを n 回反復して投げるとき，表が出る回数を表す確率モデルで，k 回目に表が出るとき$\omega_k=1$，裏が出るとき$\omega_k=0$ と考える。

定義 5.6　（Ω，$\mathcal{F}$，P）を確率空間とし，$X:\Omega\to\boldsymbol{R}$ を確率変数とする。

$\boldsymbol{R}$ の任意のボレル集合 E に対して注意 2.2 より$\{\omega\in\Omega|X(\omega)\in E\}\in\mathcal{F}$ であるから，

$$P_X(E)=P(\{\omega\in\Omega|X(\omega)\in E\})$$

とおけばP_X は（$\boldsymbol{R}$，$\mathcal{B}$）の確率測度になる（証明は容易なので省略）。P_X を X の**確率分布**（probability distribution）という。

例　5.7　(1)（二項分布）偏ったコインを n 回投げる。コインを 1 回投げて表が出る確率を p，裏の出る確率を q とする（$p+q=1$）。確率空間（Ω，$\mathcal{F}$，P）を

$$\Omega=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)|\omega_k=0\text{または}1(1\leqq k\leqq n)\}$$

$$\mathcal{F}=2^\Omega$$

P＝自然に考えられる確率　（例：$n=3$ のとき，表表裏と出る確率$P((1,1,0))=p^2q$）

とする。確率変数 $X:\Omega\to\{0,1,2,\cdots,n\}$を$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\in\Omega$ に対して

$$X(\omega)=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n$$

と定義する。このとき

$$P_X(\{k\})=P(\{\omega\in\Omega|X(\omega)=k\})={}_nC_kp^kq^{n-k}$$

である（例：$n=3$ のとき，$\{\omega|X(\omega)=2\}=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ だから$P_X(\{2\})=P(\{\omega|X(\omega)=2\})=3p^2q$）。

これを**二項分布**（binomial distribution）といい，$B(n,p)$と表す。

(2)（正規分布）m を実数，σ を正の実数とする。

確率空間（Ω，$\mathcal{F}$，P）上の確率変数 $X:\Omega\to\boldsymbol{R}$ 対して，その確率分布が

$$P_X((a,b))=P(\{\omega\in\Omega|X(\omega)\in(a,b)\})=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

と表されるものを**正規分布**（normal distribution）といい $N(m,\sigma^2)$と表す。

定義 5.8　（Ω，$\mathcal{F}$，P）を確率空間とし，$X:\Omega\to\boldsymbol{R}$ を可積分確率変数とする。

X の**期待値**（expectation）$E(X)$ とは，

$$E(X)=\int_\Omega XdP$$

のことである。さらに，$G\in\mathcal{F}$ に対して，

$$E(X:G)=\int_G XdP\left(=\int_\Omega\chi_G\cdot XdP\right)$$

で定義する。

例　5.9　（Ω，$\mathcal{F}$，P）を確率空間とする。

確率変数 $X:\Omega\to\{0,1,2,\cdots,n\}$ が二項分布 $B(n,\ p)$に従うとき，$E(X)=np$

［証明］$E(X)=\int_\Omega XdP$ であり，X は有限個の値をとる単関数であるから，

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}kP(\{\omega|X(\omega)=k\})=\sum_{k=0}^{n}kP_X(\{k\})=\sum_{k=0}^{n}k{}_nC_kp^kq^{n-k}\qquad(p+q=1)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=np\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}p^rq^{(n-1)-r}\quad(r=k-1)$$

$$=np\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}C_rp^rq^{(n-1)-r}$$

$$=np(p+q)^{n-1}$$

$$=np$$

となる。■

定義 5.10　（Ω，$\mathcal{F}$，P）を確率空間とする。

(1) $X:\Omega\to\boldsymbol{R}$ を確率変数とする。X を可測にする最小の σ 加法族を$\sigma(X)$ と表す。

一般に，確率変数 X_1，X_2，…，X_n をすべて可測にする最小の σ 加法族を$\sigma(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ と表す。

(2) 確率変数列 X_1，X_2，…，X_n が**独立**（independent）とは，任意の $m\leqq n$ と $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n$ に対して，$E_1\in\sigma(X_{i_1})$，$E_2\in\sigma(X_{i_2})$，…，$E_m\in\sigma(X_{i_m})$ のとき，

$$P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)=P(E_1)P(E_2)\cdots P(E_m)$$

が成り立つことである。

(3) 確率変数 X と $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族 $\mathcal{G}$（すなわち，$\mathcal{G}$ は σ −加法族で，$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$）が**独立**（independent）とは，任意の$G\in\mathcal{G}$に対して，X とχ_G が独立であることをいう。

独立とは，直観的には「お互いの結果が影響しあうことがない」ということを数学的に表したものである。独立性は確率論においては非常に重要な概念であり，多くの重要な性質が導かれている。ここでは次の 2 つの性質のみを証明を省略して述べるにとどめる。

定理 5.11　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，X_1，X_2，…，$X_N : \Omega \to \boldsymbol{R}$ を独立な確率変数の列とする。このとき次の(1)，(2)が成り立つ。

(1) 各 n（$2\leqq n\leqq N$）に対して，X_n と$\sigma(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})$ は独立である。

(2) 各 n（$1\leqq n\leqq N$）について X_n が可積分のとき，$X_1X_2\cdots X_N$ も可積分で，

$$E(X_1X_2\cdots X_N)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_N)$$

が成り立つ。

［証明］省略。■

定理 5.12　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ を可積分確率変数，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族とする。このとき次の(1)，(2)が成り立つ。

(1) 次の①，②をみたす確率変数 $Y : \Omega \to \boldsymbol{R}$ が P-a.s.のちがいを除いてただ一つ存在する。

① Y は $\mathcal{G}$-可測

② 任意の$G\in\mathcal{G}$に対して，$E(Y:G)=E(X:G)$

［Y を $\mathcal{G}$ に関する X の**条件つき期待値**（conditional expectation）といい，$E(X|\mathcal{G})$ と表す。］

(2) $E(X|\mathcal{G})$ は可積分である。

［証明］(1) 任意の$G\in\mathcal{G}$に対して，

$$\varphi(G)=\int_G XdP\quad(=E(X:G))$$

とおく。例 4.3 より φ は $\mathcal{G}$ 上の P-絶対連続な符号つき測度なので，定理 4.4（ラドン-ニコディムの定理）(3)よりラドン-ニコディム導関数$\frac{d\varphi}{dP}$ が P-a.s.のちがいを除いてただ一つ存在する。すなわち，

$$\varphi(G)=\int_G \frac{d\varphi}{dP}dP\quad\left(=E\left(\frac{d\varphi}{dP}:G\right)\right)$$

である。この$\frac{d\varphi}{dP}$ が$E(X|\mathcal{G})$ である。

(2) 定理 4.4(2)において，ラドン-ニコディム導関数の可積分性が証明されている。■

具体的な例として「さいころを 1 回投げる」場合を考える。

さいころを 1 回投げる確率モデルとして例 5.3(1)でも見たが，そこでは$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ とした。それでも良いのだが，問題によってはΩ としては別の集合を考え，Ω を定義域とする確率変数があって，その

値域が{1,2,3,4,5,6} と考えたほうがよいことがある。

そこで改めて確率モデルを次のように定める。

例　5.13　Ω を集合とし，$X:\Omega\to\{1,2,3,4,5,6\}$を関数とする。いま，

$$X^{-1}(\{k\})=A_k,\quad P(A_k)=\frac{1}{6}\quad(1\leqq k\leqq 6),$$

$\mathcal{F}$=「$\{A_1,\cdots,A_6\}$ のいくつかの組合せの和集合」の全体

とする。このとき，（Ω , $\mathcal{F}$, P）は確率空間，$X:\Omega\to\{1,2,3,4,5,6\}$は確率変数になり，

$$\Omega=A_1\cup\cdots\cup A_6,\quad A_i\cap A_j=\emptyset\quad(i\neq j)$$

である。このとき次の(1), (2)が成り立つ。

(1) $\mathcal{G}$を次のように定める。

$$B=A_2\cup A_4\cup A_6,\quad \mathcal{G}=\{\emptyset,B,B^c,\Omega\}$$

このとき$\mathcal{G}$は$\mathcal{F}$の部分 σ -加法族である。

(2) (1)のとき，

$$E(X|\mathcal{G})(\omega)=\begin{cases}4 & \omega\in B\\ 3 & \omega\in B^c\end{cases}$$

である。

［証明］(1) 明らか。

(2) 確率変数 Yを，

$$Y(\omega)=\begin{cases}4 & \omega\in B\\ 3 & \omega\in B^c\end{cases}$$

で定義する。これが定理 5.12 の条件①，②をみたすことを示せばよい。

明らかに① Yは$\mathcal{G}$-可測である。②についても，

$$E(Y:\emptyset)=0,\quad E(X:\emptyset)=0$$

$$E(Y:B)=4\times\frac{1}{2}=2,\quad E(X:B)=2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=2$$

$$E(Y:B^c)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad E(X:B^c)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$$

$$E(Y:\Omega)=4\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2},$$

$$E(X:\Omega)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

であるから，② 任意の$G\in\mathcal{G}$に対して，$E(Y:G)=E(X:G)$ が成り立つ。

したがって，

$$Y=E(X|\mathcal{G})(\omega)=\begin{cases}4 & \omega\in B\\ 3 & \omega\in B^c\end{cases}$$

である。■

（注意 1）［確率論的意味］このことの確率論的意味を考える。

まず，これを「さいころを 1 回投げる確率モデル」と考えよう。A_k は k の目が出る事象（$1 \leqq k \leqq 6$），B は「偶数の目が出る」事象，B^c は「奇数の目が出る」事象である。

さいころを 1 回投げて偶数が出たとき，その目が k（$1 \leqq k \leqq 6$）である条件つき確率 $P(\cdot|B)$ は，

$$P(A_k|B) = \begin{cases} 0 & k = 1,3,5 \\ \frac{1}{3} & k = 2,4,6 \end{cases}$$

であり，奇数が出たとき，その目が k（$1 \leqq k \leqq 6$）である条件つき確率 $P(\cdot|B^c)$ は，

$$P(A_k|B^c) = \begin{cases} 0 & k = 2,4,6 \\ \frac{1}{3} & k = 1,3,5 \end{cases}$$

である。このとき，

$$E(X) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

であり，偶数の目が出たという条件のときの条件つき期待値は

$$E(X|B) = 1\times 0 + 2\times\frac{1}{3} + 3\times 0 + 4\times\frac{1}{3} + 5\times 0 + 6\times\frac{1}{3} = 4$$

であり，奇数の目が出たという条件のときの条件つき期待値は

$$E(X|B^c) = 1\times\frac{1}{3} + 2\times 0 + 3\times\frac{1}{3} + 4\times 0 + 5\times\frac{1}{3} + 6\times 0 = 3$$

である。

σ -加法族を「情報」ととらえてみる。$\mathcal{G}$ はさいころの目が偶数か奇数かで決まる事象のみを持つので，$\mathcal{F}$ に比べて $\mathcal{G}$ は「情報が粗い」と考える。

確率変数 X の期待値について，

情報がないとき，期待値は $\frac{7}{2}$

粗い情報 $\mathcal{G}$ のもとでは

$B \in \mathcal{G}$（すなわち偶数の目が出た）という情報を得たときの期待値は 4

$B^c \in \mathcal{G}$（すなわち奇数の目が出た）という情報を得たときの期待値は 3

と解釈できる。これが条件つき期待値

$$E(X|\mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} 4 & \omega \in B \\ 3 & \omega \in B^c \end{cases}$$

として確率変数で表されるということである。

（注意 2）もっとも細かい情報 $\mathcal{F}$ においては

$$E(X|\mathcal{F})(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_1 \\ 2 & \omega \in A_2 \\ \cdots & \\ 6 & \omega \in A_6 \end{cases}$$

という確率変数になる。なお，これは確率変数 X と同じである。

定理 5.14　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，X, $Y : \Omega \to \boldsymbol{R}$ を可積分確率変数，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族とする。このとき次の(1)～(5)が成り立つ。

(1) 任意の$G\in\mathcal{G}$に対して，$E(E(X|\mathcal{G}):G)=E(X:G)$

(2) X が $\mathcal{G}$-可測 $\Longrightarrow$ $E(X|\mathcal{G})=X$ P-a.s.

(3) $X\leqq Y$ P-a.s. $\Longrightarrow$ $E(X|\mathcal{G})\leqq E(Y|\mathcal{G})$ P-a.s.

(4) $\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ -加法族 $\Longrightarrow$ $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})=E(X|\mathcal{H})$ P-a.s.

(5) $Z:\Omega\to\boldsymbol{R}$ が $\mathcal{G}$-可測な確率変数で，ZX が可積分 $\Longrightarrow$ $E(ZX|\mathcal{G})=Z\ E(X|\mathcal{G})$ P-a.s.

(6) X と $\mathcal{G}$ が独立 $\Longrightarrow$ $E(X|\mathcal{G})=E(X)$ P-a.s.

［証明］(1), (2) 定義より明らか。

(3) $W=Y-X$ とおくと，$W\geqq 0$ P-a.s. である。$E(W|\mathcal{G})\geqq 0$ P-a.s. を示せばよい。

もしそうでないと仮定すると，$P(\{\omega\in\Omega|E(W|\mathcal{G})(\omega)<0\})>0$ であるから，

$$P(G)>0 \quad \text{ただし} \quad G=\{\omega\in\Omega|E(W|\mathcal{G})(\omega)<-\varepsilon\}\in\mathcal{G}$$

となる$\varepsilon>0$ が存在する。ところが，

$$0\leqq E(W:G)=E(E(W|\mathcal{G}):G)<-\varepsilon P(G)<0$$

となり不合理である。

したがって，$E(W|\mathcal{G})\geqq 0$ P-a.s. である。

(4) 両辺とも$\mathcal{H}$-可測であるから任意の$H\in\mathcal{H}$に対して，

$$E(E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}):H)=E(E(X|\mathcal{H}):H)$$

を示せばよい。実際，

$$E(E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}):H)=E(E(X|\mathcal{G}):H)=E(X:H)$$

$$E(E(X|\mathcal{H}):H)=E(X:H)$$

であるから成り立つ。

(5) ZX が可積分なので$E(ZX|\mathcal{G})$ は存在する。

両辺とも$\mathcal{G}$-可測であるから任意の$G\in\mathcal{G}$に対して，$E(E(ZX|\mathcal{G}):G)=E(ZE(X|\mathcal{G}):G)$，すなわち，

$$E(ZX:G)=E(ZE(X|\mathcal{G}):G)$$

を示せばよい。証明を 4 段に分ける。

（第 1 段）$Z=\chi_A$ （$A\in\mathcal{G}$）のとき

$E(ZX:G)=E(\chi_A\cdot X:G)=E(X:A\cap G)$

$E(ZE(X|\mathcal{G}):G)=E(\chi_A E(X|\mathcal{G}):G)=E(E(X|\mathcal{G}):A\cap G)=E(X:A\cap G)$

で成り立つ。

（第 2 段）Z が $\mathcal{G}$-可測な非負単関数のとき

$$Z=\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_{A_k}\quad(a_k>0,\ A_k\in\mathcal{G}\quad 1\leqq k\leqq n)$$

と表される。したがって，

$$E(ZX:G)=E((\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_{A_k})\cdot X:G)=\sum_{k=1}^{n}a_kE(\chi_{A_k}\cdot X:G)$$

$$E(ZE(X|\mathcal{G}):G)=E(\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_A E(X|\mathcal{G}):G)=\sum_{k=1}^{n}a_kE(\chi_A E(X|\mathcal{G}):G)=\sum_{k=1}^{n}a_kE(\chi_{A_k}\cdot X:G)$$

で成り立つ。

（第 3 段）Z が非負 $\mathcal{G}$-可測関数のとき

定理 2.6 より，$\mathcal{G}$-可測な非負単関数の列$\{Z_n\}$（$Z_n \geqq 0$）で，各点$\omega \in \Omega$ に対して

① $0 \leqq Z_1(\omega) \leqq Z_2(\omega) \leqq Z_3(\omega) \leqq \cdots$

② $Z_1(\omega), Z_2(\omega), \cdots$ は$Z(\omega)$ に収束する　$Z_n(\omega) \nearrow Z(\omega)$　（$n \to \infty$）

となるものがある。

第 2 段より$E(Z_n X : G) = E(Z_n E(X \mid \mathcal{G}) : G)$ が成り立ち，$n \to \infty$とすると単調収束定理（定理 3.6）より$E(ZX : G) = E(ZE(X \mid \mathcal{G}) : G)$ が成り立つ。

（第 4 段）Zが一般の $\mathcal{G}$-可測関数のとき

$Z^+ = \mathrm{Max}\{Z, 0\}$ ，$Z^- = \mathrm{Max}\{-Z, 0\}$

とおく。命題 2.3(5)より，Z^+ ，Z^- は$\mathcal{G}$-可測関数であり，

$Z^+, Z^- \geqq 0$ ，　$Z = Z^+ - Z^-$

が成り立つ。第 3 段より

$E(Z^+ X : G) = E(Z^+ E(X \mid \mathcal{G}) : G)$

$E(Z^- X : G) = E(Z^- E(X \mid \mathcal{G}) : G)$

が成り立つので，辺々ひくと$E(ZX : G) = E(ZE(X \mid \mathcal{G}) : G)$ が成り立つ。

(6) 両辺とも$\mathcal{G}$-可測であるから任意の$G \in \mathcal{G}$に対して，

$E(E(X \mid \mathcal{G}) : G) = E(E(X) : G)$

を示せばよい。実際，

$E(E(X \mid \mathcal{G}) : G) = E(X : G) = E(X \cdot \chi_G)$

である。ここで，X が$\mathcal{G}$と独立であるから定理 5.11(2)より，

$= E(X)E(\chi_G) = E(X)P(G)$

となる。一方，

$E(E(X) : G) = E(X)P(G)$

であるから成り立つ。■

第 6 章　マルチンゲール

この章ではマルチンゲールとよばれる確率過程の基本事項で，第 0 章で提示された問題を解決するのに必要なことについてのみ述べる。

定義 6.1　（Ω，$\mathcal{F}$，P）を確率空間とする。

(1) $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の列 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$，…，$\mathcal{F}_n$… が**フィルトレーション**（filtration）とは，

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$$

であることをいう。確率空間（Ω，$\mathcal{F}$，P）にこのフィルトレーションを添加した（Ω，$\mathcal{F}$，P，$\{\mathcal{F}_n\}$）を**フィルターつき確率空間**（filtered probability space）という。

(2) Ω 上の確率変数の列 X_1，X_2，… : Ω →$\boldsymbol{R}$ を（Ω 上の）**確率過程**（stochastic process）という。以下，（X_n : $n \geqq 1$）と表す。

以下では確率空間は特に断りがない限りフィルターつき確率空間を考える.

定義 6.2　（Ω，$\mathcal{F}$，P，$\{\mathcal{F}_n\}$）をフィルターつき確率空間とする。

Ω 上の確率過程（X_n : $n \geqq 1$）が**優マルチンゲール**(supermartingale)とは,

（SM1）　各 X_n は $\mathcal{F}_n$-可測（$n \geqq 1$）

（SM2）　各 X_n は可積分（$n \geqq 1$）

（SM3）　$E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \leqq X_{n-1}$　P-a.s.　（$n \geqq 2$）

をみたすことである。とくに（SM3）で等号が成り立つとき，**マルチンゲール**(martingale)という。

（注意 1）X_{n-1} は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測であるので，定理 5.14（2）より（SM3）の条件は,

$$E(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \leqq 0 \quad P\text{-a.s.} \quad (n \geqq 2)$$

といってもよい。

（注意 2）（X_n : $n \geqq 1$）が優マルチンゲールであるとき,

$$E(X_n) \leqq E(X_{n-1}) \leqq E(X_{n-2}) \leqq \cdots \leqq E(X_1)$$

［証明］（SM3）において両辺の期待値をとれば，$E(E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) \leqq E(X_{n-1})$ すなわち,

$$E(X_n) \leqq E(X_{n-1})$$

である。これより得られる。■

マルチンゲールというのは公平な賭けの数学的なモデルである。優マルチンゲールというのは胴元が有利になるインチキな賭けの数学的モデルである。マルチンゲールという言葉の語源はアラビア語で馬具のむながいに由来する。それがフランスで賭けの用語に用いられたという。

優マルチンゲールは胴元が有利な賭けのモデルと述べたが, 直観的には次のようなことを意味する。賭けにおいて，X_n は第 n 回目の賭けの後の所持金を表すと考える。さて，$n-1$ 回目の賭けが終了したとする。この段階で，X_1，X_2，…，X_{n-1} は確定している。そこでもう 1 回 n 回目の賭けをしたとすると，その後の所持金が X_n だが，これは今の段階では確定していないので，確率的にしか（どんな確率でどんな

値になるか）わからない。そこで，その期待値を計算する。その期待値というのは過去 $n-1$ 回目までの情報（これを $\mathcal{F}_{n-1}$ と考える）が与えられたときの条件つき期待値 $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$ である。つまり，各時点で,「次の賭け後の所持金の期待値は現在の所持金より減っている」とき優マルチンゲールであり,「所持金が変わらない」ときマルチンゲールである。

例えば，コインを投げて「表が出たら掛け金が倍になって戻り，裏が出たら掛け金を没収される」 という賭けを考える。歪みのないコインであれば，これはマルチンゲールになる。実際，コイン投げにおいては n 回目の値は $n-1$ 回目までの結果に影響されない，すなわち X_n と $\mathcal{F}_{n-1}$ が独立であるから，定理 5.14(6)より $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n)$ である。また，X_n は 1/2 の確率で $2X_{n-1}$ または 0 の値をとる。したがって,

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n) = 2X_{n-1} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = X_{n-1}$$

である。

例　6.3　(1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。各正の整数 n $(n \geqq 1)$ に対して, X_n は可積分で, $E(X_n) = 0$ なる Ω 上の独立な確率変数とし,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

とする。このとき（$S_n : n \geqq 1$）はマルチンゲールである。

(2) （Ω , $\mathcal{F}$, P, $\{\mathcal{F}_n\}$）をフィルターつき確率空間とする。ξ を Ω 上の可積分関数とし,

$$M_n = E(\xi \mid \mathcal{F}_n)$$

とする。このとき（$M_n : n \geqq 1$）はマルチンゲールである。

［証明］いずれも定義 6.2 の（SM1）～（SM3）を確かめる。

(1) （SM1）$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の定義より，X_1, X_2, …, X_n は $\mathcal{F}_n$-可測である。よって，S_n は $\mathcal{F}_n$-可測である。

（SM2）明らか。

（SM3）$E(S_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(S_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) + E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$ である。ここで,

$S_{n-1} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}$ は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測であるので定理 5.14(2)より，$E(S_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}$

定理 5.11(1)より X_n は $\mathcal{F}_{n-1}$ と独立であるので定理 5.14(5)より，$E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n) = 0$

である。

したがって，$E(S_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}$ となる。

以上により，$(S_n : n \geqq 1)$ はマルチンゲールである。

(2) （SM1）条件つき期待値の定義（定義 5.12）より明らか。

（SM2）ξ が可積分なので明らか。

（SM3）$E(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(E(\xi \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1})$ である。ここで，$\mathcal{F}_{n-1}$ が $\mathcal{F}_n$ の部分 σ-加法族であるので定理 5.14(4)より，$E(E(\xi \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(\xi \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$ である。

したがって，$E(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$ となる。

以上により，$(M_n : n \geqq 1)$ はマルチンゲールである。■

命題 6.4　$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\})$ をフィルターつき確率空間とする。

確率過程 $(X_n : n \geqq 1)$ は優マルチンゲールであるとする。

確率過程 $(C_n : n \geqq 2)$ は，各 n（$n \geqq 2$）に対して C_n が ①有界 ②非負 ③$\mathcal{F}_{n-1}$-可測 であるとする。

いま，$(Y_n : n \geqq 1)$ を

$$Y_n = \begin{cases} \sum_{k=2}^{n} C_k(X_k - X_{k-1}) & n \geqq 2 \\ 0 & n = 1 \end{cases}$$

で定義すれば，$(Y_n : n \geqq 1)$ は優マルチンゲールである。

［証明］定義 6.2 の（SM1）～（SM3）を確かめる。

（SM1）明らか。

（SM2）C_n が有界であるから明らか。

（SM3）$Y_n - Y_{n-1} = C_n(X_n - X_{n-1})$ であるから，

$$E(Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = E(C_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1})$$

である。ここで，C_n は有界かつ $\mathcal{F}_{n-1}$-可測であるから，定理 5.14(5)より

$$E(C_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) = C_n E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})$$

であり，C_n が非負であることと $(X_n : n \geqq 1)$ が優マルチンゲールであること，定義 6.2（注意 1）より

$$C_n E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \leqq 0$$

である。以上により，$E(Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \leqq 0$ であるから定義 6.2（注意 1）より $(Y_n : n \geqq 1)$ は優マルチンゲールである。■

定義 6.5　$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\})$ をフィルターつき確率空間とする。

関数 $\tau : \Omega \to \{1,2,\cdots\} \cup \{\infty\}$ が**停止時間**（stopping time）とは，任意の正の整数 n に対して

$$\{\omega | \tau(\omega) \leqq n\} \in \mathcal{F}_n \qquad \cdots \quad ①$$

となることである。

（注意）この条件は，$\{\omega | \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ … ② と同値である。

［証明］（①$\Longrightarrow$②）$\{\omega | \tau(\omega) = n\} = \{\omega | \tau(\omega) \leqq n\} \cap \{\omega | \tau(\omega) \leqq n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$

（②$\Longrightarrow$①）$\{\omega | \tau(\omega) \leqq n\} = \{\omega | \tau(\omega) = 1\} \cup \{\omega | \tau(\omega) = 2\} \cup \cdots \cup \{\omega | \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ ■

例　6.6　$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\})$ をフィルターつき確率空間とする。

B を実数のボレル集合とする。確率過程 $(X_n : n \geqq 1)$ に対して，

$$\tau(\omega) = \inf\{n \geqq 1 | X_n(\omega) \in B\}$$

（ただし，右辺の集合が $\emptyset$ のとき，$\inf(\emptyset) = \infty$ と定義する）

とおく（すなわち各 ω に対して，$X_n(\omega)$ が B に入る最初の時間である）。

このとき，τ は停止時間である。

［証明］$\{\omega | \tau(\omega) \leqq n\} = \cup_{k \leqq n} \{\omega | X_k(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_n$ である。■

命題 6.7　$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\})$ をフィルターつき確率空間とし，σ，τ を停止時間とする。このとき，次の(1)～(3)は停止時間になる。

(1) $\sigma \vee \tau$（$= \mathrm{Max}\{\sigma, \tau\}$）　(2) $\sigma \wedge \tau$（$= \mathrm{Min}\{\sigma, \tau\}$）　(3) $\sigma + \tau$

［証明］任意の正の整数 n をとり固定する。

(1) $\{\omega|\sigma(\omega)\vee\tau(\omega)\leqq n\}=\{\omega|\sigma(\omega)\leqq n\}\cap\{\omega|\tau(\omega)\leqq n\}\in\mathcal{F}_n$ である。

(2) $\{\omega|\sigma(\omega)\wedge\tau(\omega)\leqq n\}=\{\omega|\sigma(\omega)\leqq n\}\cup\{\omega|\tau(\omega)\leqq n\}\in\mathcal{F}_n$ である。

(3) $\{\omega|\sigma(\omega)+\tau(\omega)\leqq n\}=\cup_{k=0}^{n}[\{\omega|\sigma(\omega)=k\}\cap\{\omega|\tau(\omega)=n-k\}]\in\mathcal{F}_n$ である。■

定理 6.8　$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\})$ をフィルターつき確率空間とし，$(X_n : n\geqq 1)$ を Ω 上の優マルチンゲール，$\tau:\Omega\to\{1,2,\cdots\}\cup\{\infty\}$ を停止時間とする。このとき次の(1)，(2)が成り立つ。

(1) 時間を τ で停止した確率過程 $(X_{\tau\wedge n} : n\geqq 1)$ は優マルチンゲールであり，

$$E(X_{\tau\wedge n})\leqq E(X_1)$$

が成り立つ。

(2) **任意停止定理**（optional stopping theorem）とくに，τ が有界な停止時間のとき，X_τ は可積分で，

$$E(X_\tau)\leqq E(X_1)$$

が成り立つ。

［証明］(1) 確率過程 $(C_n : n\geqq 2)$ を，各正の整数 n（$n\geqq 1$）に対して，

$$C_n(\omega)=\chi_{\{\zeta|n\leqq\tau(\zeta)\}}(\omega)$$

で定義する。$(C_n : n\geqq 2)$ は命題 6.4 の条件 ①有界 ②非負 をみたし，

$$\{\omega|C_n(\omega)=0\}=\{\zeta|\tau(\zeta)\leqq n-1\}\in\mathcal{F}_{n-1}$$

$$\{\omega|C_n(\omega)=1\}=\{\zeta|\tau(\zeta)\leqq n-1\}^c\in\mathcal{F}_{n-1}$$

であるから ③$\mathcal{F}_{n-1}$-可測 である。また，$(X_n : n\geqq 1)$ は優マルチンゲールであるから，命題 6.4 より

$$Y_n=\begin{cases}\sum_{k=2}^{n}C_k(X_k-X_{k-1}) & n\geqq 2\\ 0 & n=1\end{cases}$$

とすると，$(Y_n : n\geqq 1)$ は優マルチンゲールである。

ここで，Y_n について，

$n\leqq\tau$ のとき，$Y_n=\sum_{k=2}^{n}C_k(X_k-X_{k-1})=X_n-X_1$

$n>\tau$ のとき，$Y_n=\sum_{k=2}^{\tau}C_k(X_k-X_{k-1})+\sum_{k=\tau+1}^{n}C_k(X_k-X_{k-1})=X_\tau-X_1$

であるから，

$$Y_n=X_{\tau\wedge n}-X_1$$

である。$(Y_n : n\geqq 1)$ が優マルチンゲールであることより，$(X_{\tau\wedge n} : n\geqq 1)$ は優マルチンゲールである。

後半は，$(X_{\tau\wedge n} : n\geqq 1)$ が優マルチンゲールであるから定義 6.2 の（注意 2）より，

$$E(X_{\tau\wedge n})\leqq E(X_{\tau\wedge 1})=E(X_1)$$

が成り立つ。

(2) τ が有界だからある正の整数 N があって，任意の ω に対して $1\leqq\tau(\omega)\leqq N$ が成り立つ。

一方(1)より，任意の正の整数 n に対して $X_{\tau\wedge n}$ は可積分で，$E(X_{\tau\wedge n})\leqq E(X_1)$ である。

とくに $n=N$ のとき，$\tau\wedge N=\tau$ であるから $E(X_\tau)\leqq E(X_1)$ である。■

第 7 章　おわりに

この章では　第 0 章　はじめに　で提示した問題の解答を与える。

問題を再度確認する。

> 1 個のさいころを投げて，出た目を得点とするゲームを行う。ただし，
> ①さいころは 10 回まで投げることができる。
> ②出た目を見たうえで 10 回より前に止めることもできる。
> ③新たにさいころを投げると直近の得点は無効になる。
> ④止めたときのさいころの目が得点になる。
> このゲームでできるだけ高得点を狙うにはどのような戦略をとることが有利であるか。

この問題の解答を与えるにあたって次のように解釈する。

まずは基本的な設定をする。正確に言うと，この問題を解決するために，

（Ⅰ） 適当なフィルターつき確率空間（Ω，$\mathcal{F}$，P，$\{\mathcal{F}_n\}$）と確率過程（$X_n : n \geqq 1$）を設定する。

ということである。次に，1 回目から 10 回目のうち何回目で止めるのかを次のように考えよう。

（Ⅱ） 停止時間$\tau : \Omega \to \{1,2,\cdots,10\}$ の集合T を考えて，$E(X_\tau)$ が最大になる$\tau \in \mathrm{T}$ を見つける。

この方針でマルチンゲールの理論を応用して問題を解決しよう。

解答を 5 段に分ける。はじめの 4 段では（Ⅰ）の設定が行われたとしての一般論である。第 5 段でこの問題を解決するために適当な（Ⅰ）の設定を行い，前段までの一般論を適用する。

Nを正の整数とし，（Ω，$\mathcal{F}$，P，$\{\mathcal{F}_n\}$）をフィルターつき確率空間とする。

Ω 上の確率過程（$X_n : 1 \leqq n \leqq N$）は，各 n（$1 \leqq n \leqq N$）に対して X_nが可積分とする。

【第 1 段】（$Y_n : 1 \leqq n \leqq N$）の定義と性質

Ω 上の確率過程（$X_n : 1 \leqq n \leqq N$）に対して，確率過程（$Y_n : 1 \leqq n \leqq N$）を，

$$Y_n = E(X_n | \mathcal{F}_n) \qquad (1 \leqq n \leqq N)$$

で定義する。

補題 7.1　確率過程（$Y_n : 1 \leqq n \leqq N$）に対して次の(1)，(2)が成り立つ。

(1) 各 n（$1 \leqq n \leqq N$）に対して Y_nは$\mathcal{F}_n$-可測である。

(2) 任意の停止時間$\tau \in \mathrm{T}$ に対して，$E(X_\tau) = E(Y_\tau)$ が成り立つ。

［証明］(1) 明らか。

(2) 任意の n に対して$\{\omega | \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$であるから，定理 5.14(1)より，

$$E(Y_n : \{\omega | \tau(\omega) = n\}) = E(E(X_n | \mathcal{F}_n) : \{\omega | \tau(\omega) = n\}) = E(X_n : \{\omega | \tau(\omega) = n\})$$

が成り立つ。したがって，

$$E(Y\tau)=\sum_{n=1}^{N}E(Y\tau:\{\omega|\tau(\omega)=n\})=\sum_{n=1}^{N}E(Y_n:\{\omega|\tau(\omega)=n\})$$

$$=\sum_{n=1}^{N}E(X_n:\{\omega|\tau(\omega)=n\})=\sum_{n=1}^{N}E(X\tau:\{\omega|\tau(\omega)=n\})=E(X\tau)$$

となる。■

補題 7.1 より，（Ⅱ）の$E(X\tau)$が最大になる$\tau\in\mathrm{T}$を見つけることは，$E(Y\tau)$が最大になる$\tau\in\mathrm{T}$を見つけることと同じである。

【第 2 段】$(Z_n:1\leqq n\leqq N)$の定義と性質

Ω 上の確率過程$(Z_n:1\leqq n\leqq N)$を，$n=N$から逆向きに，

$$Z_N=Y_N$$

$$Z_n=E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)\vee Y_n \quad (1\leqq n\leqq N-1)$$

で定義する。

補題 7.2　$(Z_n:1\leqq n\leqq N)$は任意の$1\leqq n\leqq N$に対して$Y_n\leqq Z_n$となるような最小の優マルチンゲールである。すなわち，次の(1)，(2)が成り立つ。

(1)（優マルチンゲール性）$(Z_n:1\leqq n\leqq N)$は優マルチンゲールである。

(2)（最小性）$(W_n:1\leqq n\leqq N)$を任意の$1\leqq n\leqq N$に対して$Y_n\leqq W_n$となるような任意の優マルチンゲールとすると，$Z_n\leqq W_n$ $(1\leqq n\leqq N)$が成り立つ。

［証明］定義より$Y_n\leqq Z_n$は明らか。

(1) 定義 6.2 の（SM1）～（SM3）を確かめる。

（SM1），（SM2）は明らか。

（SM3）定義より明らかに，$E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)\leqq Z_n$であるから優マルチンゲールである。

(2) 逆向きの数学的帰納法で証明する。

$n=N$のとき　$Z_N=Y_N\leqq W_N$であるから成り立つ。

$n=k+1$のとき　$Z_{k+1}\leqq W_{k+1}$が成り立つと仮定する。

$n=k$のとき　帰納法の仮定と定理 5.14(3)より$E(Z_{k+1}|\mathcal{F}_k)\leqq E(W_{k+1}|\mathcal{F}_k)\leqq W_k$である。

また，$Y_k\leqq W_k$であるから

$$Z_k=E(Z_{k+1}|\mathcal{F}_k)\vee Y_k\leqq W_k$$

が成り立つ。

よって逆向きの数学的帰納法より$Z_n\leqq W_n$ $(1\leqq n\leqq N)$が成り立つ。■

【第 3 段】停止時間の設定

$\tau_0=\mathrm{Min}\{n|Y_n=Z_n\}$と定義する。

補題 7.3　τ_0は停止時間である。すなわち，$\tau_0\in\mathrm{T}$である。

［証明］任意のnに対して，

$$\{\omega|\tau_0(\omega)\leqq n\} = \cup_{k=1}^{n}\{\omega|\tau_0(\omega)=k\} = \cup_{k=1}^{n}\{\omega|Y_k(\omega)=Z_k(\omega)\}\in \mathcal{F}_n$$

であるから，$\tau_0\in \mathrm{T}$ である。■

補題 7.4　$\tau_0\geqq n+1$ のとき，$Z_n=E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ である（$1\leqq n\leqq N-1$）。

［証明］$1\leqq n\leqq N-1$ に対して$Z_n=E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)\vee Y_n$ であるが，τ_0 の定義と補題 7.2 より$\tau_0\geqq n+1$ のときは$Y_n<Z_n$ である。したがって$Z_n=E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ である。■

【第 4 段】主要定理

次の定理が成り立つ。

定理 7.5　$\tau_0=\mathrm{Min}\{n|Y_n=Z_n\}$ とすると，

$$E(Y_{\tau_0}) = \mathrm{Max}\{E(Y_\tau)\,|\tau\in \mathrm{T}\}$$

が成り立つ。

［証明］任意の停止時間$\tau\in \mathrm{T}$ に対して，$E(Y_\tau)\leqq E(Y_{\tau_0})$ を示せばよい。

次の 4 点に注意しよう。

1 点目は，補題 7.2 より$Y_n\leqq Z_n$ であるから$Y_\tau\leqq Z_\tau$ であり，$E(Y_\tau)\leqq E(Z_\tau)$　…①　である。

2 点目は，補題 7.2 より（$Z_n: 1\leqq n\leqq N$）は優マルチンゲールであるから，任意停止定理（定理 6.8(2)）より$E(Z_\tau)\leqq E(Z_1)$　…②　が成り立つ。

3 点目は，$\tau_0=\mathrm{Min}\{n|Y_n=Z_n\}$ であるから，$Y_{\tau_0}=Z_{\tau_0}$ であり，$E(Y_{\tau_0})=E(Z_{\tau_0})$　…③　である。

4 点目は，$E(Z_1)=E(Z_{\tau_0})$　…④　が成り立つ。実際,

$$E(Z_1)=E(Z_1:\{\omega|\tau_0(\omega)=1\})+E(Z_1:\{\omega|\tau_0(\omega)\geqq 2\})$$

と分ける。ここで補題 7.4 より，$\tau_0\geqq 2$ のとき，$Z_1=E(Z_2|\mathcal{F}_1)$ であるから,

$$=E(Z_{\tau_0}:\{\omega|\tau_0(\omega)=1\})+E(E(Z_2|\mathcal{F}_1):\{\omega|\tau_0(\omega)\geqq 2\})$$
$$=E(Z_{\tau_0}:\{\omega|\tau_0(\omega)=1\})+E(Z_2:\{\omega|\tau_0(\omega)\geqq 2\})$$
$$=E(Z_{\tau_0}:\{\omega|\tau_0(\omega)=1\})+E(Z_2:\{\omega|\tau_0(\omega)=2\})+E(Z_2:\{\omega|\tau_0(\omega)\geqq 3\})$$

となる。再び補題 7.4 より，$\tau_0\geqq 3$ のとき，$Z_2=E(Z_3|\mathcal{F}_2)$ であるから同様に,

$$=E(Z_{\tau_0}:\{\omega|\tau_0(\omega)=1\})+E(Z_2:\{\omega|\tau_0(\omega)=2\})+E(E(Z_3|\mathcal{F}_2):\{\omega|\tau_0(\omega)\geqq 3\})$$
$$=E(Z_{\tau_0}:\{\omega|\tau_0(\omega)=1\})+E(Z_{\tau_0}:\{\omega|\tau_0(\omega)=2\})+E(Z_3:\{\omega|\tau_0(\omega)\geqq 3\})$$

となる。以下この操作を繰り返せば,

$$E(Z_1)=\sum_{k=1}^{N}E(Z_k:\{\omega|\tau_0(\omega)=k\})=E(Z_{\tau_0})$$

が得られる。

以上のことより,

$$E(Y_\tau)\overset{①}{\leqq}E(Z_\tau)\overset{②}{\leqq}E(Z_1)\overset{④}{=}E(Z_{\tau_0})\overset{③}{=}E(Y_{\tau_0})$$

となる。■

系　7.6　$\mathrm{Max}\{E(Y_\tau)\,|\tau\in \mathrm{T}\}=E(Z_1)$

［証明］定理 7.5 と，証明内の③，④より得られる。■

【第 5 段】解決編

（Ⅰ）で提示したこの問題を解決するための確率空間（Ω，$\mathcal{F}$，P）として，

$$\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}) \mid 1\leqq\omega_n\leqq 6\ (n=1,2,\cdots,10)\}$$

$$\mathcal{F}=2^{\Omega}$$

$$P(\{\omega\})=\frac{1}{2^6}$$

とし，確率過程（X_n：$1\leqq n\leqq 10$）として，

$$X_n(\omega)=\omega_n \quad (\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10})\in\Omega\ (n=1,2,\cdots,10))$$

と設定する。明らかに X_n は各 n（$1\leqq n\leqq N$）に対して可積分である。

（X_n：$1\leqq n\leqq 10$）からフィルトレーション$\{\mathcal{F}_n\}$を

$$\mathcal{F}_1=\sigma(X_1),\ \mathcal{F}_2=\sigma(X_1,X_2),\ \mathcal{F}_3=\sigma(X_1,X_2,X_3),\ \cdots,\ \mathcal{F}_{10}=\sigma(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_{10})$$

と定義する。

第 1 段で設定したようにΩ 上の確率過程（Y_n：$1\leqq n\leqq 10$）を

$$Y_n=E(X_n|\mathcal{F}_n) \qquad (1\leqq n\leqq 10)$$

と定義する。今の場合，X_n は $\mathcal{F}_n$-可測なので，$Y_n=X_n$ P-a.s. である。

第 2 段で設定したようにΩ 上の確率過程（Z_n：$1\leqq n\leqq 10$）を作る。$Z_{10}=Y_{10}$ すなわち，

$$Z_{10}=X_{10}$$

であり，

$$Z_9=E(Z_{10}|\mathcal{F}_9)\vee Y_9=E(Y_{10}|\mathcal{F}_9)\vee Y_9=E(X_{10}|\mathcal{F}_9)\vee X_9$$

である。ここで，定理 5.11(1)より X_{10} と $\mathcal{F}_9$ は独立であるから，定理 5.14(6)より，$E(X_{10}|\mathcal{F}_9)=E(X_{10})$ である。したがって，

$$Z_9=E(X_{10})\vee X_9=(1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6})\vee X_9=3.5\vee X_9$$

となる。

同様に，

$$Z_8=E(Z_9|\mathcal{F}_8)\vee Y_8=E(3.5\vee Y_9|\mathcal{F}_8)\vee Y_8=E(3.5\vee X_9|\mathcal{F}_8)\vee X_8$$

である。ここで，定理 5.11(1)より X_9 と $\mathcal{F}_8$ は独立なので$3.5\vee X_9$ と $\mathcal{F}_8$ も独立になり，定理 5.14(6)より，$E(3.5\vee X_9|\mathcal{F}_8)=E(3.5\vee X_9)$ である。したがって，

$$Z_8=E(3.5\vee X_9)\vee X_8=(3.5\times\frac{3}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6})\vee X_8=4.25\vee X_8$$

である。以下同様に，

$$Z_7=E(4.25\vee X_8)\vee X_7=(4.25\times\frac{4}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6})\vee X_7=4.66\vee X_7$$

$$Z_6=E(4.66\vee X_7)\vee X_6=(4.66\times\frac{4}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6})\vee X_6=4.94\vee X_6$$

$$Z_5=E(4.94\vee X_6)\vee X_5=(4.94\times\frac{4}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6})\vee X_5=5.12\vee X_5$$

$$Z_4 = E(5.12 \vee X_5) \vee X_4 = (5.12 \times \frac{5}{6} + 6 \times \frac{1}{6}) \vee X_4 = 5.27 \vee X_4$$

$$Z_3 = E(5.27 \vee X_4) \vee X_3 = (5.27 \times \frac{5}{6} + 6 \times \frac{1}{6}) \vee X_3 = 5.40 \vee X_3$$

$$Z_2 = E(5.40 \vee X_3) \vee X_2 = (5.40 \times \frac{5}{6} + 6 \times \frac{1}{6}) \vee X_2 = 5.50 \vee X_2$$

$$Z_1 = E(5.50 \vee X_2) \vee X_1 = (5.50 \times \frac{5}{6} + 6 \times \frac{1}{6}) \vee X_1 = 5.58 \vee X_1$$

となる。

第 3 段で設定したように$\tau_0 = \mathrm{Min}\{n | Y_n = Z_n\}$ と定義する。つまり，n 回目の目 X_n についてはじめて $Y_n = Z_n$ となる時点で止める。すなわち，

「$X_n = Z_n$ となった時点で止める」

のである。

このように停止時間を設定すると，第 4 段の定理 7.5 より，その期待値は最大になる。

したがって，次のように戦略を立てるとよい。

(1 回目) $Z_1 = 5.58 \vee X_1$ であるから，1 回目の目 X_1 について，

1 回目の目が 6　$\Longrightarrow$　1 回目で止める。

1 回目の目が 1～5　$\Longrightarrow$　2 回目に進む。

(2 回目) $Z_2 = 5.50 \vee X_2$ であるから，2 回目の目 X_2 について，

2 回目の目が 6　$\Longrightarrow$　2 回目で止める。

2 回目の目が 1～5　$\Longrightarrow$　3 回目に進む。

(3 回目) $Z_3 = 5.12 \vee X_5$ であるから，3 回目の目 X_3 について，

3 回目の目が 6　$\Longrightarrow$　3 回目で止める。

3 回目の目が 1～5　$\Longrightarrow$　4 回目に進む。

(4 回目) $Z_4 = 5.27 \vee X_4$ であるから，4 回目の目 X_4 について，

4 回目の目が 6　$\Longrightarrow$　4 回目で止める。

4 回目の目が 1～5　$\Longrightarrow$　5 回目に進む。

(5 回目) $Z_5 = 5.12 \vee X_5$ であるから，5 回目の目 X_5 について，

5 回目の目が 6　$\Longrightarrow$　5 回目で止める。

5 回目の目が 1～5　$\Longrightarrow$　6 回目に進む。

(6 回目) $Z_6 = 4.94 \vee X_6$ であるから，6 回目の目 X_6 について，

6 回目の目が 5 か 6　$\Longrightarrow$　6 回目で止める。

6 回目の目が 1～4　$\Longrightarrow$　7 回目に進む。

(7 回目) $Z_7 = 4.66 \vee X_7$ であるから，7 回目の目 X_7 について，

7 回目の目が 5 か 6　$\Longrightarrow$　7 回目で止める。

7 回目の目が 1～4　$\Longrightarrow$　8 回目に進む。

(8 回目) $Z_8 = 4.25 \vee X_8$ であるから，8 回目の目 X_8 について，

8 回目の目が 5 か 6　$\Longrightarrow$　8 回目で止める。

8 回目の目が 1～4　$\Longrightarrow$　9 回目に進む。

（9 回目）$Z_9 = 3.5 \vee X_9$ であるから，9 回目の目 X_9 について，

9 回目の目が 4～6　$\Longrightarrow$　9 回目で止める。

9 回目の目が 1～3　$\Longrightarrow$　10 回目に進む。

（10 回目）どんな目が出てもそこで終了。

とする。つまり，

> 5 回目までは 6 の目が出たら止め，出なければ次に挑戦する。
> 6 回目から 8 回目までは 5 または 6 の目が出たら止め，出なければ次に挑戦する。
> 9 回目は 4 または 5 または 6 の目が出たら止め，それでも出なかったら 10 回目に挑戦する。

という戦略を立てるのが最も有利である。つまり得点の期待値が最大になる。

なお，このときの得点の期待値は，系 7.6 より $E(Z_1)$ を求めればよい。$Z_1 = 5.58 \vee Y_1$ であるから，

$$E(Z_1) = 5.58 \times \frac{5}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 5.65$$

である。

さくいん

【か】

確率過程 stochastic process 40
確率空間 probability space 30
確率 probability 30
確率測度 probability measure 30
確率分布 probability distribution 33
確率変数 random variable 33
可積分 integrable 16
可測空間 measurable space 8
可測(関数が) measurable 12
可測関数 measurable function 12
下変分 lower variation 24
期待値 expectation 34
空事象 empty event 30

【さ】

σ-加法族 σ-additive class 8
事象 event 30
条件つき期待値 conditional expectation 35
上変分 upper variation 24
ジョルダン分解 Jordan decomposition 26
正規分布 normal distribution 34
積事象 product event 30
絶対連続 absolute continuous 23
全事象 whole event 30
測度 measure 8
測度空間 measure space 9

【た】

単関数 simple function 13
単調収束定理
monotone convergence theorem 18
停止時間 stopping time 42
特異 singular 23
独立(確率変数列が) independent 34
独立(確率変数とσ-加法族が) independent 35

【な】

二項分布 binomial distribution 33
任意停止定理 optional stopping theorem 43

【は】

ハーン分解 Hahn decomposition 26
排反 exclusive 30
ファトゥの補題 Fatou's lemma 19
フィルターつき確率空間
filtered probability space 40
フィルトレーション filtration 40
符号つき測度 signed measure 23
ベルトランの逆説 Bertrand paradox 31
ほとんどいたるところ almost everywhere 10
ほとんど確実に almost surely 30
ボレル集合 Borel set 8

【ま】

マルチンゲール martingale 40

【や】

優マルチンゲール supermartingale 40
余事象 complementary event 30

【ら】

ラドン-ニコディム導関数
Radon-Nikodým derivative 24
ラドン-ニコディムの定理
Radon-Nikodým theorem 24
ルベーグ可測空間
Lebesgue measurable space 8
ルベーグ積分 Lebesgue integral 15
ルベーグ測度空間 Lebesgue measure space 9

ルベーグの収束定理
Lebesgue's convergence theorem 20
ルベーグ分解 Lebesgue decomposition 24

【わ】
和事象 sum event 30

参考文献

［1］伊藤　清三　『ルベーグ積分入門（数学選書4)』，裳華房，1963.
［2］伊藤　　清　『確率論　(岩波基礎数学選書)』，岩波書店，1991.
［3］澤野　嘉宏　『早わかりルベーグ積分（数学のかんどころ29)』，共立出版，2015.

著者プロフィール

杉本　幸司（すぎもと　こうじ）
略歴　1965 年　北海道釧路市に生まれる。
　　1989 年　北海道大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了。
　　北海道立高等学校教諭，予備校講師を経て，
　　現在，私立札幌静修高等学校教諭。理学修士，修士（教育学)，博士（工学)。
専攻　確率過程論，エルゴード理論，数学科教育法，脳工学
著書　時をかける少年〜時系列解析への入門〜（ポレポレ出版，1993）
　　脳トレし MATH？（ぽすと出版，2008）
　　じっくり考える平面ベクトルと平面図形（文芸社，2013）
　　「複素数平面」で解く「図形と方程式」(学研プラス，2019）