

第129回数実研@北大

数学実践REPORT

北海道札幌琴似工業高等学校 吉田多杜 15 June, 2024

16世紀イタリアで行われた数学の試合を行いました

カルダノとタルタリアについて調べているうちに、16世紀のイタリアで代数学が盛んであることを知りました。違う流派の2人がそれぞれ3次方程式をつくり、互いに解き合う試合が行われていたそうです。「これは授業のネタとなるぞ」と思い、因数定理から組立除法へとつなげるワンクッションとして、数学IIを履修している2年生向けに授業を行いました。数学史を紹介することのプラスアルファとして、いつか数学史と絡めた授業実践を行いたいと考えていたため、念願が叶いました。また、生徒の様子・発言から思わぬ発見もあったので紹介します。

事前準備

あまりに途方のない3次方程式を作られても解く側が困ると考え、くじ引きを行い、「くじに書かれた3つの数字」を解とする3次方程式を作ってもらうことにしました。くじには相違3実数解の他、複素共役の解を混ぜました。こうすることで、複素係数となることを防ぎました。3次の係数は1とし、係数は整数となるようにくじを作成しています。

また、3次方程式の作り方を授業の初めに説明しました。右の写真のように、黒板で展開する様子を見せることで、問題作成で困らないように工夫しました。

正しく問題を作れないと、対戦相手が解くときに困ってしまいます。したがって、グループの中で、作成した問題に間違いがないか確認する時間を設けました。

$$\begin{aligned} & \text{解が } 1, 2, 3 \\ & (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \\ & (x^2-3x+2)(x-3) = 0 \\ & x^3 - 3x^2 + 9x - 6 = 0 \\ & \boxed{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0} \end{aligned}$$



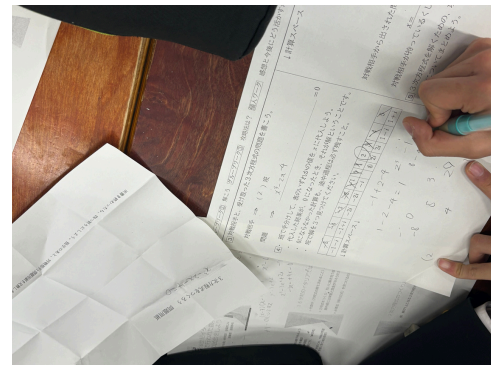
他班が作成した3次方程式を実際に解く

くじ引きの中身（解の候補となる数字たち）は生徒に公開しました。つまり、その数字たちを代入し、値が0になるかを判定することで解を探っていきます。その際、生徒は授業の中で多様な意見を出してくれたので、紹介します。

- 「2次や1次の項がないときは、複素数が怪しいぞ」
- 「定数項が素数のときは、めっちゃ簡単」
- 「定数項の約数を代入したら、うまくいくっぽい」

授業をやってみて

生徒の声を聞き取っていくなかで、3次の解と係数の関係にかかわる発言や、組立除法へとつながる発言が出てきて、大変興味深かったです。また、これまでは因数定理と組立除法のつながりを意識させることなく、(まるで小学校の筆算のように)機械的に組立除法を教えていました。しかし、この授業を間に挟むことで、明らかに生徒の理解度の深みが増しました。ただ、やはり問題の間違いが発覚し、どうやっても(整数の範囲では)解けない3次方程式を出題してしまう班が存在したことは反省点です。



① くじで引いた3つの数字に○をつけよう。

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$-1-i$	$-1+i$	$-3i$	$-2i$	$-i$		i	$2i$	$3i$	$1-i$	$1+i$

② 3つの数字を、●、▲、■とすると、それらを解に持つ3次方程式は、

$$(x - \bullet)(x - \blacktriangle)(x - \blacksquare) = 0$$

と表せる。3つの数字を代入し、展開して降べきの順にしよう。

↓計算スペース↓

↓計算スペース(つづき) ↓

この班が作成した3次方程式は、

_____ = 0 です。技能 A B C

★重要な性質★

3次方程式が虚数解をもつとき、その虚数解と共役な複素数も3次方程式の解となる。

注意事項

- ・マイナスのマイナスはプラスです。
- ・降べきの順に並べましたか？
- ・班のメンバーと同じになったか確認しよう。
- ・展開の結果が、この班が作成した「問題」となります。
- ・終わったら、問題用紙に問題と、班番号を書いてください。

③ 対戦相手と、受け取った3次方程式の問題を書こう。

対戦相手 ⇒ () 班

問題 ⇒ _____ = 0

- ④ 班で手分けして、表のいずれかの値を x に代入しよう。
- 代入した結果が、0 になったとき、それが解ということです。
 - 0 にならなかった計算も、途中過程は必ず残すこと。
 - 班で解を3つ見つけてください。

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$-1-i$	$-1+i$	$-3i$	$-2i$	$-i$		i	$2i$	$3i$	$1-i$	$1+i$

↓計算スペース↓

↓計算スペース(つづき)↓

対戦相手から出された問題の答え

$x =$ _____ , _____

対戦相手が持っているくじで丸付けします。 思考 A B C

- ⑤ 3次方程式を解くための、攻略法や、気づいたこと、効率的な方法等についてまとめよう。 表現 A B C

- ⑥ この授業の感想と、今後の学習にどう活かすか、書こう。

主体的に学習に取り組む態度 A B C