

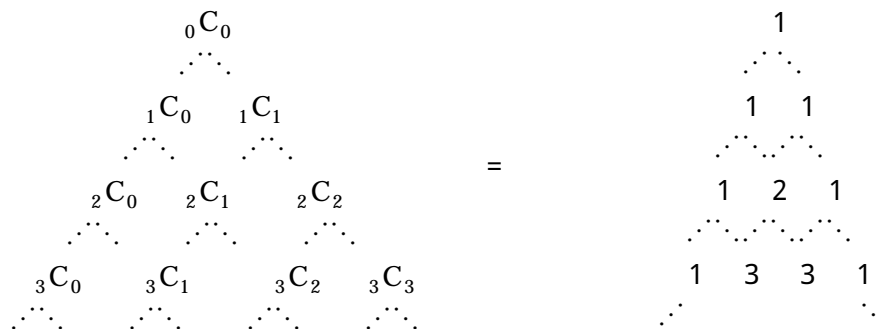
# パスカルの三角錐(三項係数)

## 二項定理とパスカルの三角形

$(a + b)^n = (a + b)(a + b)^{n-1}$  の両辺の係数比較により

${}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r$  ( $n > r > 0$ ) が成り立つ。このことと

${}_n C_0 = {}_n C_n = 1$  ( $n \geq 0$ ) とからパスカルの三角形



が成立する。

## 三項定理とパスカルの三角錐

$(a + b + c)^n = (a + b + c)(a + b + c)^{n-1}$  の両辺の係数比較により

$$\frac{n!}{p!q!r!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!q!r!} + \frac{(n-1)!}{p!(q-1)!r!} + \frac{(n-1)!}{p!q!(r-1)!} \quad (n = p + q + r, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0)$$

が成り立つ。このこととパスカルの三角形から、次の断面図で示されるような『パスカルの三角錐』を得る。

$$\frac{0!}{0!0!0!} = 1$$

$$\frac{\frac{1!}{0!0!1!}}{\frac{1!}{0!1!0!}} \left[ \frac{0!}{0!0!0!} \right] = \frac{1}{1} \left[ \frac{1}{1} \right]$$

$$\frac{\frac{2!}{0!0!2!}}{\frac{2!}{0!1!1!}} \left[ \frac{1!}{0!0!1!} \right] \left[ \frac{1!}{1!0!0!} \right] = \frac{\frac{2!}{1!0!1!}}{\frac{2!}{0!2!0!}} \left[ \frac{1}{1} \right] \left[ \frac{1}{1} \right]$$

$$\begin{array}{cccc}
\frac{3!}{0!0!3!} & \frac{3!}{1!0!2!} & \frac{3!}{2!0!1!} & \frac{3!}{3!0!0!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\left[ \frac{2!}{0!0!2!} \right] & \left[ \frac{2!}{1!0!1!} \right] & \left[ \frac{2!}{2!0!0!} \right] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\frac{3!}{0!1!2!} & \frac{3!}{1!1!1!} & \frac{3!}{2!1!0!} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\left[ \frac{2!}{0!1!1!} \right] & \left[ \frac{2!}{1!1!0!} \right] & & \\
\vdots & \vdots & & \\
\frac{3!}{0!2!1!} & \frac{3!}{1!2!0!} & & \\
\vdots & \vdots & & \\
\left[ \frac{2!}{0!2!0!} \right] & & & \\
\vdots & & & \\
\frac{3!}{0!3!0!} & & & 
\end{array}$$

=

$$\begin{array}{cccc}
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& [1] & & [2] & & [1] & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
3 & & 6 & & 3 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& [2] & & [2] & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
3 & & 3 & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
& [1] & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
1 & & & & & & 
\end{array}$$