

## 関数の連続性とグラフの連結性について

北海道倶知安高等学校  
数学科 原田 牧夫

よく言われる、というよりもむしろ、我々が生徒に対してよく口にするとところの **“グラフが繋がっているのが連続関数だ”** というのは本当に正しいことなのでしょうか。このような直感的表現は数学的概念を把握させるためにはしばしば有効なものたりうるわけですが、そもそも **“グラフが繋がっている”** というのは一体どのようなことなのでしょうか。

**“グラフが繋がっている”** というあいまいな(しかしとても大事な)直感は、いわゆる **“連結性”** と呼ばれる概念に関係するものに違いありません。“関数が連続ならばグラフは連結である” という事実は **“連続写像による連結集合の像は連結である”** というよく知られた命題から容易に導かれますが、ここで問題にしているのはその逆です。**“グラフが連結ならば関数は連続か”**、**“関数が連続であるということと同値になるグラフの「連結性のよ**  
**うな性質」はいかなるものが”** について考えてみましょう。

文中**定義 1**、**命題 2**、などという番号のついたものは、大抵の「位相」もしくは「多様体」の入門書に載っている事項ですので、命題には証明をつけていません(**命題 7**は載ってはいないと思いますが簡単に証明できます)。一方**例 A**、**命題 C**、などといったアルファベットの付いたものは証明も含めて私のオリジナルです。私の知る限りではこれらは専門書等には見当たりませんでしたので、なるべく丁寧な解説をしたつもりです。

若い世代の健全な数学的直感を育む責任を負う者として、直感にどこまでも甘えてしまうのではなく、正しい理論を携えた上で、直感的に語りたいと思うのです。

**定義 1**

位相空間  $X$  が、互いに素な空でない二つの開集合の和集合として表すことができないとき、 $X$  は**連結**であるという。

つまり

$X$ (位相空間),

“ $X$  は**連結**である” :=  $\neg \exists V_1, V_2 (X \text{ の非空開集合}, V_1 \cup V_2 = X, V_1 \cap V_2 = \emptyset)$ .

位相空間  $X$  の部分集合  $Y$  が、 $X$  の部分位相空間として**連結**であるとき、 $Y$  は  $X$  **において連結**であるという。

**命題 2**

$X$ (位相空間),  $(Y_\mu)$  ( $X$  の部分集合の族)

s.t. [  $\bigcup_\mu Y_\mu = X$ ,  $Y_\mu$  は  $X$  において**連結**である。 ]

[  $\mu, \nu$  s.t.  $\mu \cap \nu \neq \emptyset$ ,  $Y_\mu \cap Y_\nu$  は  $X$  において**連結**である。 ]

$Y = \bigcup_\mu Y_\mu$  は  $X$  において**連結**である。

**命題 3**

$X, Y$ (位相空間),  $f: X \rightarrow Y$ (連続),

$X$  において**連結**,  $A \subseteq X$  ( $A$  において**連結**),  $f(A)$  は  $Y$  において**連結**である。

**命題 4**

$X$ (位相空間),  $x \in X$ ,

$C(x) \subseteq X$ ,  $x \in C(x)$ ,  $C(x)$  は  $X$  において**連結**,

[  $A \subseteq X$  ( $A$  において**連結**) s.t.  $x \in A$ ,  $A \subseteq C(x)$  ].

この  $C(x)$  を  $x$  の**連結成分**と呼ぶ。また、 $C[X] := \{C(x) \mid x \in X\}$  と定め、 $C[X]$  の各元を  $X$  における**連結成分**と呼ぶ。

**命題 5**

$X$ (位相空間),

$C[X] = X$ .

$V, W \subseteq C[X]$  s.t.  $V \cap W \neq \emptyset$ ,  $V \cup W = C[X]$ .

**命題 6**

$A \subset \mathbb{R}$ , 次の3つの条件は互いに同値である :

A は  $\mathbb{R}$  において連結。

A は空集合, 単集合(つまり一点から成る集合), 开区間, 閉区間, 半开区間のうちのいずれかである。

A は  $\mathbb{R}$  において連結かつ局所連結。(定義 8 参照)

任意の  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を固定し,  $G[f] := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,  $F := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus G[f] \subset \mathbb{R}^2$  と置く。

**命題 7**

“f は  $\mathbb{R}$  上連続である”

“ $F : \mathbb{R} \rightarrow G[f]$  は同相写像である”

“ $G[f]$  は  $\mathbb{R}^2$  において連結かつ局所連結。(定義 8 参照)”

特に,  $f$  が  $\mathbb{R}$  上連続であるならば,  $G[f]$  は  $\mathbb{R}^2$  において連結である。

**例 A**

$f$  を  $f(x) := \sin(1/x)$  for  $x > 0$ ,  $f(x) := 0$  for  $x \leq 0$ , と定めると,  $f$  は  $x=0$  において不連続であるが,  $G[f]$  は  $\mathbb{R}^2$  において連結である。

**例 A の詳解**

$f$  が  $x=0$  において不連続であることは明らか。

今  $G[f]$  が  $\mathbb{R}^2$  において連結ではないと仮定すると,

$V_1, V_2$  ( $X$  の部分位相空間  $G[f]$  の非空開集合),  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \cup V_2 = G[f]$ .

となる。

$A := \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$ ,  $B := \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$  と定めると  $A \cup B = G[f]$ ,  $A \cap B = \emptyset$ .

$A, B$  はともに  $\mathbb{R}^2$  において連結であるから

$$\neg [A \cap V_1 \neq \emptyset \wedge A \cap V_2 \neq \emptyset] \Rightarrow \neg [B \cap V_1 \neq \emptyset \wedge B \cap V_2 \neq \emptyset],$$

$$[A \cap V_1 = \emptyset \wedge A \cap V_2 = \emptyset] \Rightarrow [B \cap V_1 = \emptyset \wedge B \cap V_2 = \emptyset],$$

$$[A \cap V_2 = \emptyset \wedge A \cap V_1 = \emptyset] \Rightarrow [B \cap V_2 = \emptyset \wedge B \cap V_1 = \emptyset].$$

ここで  $V_1$  と  $V_2$  は非空だから,  $[A \cap V_1 = \emptyset \wedge B \cap V_2 = \emptyset] \Rightarrow [B \cap V_1 = \emptyset \wedge A \cap V_2 = \emptyset]$ .

だが ( $X$  の部分位相空間  $G[f]$  の位相に関して)  $0$  が  $B$  の内点ではないことは明らか。

これは矛盾である。

例 A は “ $f$  は  $\mathbb{R}$  上連続である” “ $G[f]$  は  $\mathbb{R}^2$  において連結である” という簡素な同値関係が**成り立たない**ことを示している。(命題 G 参照)

明らかに “ $f$  は  $\mathbb{R}$  上連続である” “ $f$  は任意開区間上で連続である” が成り立つ。つまり連続性は局所的な性質である。だが連結性はそうではない。(例 A 参照)

従って我々は連結性を局所的に表すような条件に注目すべきだ。次に掲げる局所連結性がそれである。

#### 定義 8

$X$ (位相空間),

“ $X$  が局所連結である”

$:= \left[ \begin{array}{l} x \in X, V(x) \text{ の } X \text{ における開近傍}, \\ C \subset V, C \text{ は } X \text{ において連結, } X \text{ の位相に関して, } x \text{ は } C \text{ の内点である.} \end{array} \right]$

#### 命題 9

$X$ (位相空間),

$\left[ \begin{array}{l} \text{“}X \text{ が局所連結である”} \\ [ V(X) \text{ の開集合}, \\ X \text{ の部分位相空間としての } V \text{ における各成分は } X \text{ の開集合である.} \end{array} \right]$

位相空間  $X$  の部分集合  $Y$  が,  $X$  の部分位相空間として局所連結であるとき,  $Y$  は  $X$  において**局所連結**であるという。

#### 例 B

$f(x)=[x]$  (Gauss 記号) とすると,  $f$  は各整数  $x$  において不連続であるが,  $G[f]$  は  $\mathbb{R}^2$  において局所連結である。(明らか)

例 B は “ $f$  は  $\mathbb{R}$  上連続である” “ $G[f]$  は  $\mathbb{R}^2$  において局所連結である” という同値関係が**成り立たない**ことを示している。

以下に示すように,  $f$  が  $\mathbb{R}$  上連続であることと同値な連結条件は “連結かつ局所連結” である。

### 命題 C

“ $G[f]$ は $\mathbb{R}^2$ において連結かつ局所連結である。”

“ $f$ は $\mathbb{R}$ 上連続である”

命題 C と命題 7 により次の系 D が成り立つ :

### 系 D

“ $f$ は $\mathbb{R}$ 上連続である”

“ $G[f]$ は $\mathbb{R}^2$ において連結かつ局所連結である。”

**系 D は我々が日頃口にする「繋がったグラフ」の「繋がった」という状態の正体が、  
“連結かつ局所連結”であることを示している。**

### 命題 C の証明

$G[f]$ は $\mathbb{R}^2$ において連結かつ局所連結であり、かつ  $x^* \in \mathbb{R}$ ,  $f$  は  $x^*$ において不連続.  
と仮定すると

$0 < \epsilon < \delta$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ( $\mathbb{R}$ 内の数列),  $y_n \rightarrow x^*$  as  $n \rightarrow \infty$ ,  $[n \in \mathbb{N}, |f(y_n) - f(x)| \geq \epsilon]$ .

となる。ここで  $n \in \mathbb{N}, y_n < x^*$ . と仮定してよい。

$\mathbb{R}^2$ における中心 $(x^*, f(x^*))$ 半径  $\epsilon$ の開円盤を  $B$  とする。ただしここでの  $\mathbb{R}^2$ の距離は通常の

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  によって与えられるものとする。

$B \cap G[f]$ における連結成分のうち点 $(x^*, f(x^*))$ を含むものを  $C$  とする。

$G[f]$ は局所連結であるので、 $C$  は  $G[f]$ の開集合である。

集合  $C$  の  $x$  軸への射影による像を  $P$  とする。 $x$  軸への射影は連続写像であるから、 $P$  は  $\mathbb{R}$ において連結である。つまり  $P$  は単集合、开区間、閉区間、半开区間のいずれかである。

だが  $P$  は点  $x^*$ を含み、かつ、いかなる  $y_n$  も含まない。

従って、 $P$  は、点  $x^*$ を左の端点とする閉区間、点  $x^*$ を左の端点とする半开区間、または単集合 $\{x^*\}$ である。従って  $G^- [f] := \{(x, f(x)) \mid x < x^*\}$ ,  $G^+ [f] := \{(x, f(x)) \mid x^* < x\}$ と定めると、

$G[f]$ は二つの互いに素な非空開集合  $G^- [f]$  と  $G^+ [f]$   $C$  の和集合である。これは  $G[f]$ が連結であることと矛盾する。

命題 C,系Dは以下のように一般化される。これらは命題 C,系Dと同様に証明される：

A を  $\mathbb{R}$  において連結な集合, X を任意の位相空間とする。任意の写像  $f: A \rightarrow X$  に対して,  
 $G[f]:=\{(x,f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R} \times X$  とする。

#### 命題 E (命題 C の一般化)

“ $G[f]$ は直積位相空間  $\mathbb{R} \times X$  において連結かつ局所連結である。” “ $f$  は A 上連続である”

#### 系 F (系 D の一般化)

“ $f$  は A 上連続である” “ $G[f]$ は直積位相空間  $\mathbb{R} \times X$  において連結かつ局所連結である。”

例 A では,  $x=0$  における  $f$  の左側極限が存在しない。次の同値関係は命題 C の証明と同様にして容易に証明できる：

#### 命題 G

X が Hausdorff 空間で, 定義域 A の各点において  $f$  の右側極限と左側極限とが存在するとき,

“ $f$  は A 上連続である” “ $G[f]$ は直積位相空間  $\mathbb{R} \times X$  において連結である”  
が成り立つ。