有理数の稠密性と有理数と自然数の一対一対応について

追分高等学校　教諭　長谷川　貢

P_1，P_2，P_3,・・・，P_n が全て有理数のとき，これらの数を四則演算によって作り出した新しい数も含めて全て有理数である。また有理数は十分に大きな自然数を掛けると全て整数になる。また自然数はいくらでも大きい数が存在する。この当たり前の考え方を用いて作られた問題を具体的に解いてみようと思う。

座標平面上の原点をO(0，0)とする。またx座標およびy座標がともに整数であるような点を格子点という。

（1）　tを正の実数とする。点P(−1，0)を通り，傾きがtの直線と単位円 $x^2+y^2=1$ とのP以外の交点をQ(t)とする。Q(t)の座標を求めよ。次に，$0<s<t$ をみたす2つの実数s，tに対し，線分Q(s)Q(t)の長さを求めよ。

（2）　∠Q(s)PO＝α，∠Q(t)PO＝βとし，$u=\tan\frac{\alpha}{2}$，$v=\tan\frac{\beta}{2}$ とおく。もしu，vがともに有理数ならば，線分Q(s)Q(t)の長さもまた有理数になることを示せ。

（3）　任意に与えられた3以上の整数nに対し，次の条件(C1)(C2)(C3)をすべて満たすn個の異なる点 A_1，A_2，A_3,・・・，A_n が，座標平面上に存在することを証明せよ。

(C1) A_1，A_2，A_3,・・・，A_n はすべて格子点である。

(C2) A_1，A_2，A_3,・・・，A_n のどの異なる3点も一直線上にない。

(C3) A_1，A_2，A_3,・・・，A_n のどの異なる2点 A_i，A_j に対しても，線分 A_i，A_j の長さは整数である。

１９９９年　東京大学　理Ｉ(後期)

考え方について

三角関数をパラメータを用いて表わしてみる。$\tan\frac{\theta}{2}=m$ とおくと

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=\cos^2\alpha(1-\tan^2\alpha)$$

また

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

これらをまとめて

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

また，$\tan\alpha=m$　より　$\alpha=\frac{\theta}{2}$　と置くと $2\alpha=\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

となる。同様に

$$\sin\theta=\frac{2m}{1+m^2},\qquad \tan\theta=\frac{2m}{1-m^2}$$

となる。

有理数と自然数の濃度の関係について

自然数全体をN，正の有理数の全体をQ_+で表わす。このNとQ_+の関係を考える。
包含関係から，N⊂Q_+は明らかである。
逆を示す。

正の分数の分母をm，分子をｌとする。分数は既約であるとは仮定しない。そしてm＋ｌ＝kとして，ｋの小さい順に正の有理数を並べていくことにする。そのとき，分母は小さい順に並べることとする。

k＝２のときは，分数は１／１である。

k＝３のときは，２／１，１／２の２個である。

k＝４のときは，３／１，２／２，１／３の３個である。

よって，

k＝nのときの分数は，(n－１)／１，(n－２)／２,・・・，２／(n－２)，１／(n－１)

となる。またk＝ｉのときの個数が(ｉ－１)個より，k＝２かたk＝nまでの分数の個数は

１＋２＋３＋・・・＋(n－１)＝n(n－１)／２

となる。これより任意の自然数Mに対してm＋ｌ＝Mとなる分数は,

最初の分数が　(M－１)(M－２)／２＋１　番目

であり,

最後が　M(M－１)／２　番目

である。よって任意の正の分数　M_1／M_2　もすべて番号が付けられたことになる。よってNとQ_+は１対１対応であるから，NとQ_+は同じ個数である。それでは有理数の場合はどうかというと，次のようにして番号を付けていけばすべての有理数に番号を付けることができる。

具体的に並べてみる。

０，１／１，－１／１，１／２，２／１，－２／１，－１／２，３／１，２／２，１／３，
－３／１，－２／２，－１／３,・・・，(n－１)／１，(n－２)／２,・・・，
１／(n－１)，－(n－１)／１，－(n－２)／２,・・・，－１／(n－１)，n／１,・・・

となる。

問題の解答

(1)　y＝t(x＋1)　・・・①　傾きt，点(－１，０)を通る直線

$x^2+y^2=1$　・・・②　原点を中心とする半径１の円

①と②の交点を求めよう。

①を②へ代入して

$$\mathbf{x}^2+\mathbf{t}^2(\mathbf{x}+1)^2=1$$

$$(\mathbf{x}+1)\{(1+\mathbf{t}^2)\mathbf{x}-(1-\mathbf{t}^2)\}=0$$

よって　$\mathbf{x}=-1$，$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

また $\mathbf{x}\neq-1$，$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\mathbf{y}=\mathbf{t}(\mathbf{x}+1)$ より

$$y=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

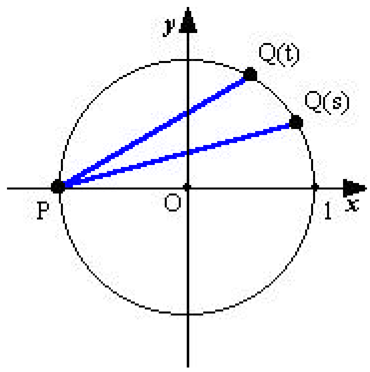
$$Q(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right),\qquad Q(s)=\left(\frac{1-s^2}{1+s^2},\ \frac{2s}{1+s^2}\right)$$

$$|Q(t)Q(s)|^2=\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2s}{1+s^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)=\frac{4(t-s)^2}{(1+s^2)(1+t^2)}$$

これより

$$|Q(t)Q(s)|=\frac{2(t-s)}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}\qquad (t>s)$$

(2) ∠Q(s)OP＝β，∠Q(t)OP＝β とする。



$u=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$v=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。

①より

$$Q(s)=\left(\frac{1-s^2}{1+s^2},\ \frac{2s}{1+s^2}\right),\quad Q(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

$$|Q(t)Q(s)|=\frac{2(t-s)}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}$$

また,

$$\tan\beta=\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\frac{2t}{1-t^2+1+t^2}=t$$

同様に $\tan\alpha=\mathbf{s}$ となる。また,

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2u}{1-u^2}=s$$

同様に

$$\tan\beta=\frac{2v}{1-v^2}=t$$

また，$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ は共に有理数であるから $\mathbf{s}$ も $\mathbf{t}$ も共に有理数である。(1)より

$$1+s^2=1+\left(\frac{2u}{1-u^2}\right)^2=\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\right)^2$$

同様に

$$1+t^2=\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)^2$$

よって

$$|Q(s)Q(t)|=\frac{2(t-s)}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}=\frac{2(t-s)(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}$$

よって，ｔ，ｓ，ｕ，ｖがすべて有理数より，｜Q(ｓ)Q(ｔ)｜も有理数である。

（3）∠Q(ｔ)OＰ＝α とし， $u=\tan\frac{\alpha}{2}$ **（有理数）とおく。直線ＰＱの傾きをｔと置くと**

$$t=\frac{2u}{1-u^2}$$

であるから，ｔも有理数である。また，

$$Q(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

の各座標もともに有理数である。よって，ｎ個の有理数を

$$0<u_1<u_2<\cdots\cdots<u_n<1$$

として

$$t_k=\frac{2u_k}{1-u_k{}^2}$$

と置く。 t_k **は全て有理数より**

$$Q(t_k)=\left(\frac{1-t_k{}^2}{1+t_k{}^2},\ \frac{2t_k}{1+t_k{}^2}\right)$$

の各座標もともに有理数である。また，２点Q（ t_k **），Q（** t_j **）の距離は** $t_k>t_j$ **とすると**

$$|Q(t_k)Q(t_j)|=\frac{2(t_k-t_j)(1-u_k{}^2)(1-u_j{}^2)}{(1+u_k{}^2)(1+u_j{}^2)}$$

また

$$t_k-t_j=\frac{2u_k}{1-u_k{}^2}-\frac{2u_j}{1-u_j{}^2}=\frac{2(u_k-u_j)(1-u_ku_j)}{(1+u_k{}^2)(1-u_j{}^2)}$$

であるから，２点間の距離は全て有理数である。次にQ(t_k **)を** u_k **を用いて表すことにする。**

ｘ座標は

$$\frac{1-t_k^{\,2}}{1+t_k^{\,2}}=\frac{1-\left(\dfrac{2u_k}{1-u_k^{\,2}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{2u_k}{1-u_k^{\,2}}\right)^2}=\frac{(1-u_k^{\,2})^2-4u_k^{\,2}}{(1-u_k^{\,2})^2+4u_k^{\,2}}=\frac{(1-2u_k-u_k^{\,2})(1+2u_k-u_k^{\,2})}{(1+u_k^{\,2})^2}$$

y 座標は

$$\frac{2u_k}{1+u_k^{\,2}}=\frac{2\times\dfrac{2u_k}{1-u_k^{\,2}}}{1+\left(\dfrac{2u_k}{1+u_k^{\,2}}\right)^2}=\frac{4u_k(1-u_k^{\,2})}{(1+u_k^{\,2})^2}$$

よって，ｘ座標，ｙ座標ともに有理数である。

また，u_kは正の有理数であるから，$u_k＝l_k／m_k$　(m_k，l_kは自然数)と置くことができる。

Q(t_k)のｘ座標は

$$\frac{(1-2u_k-u_k^{\,2})(1+2u_k-u_k^{\,2})}{(1+u_k^{\,2})^2}=\frac{\left(1-\dfrac{2l_k}{m_k}-\dfrac{l_k^{\,2}}{m_k^{\,2}}\right)\left(1+\dfrac{2l_k}{m_k}-\dfrac{l_k^{\,2}}{m_k^{\,2}}\right)}{\left(1+\dfrac{l_k^{\,2}}{m_k^{\,2}}\right)^2}$$

$$=\frac{(m_k^{\,2}-2l_k m_k-l_k^{\,2})(m_k^{\,2}+2l_k m_k-l_k^{\,2})}{(m_k^{\,2}+l_k^{\,2})^2}=x_k$$

y 座標は

$$\frac{4u_k(1-u_k^{\,2})}{(1+u_k^{\,2})^2}=\frac{4\dfrac{l_k}{m_k}\left(1-\dfrac{l_k^{\,2}}{m_k^{\,2}}\right)}{\left(1+\dfrac{l_k^{\,2}}{m_k^{\,2}}\right)}=\frac{4m_k l_k(m_k^{\,2}-l_k^{\,2})}{(m_k^{\,2}+l_k^{\,2})^2}=y_k \qquad ・・・③$$

と置く。同様にQ(t_j)は

x 座標は　$$\frac{(m_j^{\,2}-2l_j m_j-l_j^{\,2})(m_j^{\,2}+2l_j m_j-l_j^{\,2})}{(m_j^{\,2}+l_j^{\,2})^2}=x_j$$

y 座標は　$$\frac{4m_j l_j(m_j^{\,2}-lj^2)}{(m_j^{\,2}+l_j^{\,2})^2}=y_k$$

と置く。よってベクトル $\overrightarrow{OQ(t_k)}$**，** $\overrightarrow{OQ(t_j)}$ **をそれぞれ**

$(m_k^{\,2}+l_k^{\,2})^2\ (m_j^{\,2}+l_j^{\,2})^2$倍

すると，両ベクトルとも分母が約分できてｘ座標もｙ座標もともに整数になる。その点をB(t_k)，B(t_j)とおく。

$$\overrightarrow{OB(t_k)}=(m_k^{\,2}+l_k^{\,2})(m_j^{\,2}+l_j^{\,2})\overrightarrow{OQ(t_k)}$$

同様に

$$\overrightarrow{OB(t_j)} = (m_k{}^2 + l_k{}^2)(m_j{}^2 + l_j{}^2)\overrightarrow{OQ(t_j)}$$

とおく。③より上のベクトルを成分で表す。

$\overrightarrow{OB(t_k)}$ **の x 座標，y 座標を求める。**

x 座標は

$$(m_k{}^2 + l_k{}^2)^2 (m_j{}^2 + l_j{}^2)^2 x_k = (m_k{}^2 + l_k{}^2)^2 (m_k{}^2 - 2m_k l_k - l_k{}^2)(m_k{}^2 + m_k l_k - l_k{}^2)$$

同様に y 座標は

$$(m_k{}^2 + l_k{}^2)^2 (m_j{}^2 + l_j{}^2)^2 y_k = 4m_k l_k (m_k{}^2 - l_k{}^2)(m_j{}^2 + l_j{}^2)^2$$

これより x 座標，y 座標ともに整数である。

同様に $\overrightarrow{OB(t_j)}$ **も x 座標，y 座標ともに整数である。**

次に，2点OB(t_k)OB(t_j)の距離を求める。

△OQ(t_k)Q(t_j)∽△OB(t_k)B(t_j)

であり，相似比は($m_k{}^2$+$l_k{}^2$)^2 ($m_j{}^2$+$l_j{}^2$)^2 より

$$\left|B(t_k)B(t_j)\right| = (m_k{}^2 + l_k{}^2)^2 (m_j{}^2 + l_j{}^2)^2 \left|Q(t_k)Q(t_j)\right|$$

よって

$$\left|B(t_k)B(t_j)\right| = \frac{2(u_k - u_j)(1 + -u_k u_j)}{(1 + u_k{}^2)(1 + u_j{}^2)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{l_k}{m_k} - \frac{l_j}{m_k}\right)\left(1 - \frac{l_k}{m_k} - \frac{l_j}{m_j}\right)}{\left(1 + \frac{l_k{}^2}{m_k{}^2}\right)\left(1 + \frac{l_j{}^2}{m_j{}^2}\right)} = \frac{2(m_j l_k - m_k l_j)(m_k m_j - l_k l_j)}{(m_k{}^2 + l_k{}^2)(m_j{}^2 + l_j{}^2)}$$

これを用いて

$$\left|B(t_k)B(t_j)\right| = (m_k{}^2 + l_k{}^2)^2 (m_j{}^2 + l_j{}^2)^2 \left|Q(t_k)Q(t_j)\right|$$
$$= 2(m_j l_k - m_k l_j)(m_k l_j - l_k l_j)(m_k{}^2 + l_k{}^2)(m_j{}^2 + l_j{}^2)$$

よって，B(t_k)，B(t_j)の両方ともに x 座標，y 座標が整数となる。また2点間の距離 B(t_k)B(t_j)も整数となる。

これより A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，・・・A_n を作る。

($m_k{}^2$+$l_k{}^2$)＝M_kとおき，M＝M_1・M_2・M_3・・・M_nとおく。

$\overrightarrow{OA_k} = M \times \overrightarrow{OQ(t_k)}$ **とおくと，**

$$\overrightarrow{OA_k} = (M_1 \cdot M_2 \cdot\cdot\cdot\cdot M_k \cdot\cdot\cdot\cdot M_n x_k,\ M_1 \cdot M_2 \cdot\cdot\cdot\cdot M_k \cdot\cdot\cdot\cdot M_n y_k)$$

となり整数で表すと

$$\overrightarrow{OA_k}$$
$$= (M_1\cdot M_2\cdot\cdot\cdot(m_k{}^2-2m_kl_k-l_k{}^2)(m_k{}^2+2m_kl_k-l_k{}^2)\cdot\cdot\cdot M_n,\quad M_1\cdot M_2\cdot\cdot\cdot 4m_kl_k(m_k{}^2-l_k{}^2)\cdot\cdot\cdot\cdot M_n)$$

(上の式ではｋ番目のM_kがなくて式がその代わりに入っている。)

このようにして作ったｎ個の点A_1，A_2，A_3，・・・・Anは全て半径Ｍ上の第一象限にあるから問題の求めるものになっている。

この問題の発想について

原点を中心とする半径１の円周上の第一象限の部分に，どの２点のｘ座標，ｙ座標及び距離がすべて有理数となるような点をｎ個とる。そして，この円を大きくすれば，いつかはすべてのｘ座標とｙ座標はすべて自然数になるというわけである。つまり，高々ｎ個の有理数の分母すべての積を作っても，できる数字はやはり自然数であるわけである。つまり加算無限個の持つ意味に感心する次第である。この後に続く「Ｓａｒｄの定理」などを思い浮かべながら

「Ｓａｒｄの定理」
ｆをR^nの開集合ＷからR^mへのＣ$^\infty$写像としＣをｆの臨界点全体からなる集合とするとき，ｆ(C)はR^mの測度０の集合である。

「臨界点の定義」
ｆをR^nの開集合ＷからR^mへのＣ$^\infty$写像とする。
Ｗの点ｘにおけるｆの微分係数ｄｆ(ｘ)がｒａｎｋ(ｄｆ(ｘ))＜ｍを満たすとき，xをｆの臨界点と呼ぶ。