

『ケーキの n 等分と複素数平面と単位円』

令和7年11月29日(土) 北海道留萌高等学校 教諭 加藤 真



1 はじめに

今回、実に約1年半ぶりとなる数実研への参加を決意したときに、「何か発表させていただきたい」という思いを強く抱きました。

そんな折、留萌高校で毎年9月に実施されている「出前講座」の講義の中に会いはありました。

2 題材選定

私は、出前講座の私立大学分野の担当教諭として役割を命ぜられ、『正十七角形の作図法の研究』と題した北海学園大学工学部教授の山本隆範様の講義を、受講した12名の生徒と共に拝聴しました。

工学部の建築学科の教授でいらした山本教授は、正 n 角形の作図は「 n ヶ所の点を円周上に等間隔でとること」そのために、「複素数平面の概念を用いて、 n 次方程式を解いて図示すること」が深く関連していると教えてくださいました。そして、私は『ケーキの n 等分』を主題としました。

3 振り返り学習の要点整理(生徒の感想や反応から)

生徒の反応からは、「話の内容が高度で面白かった!」「教授の話は雑談の部分も学びが多くあり、とても楽しかった!」というコメントが多く寄せられました。その反面、一部の生徒からは、「高度な数学の内容が難しすぎて辛くなった。」「高校生でもわかりやすいような授業の配慮がほしかった。」という意見も見受けられたので、「理解の及ばない溝を少しでも埋められないものか」と案を講じることになり、私なりに今回学んだ内容を噛み砕き、別の時間帯に生徒にプチ講義をすることにしました。

4 プチ講義の構成

留萌高校の生徒は、

1年次の9月末の段階で、「数と式」「2次方程式の解法」は理解できます。

2年次の9月末の段階で、「剰余の定理を用いた高次方程式の解法」「単位円」は理解できます。

この点を考慮して、『数学C(本校では3年次の選択科目)』の知識で、必要最小限のことだけを簡素に教えて、予習する意味合いで、『別紙のプリント(※)』のようにまとめました。

4ステップに分けることで、プリントの「左半分は1年次でも理解できるように」しています。

また、「右半分は2年次の復習や、受験問題の過去問にも触れるように」しています。

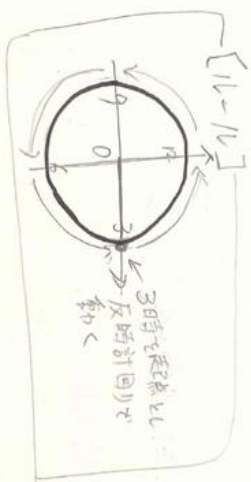
5 結びに

私は、「単位円の考え方」を高校生の時に理解できませんでした。教諭になってからは、単位円で考えることの有用性を個人的に推しています。今後の指導において、自分の考え方を押しつけすぎず、「生徒が自分の意思で、多様な考え方を尊重し、解法のプロセスを導けるようになってほしいです。」

今回、数実研にて、このような発表の機会を与えてくださり、ありがとうございました!

9/24 (水) 北海学園大学 - 山本教授の教へー

④ x^4 の 4 等分 $\Rightarrow$ 円周の長さを 4 等分する x を考える!!



問 (1) x^4 を 2 等分せよ。

これは $x^2 = 1$ を解くことで解決できる!

2次方程式
 解) $x^2 - 1 = 0$
 $(x+1)(x-1) = 0$
 $x = -1, 1$



(2) x^4 を 4 等分せよ。

これは $x^4 = 1$ を解くことで解決できる!

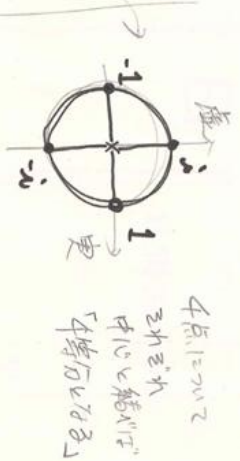
4次方程式
 解) $x^4 - 1 = 0$
 $(x^2+1)(x^2-1) = 0$

2次式

$x^2 + 1 = 0$ または $x^2 - 1 = 0$

より $x^2 = -1$ または $x^2 = 1$

つまり $x = \pm i, \pm 1$



(3) x^6 を 3 等分せよ。

これは $x^3 = 1$ を解くことで解決できる。

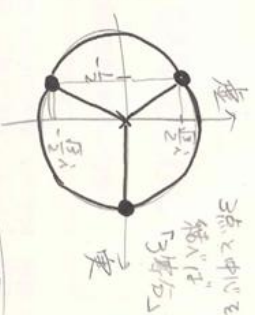
解) $x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

これは $x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

より $x=1$ または $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

つまり $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$



$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ は $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ と $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$

(4) x^6 を 6 等分せよ。

これは $x^6 = 1$ を解くことで解決できる。

解) $x^6 - 1 = 0$

$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$

$(x-1)\{x^3(x^2+x+1) + (x^2+x+1)\} = 0$

$(x-1)(x^3+1)(x^2+x+1) = 0$

$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) = 0$

(1次)(1次)(2次)(2次) 1: 因数分解できる!

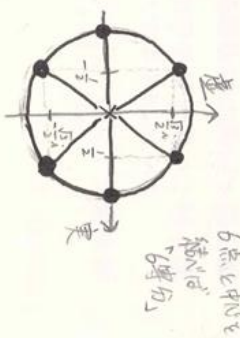
2次式 $x^2 - x + 1 = 0, x^2 - x + 1 = 0, x^2 + x + 1 = 0$

より $x = 1, x = -1, x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

つまり

$x = 1, -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

6つの複素数解



高2では「因数定理」(多項式の割り算)を用いる。

$$\begin{array}{r} x^6 - 1 \\ x^5 + x^4 + \dots + 1 \\ \hline x^6 - x^5 \\ \hline x^5 - x^4 \\ \hline x^4 - x^3 \\ \hline x^3 - x^2 \\ \hline x^2 - x \\ \hline x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$