北数教　第 91 回数学教育実践研究会　平成 26 年 11 月 29 日（土）
アスティ４５

ベータ関数とガンマ関数を視覚化する

自然数から正の実数そして複素数へ拡張する

松本睦郎（札幌北高等学校）

センター試験で良く利用される「ロクブンのイチ」と呼ばれる公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(\beta-x)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

は、ベータ関数の仲間である。ベータ関数とガンマ関数と呼ばれる特殊関数を視覚化してみる。

Episode 1 ベータ関数の定義

m, n自然数

$$B(m,n)=\int_0^1(1-t)^{m-1}\,t^{n-1}\,dt$$

とするとき、

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

Proof

部分積分法により

$$B(m,n)=\left[(1-t)^{m-1}\times\frac{t^n}{n}\right]_0^1$$

$$+\frac{m-1}{n}\int_0^1(1-t)^{m-2}t^n dt$$

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{m-1}{n}\,\mathrm{B}(m-1,n+1)$$

以下同様にして、この操作を繰り返す。

$\mathrm{B}(m,n)$

$$=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\cdots 1}{n(n+1)(n+2)\cdots(m+n-2)}\,B(1,n+m-1)$$

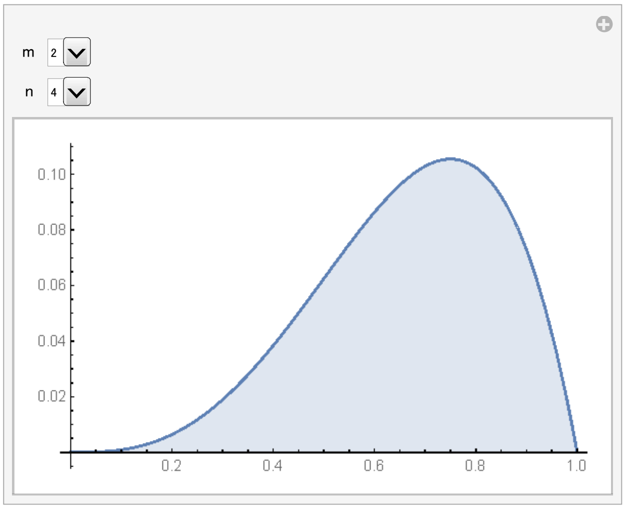
$$\mathrm{B}(1,n+m-1)=\int_0^1 t^{m+n-2}dt=\frac{1}{m+n-1}$$

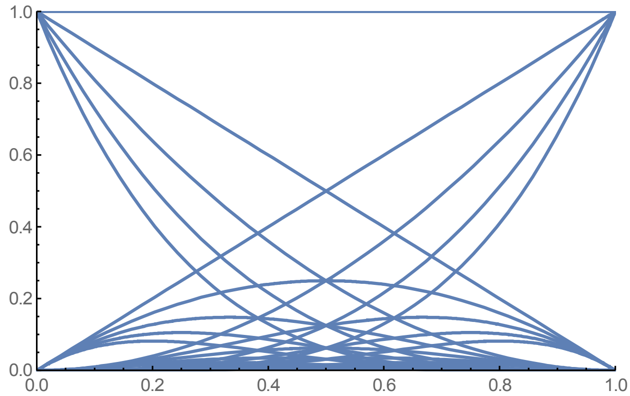
$B(m,n)$

$$=\frac{(n-1)!\,(m-1)(m-2)\cdots 1}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(n)(n-1)!}$$

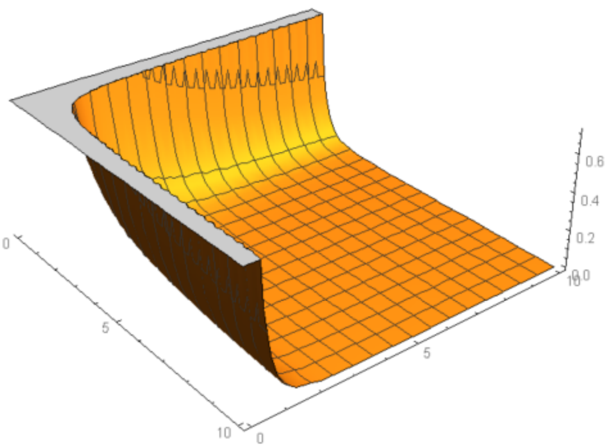
$$=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

■





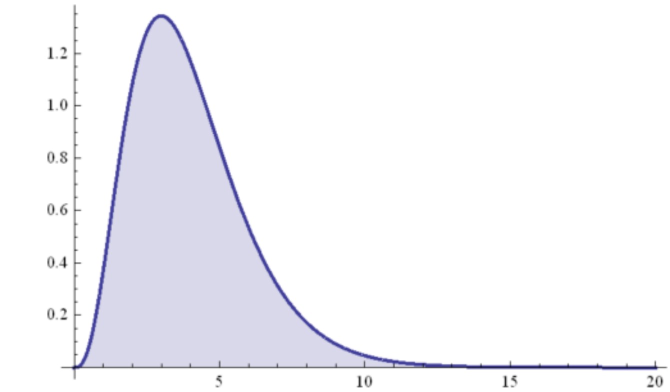
m, nを正の実数に拡張すると、m, n を２変数関数とする曲面が見られる。（↓）



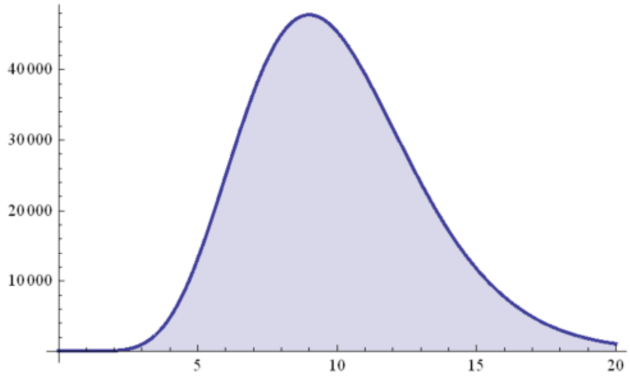
Episode2　ガンマ関数の定義

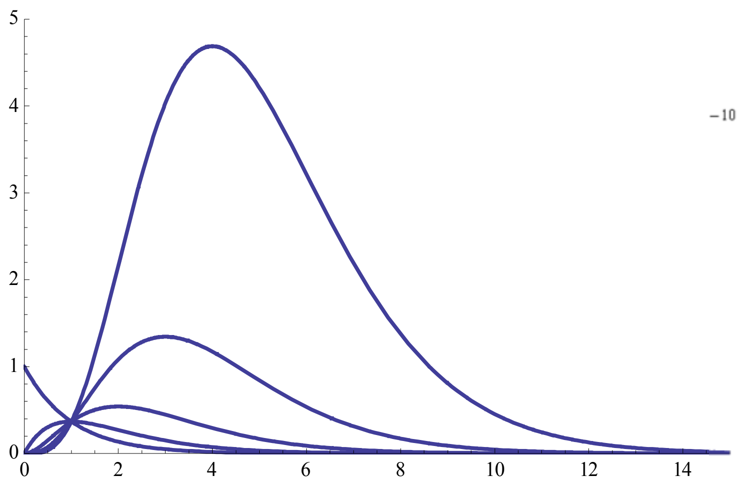
α > 0 に対して

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$



α = 4（↑）　α = 10（↓）





例題 1

Table[Gamma[n],{n,1,7}]

{1,1,2,6,24,120,720}

定理

（ｉ）$\Gamma(\alpha)$は α > 0 で収束する。

（ii）α > 0 として、$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

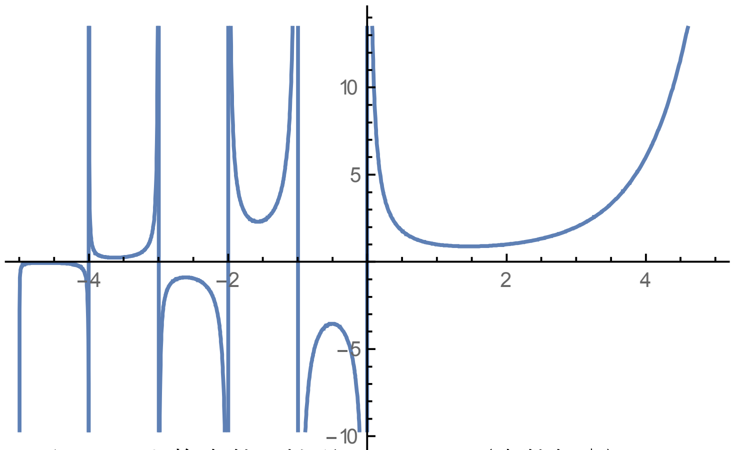
（iii）$\Gamma(n+1) = n!$

例題２　α を有理数、負の有理数へと拡張する。

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

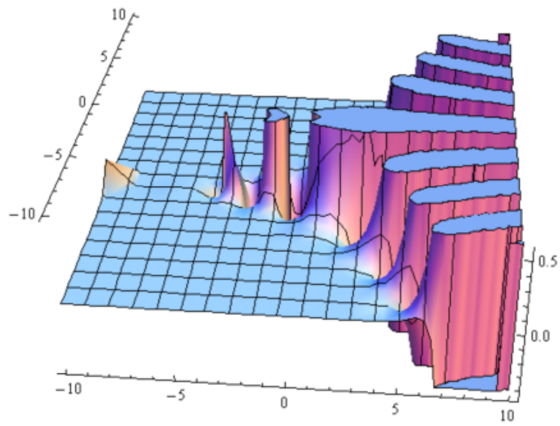
α を負の実数（α ≠ −1, −2, −3, ⋯）に拡張すると

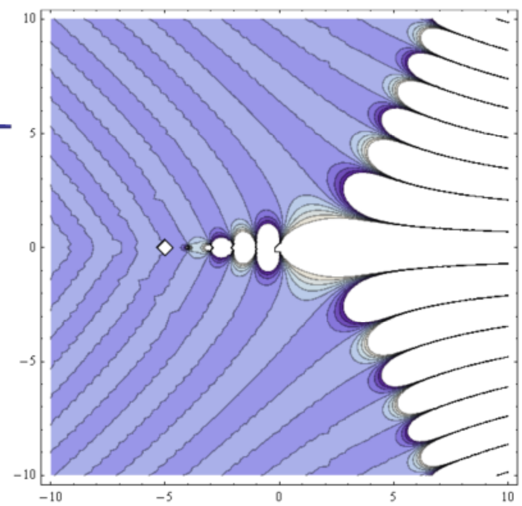
y = $\Gamma(\alpha)$グラフは（↓）となる。



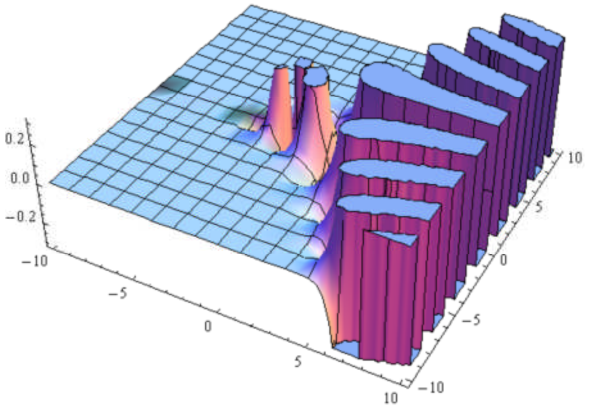
更に、α を複素数へ拡張してみる。（実数部↓）

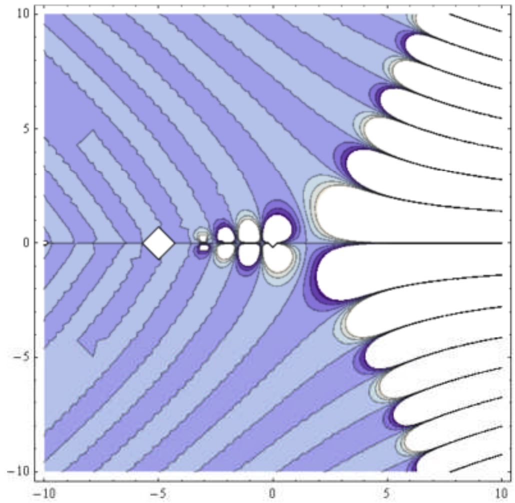
$$\Gamma(s+ti) = \int_0^\infty x^{s-1+ti}e^{-(s+ti)}dx$$



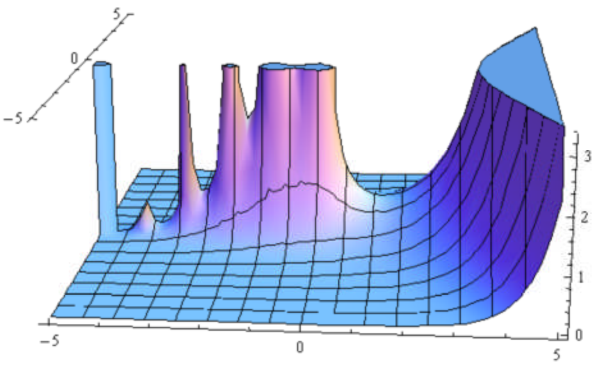


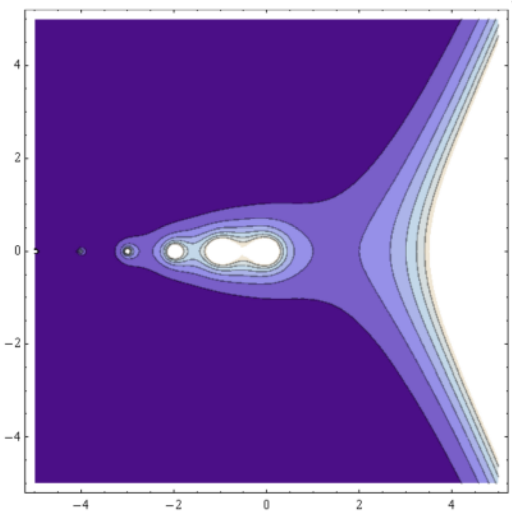
（虚数部↓）





（$|\Gamma(s+ti)|$↓）



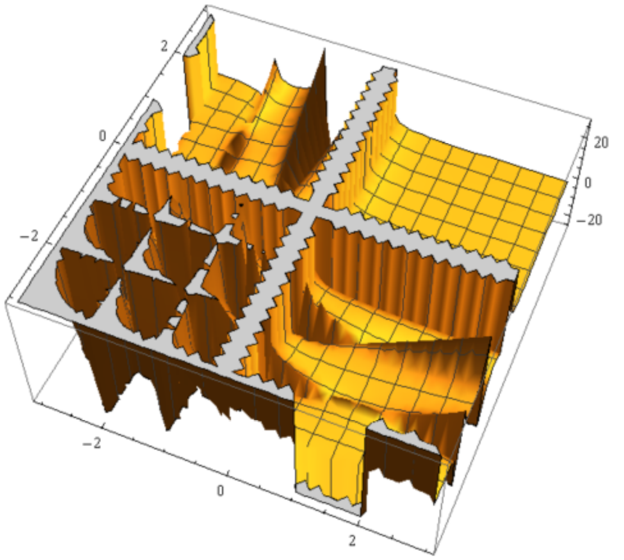


Episode4　ベータ関数とガンマ関数の関係

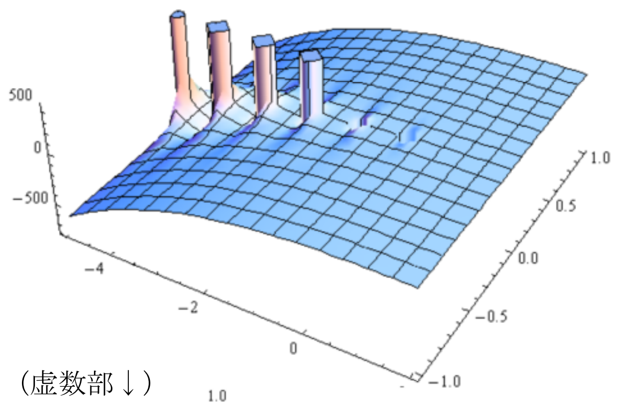
定理

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

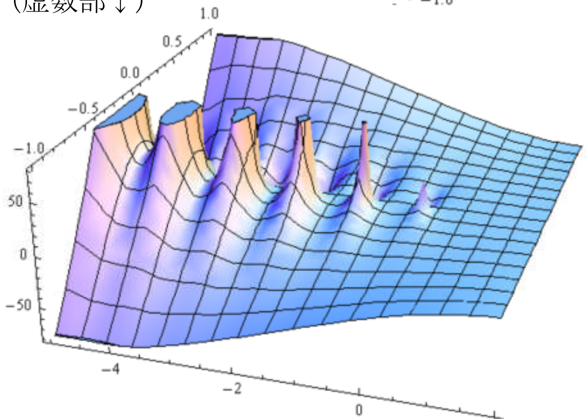
２変数関数α，βを実数として、ベータ関数のグラフを作製する。



α，βを複素数へ拡張してみる。$\beta=-3.1$として グラフを作製した。（実数部↓）



（虚数部↓）



松本睦郎（札幌北高等学校）