

発展的な入試問題

チェビシェフの多項式問題

その出題背景を探る

松本睦郎 (札幌北高等学校)

近年、チェビシェフ(Chebyshev もしくは Tschebycheff)の多項式の理論を背景とする入学試験問題が多く出題されている。三角関数の 2 倍角、3 倍角の公式を拡張した理論で興味深いものがある。

「Chebyshev の多項式理論」を入試問題に軸足をおいて出題背景を分析してみた。

チェビシェフの多項式とは

三角関数の 2 倍角、3 倍角の公式は
 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$
である。

一般的に、 n を自然数とするとき、『 $\cos n\theta$ を、 $\cos \theta$ の多項式として表示する。三角関数の n 倍角の公式』が基本的な考えである。

信州大学

(1) すべての自然数 n について、
 $\cos n\theta$ は、 $\cos \theta$ の多項式として表されることを示せ。

(2) すべての自然数 n について、
多項式 $f_n(x)$ を $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$
で定める。
このとき x に関する 2 つの多項式

$$f_{n+1}(x) = 0, f_n(x) = 0$$

は、共通解を持たないことを示せ。

【解答例(1)】

「 $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ となる多項式 $f_n(x)$ が存在する。」ことを n に関する数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1, 2$ のとき

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

$$\text{から、 } f_1(x) = x, f_2(x) = 2x^2 - 1$$

と表示できる。 $n=1, 2$ のときは成立する。

(ii) $n=k, k+1$ のとき

$$\cos k\theta = f_k(\cos \theta), \cos(k+1)\theta = f_{k+1}(\cos \theta)$$

となる $f_k(x), f_{k+1}(x)$ が存在するとき、

【積→和の公式を用いる方法】

$$\cos(k+1)\theta \cos \theta = \frac{1}{2} \{ \cos(k+2)\theta + \cos k\theta \}$$

より

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos(k+1)\theta \cos \theta - \cos k\theta$$

を活用して漸化式を作成する方法。

$$f_{k+2}(x) = 2x f_{k+1}(x) - f_k(x) \text{ で定まる多項式}$$

$f_{k+2}(x)$ を作成すると、

$$\begin{aligned} f_{k+2}(\cos \theta) &= 2\cos \theta f_{k+1}(\cos \theta) - f_k(\cos \theta) \\ &= 2\cos \theta \cos(k+1)\theta - \cos k\theta \end{aligned}$$

ここで「積→和公式」を適用して

$$f_{n+2}(\cos \theta) = \{\cos(k+2)\theta + \cos k\theta\} - \cos k\theta$$

$$= \cos(k+2)\theta$$

$n = k+2$ のときも成立する。

(i) (ii) より、すべての自然数 n について $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ となる多項式 $f_n(x)$ が存在する。(QED)

【解説】 $y = f_n(x)$ はどんな曲線を描くのか?

$\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ となる多項式 $f_n(x)$ が存在性を示す問題である。一般式 $f_n(x)$ そのものを求める問題は大学入試では見られない。

$f_n(x)$ は、漸化式 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x^2 - 1$

$$f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

から帰納的に、求めることができる。

漸化式から $n = 10$ までの多項式を作成した。

$$t_1[x_] := x;$$

$$t_2[x_] := 2x^2 - 1;$$

$$t_n[x_] := t_n[x] = 2x t_{n-1}[x] - t_{n-2}[x];$$

$$\text{Table}[\text{Expand}[t_n[x]] // \text{Simplify}, \{n, 1, 10\}]$$

$\{x, -1+2x^2, x(-3+4x^2), 1-8x^2+8x^4, x(5-20x^2+16x^4), -1+18x^2-48x^4+32x^6, x(-7+56x^2-112x^4+64x^6), 1-32x^2+160x^4-256x^6+128x^8, x(9-120x^2+432x^4-576x^6+256x^8), -1+50x^2-400x^4+1120x^6-1280x^8+512x^{10}\}$

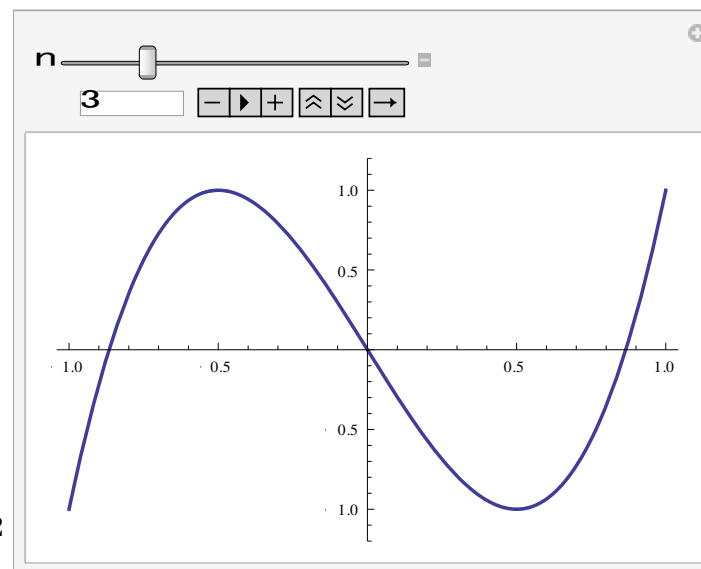
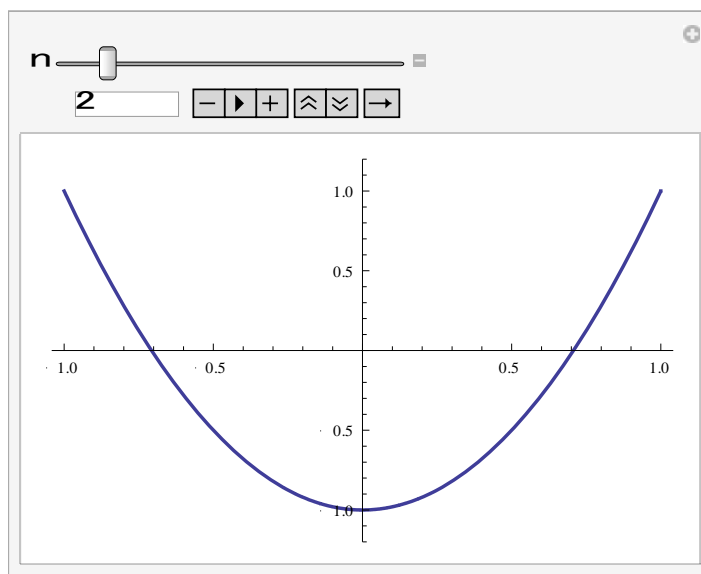
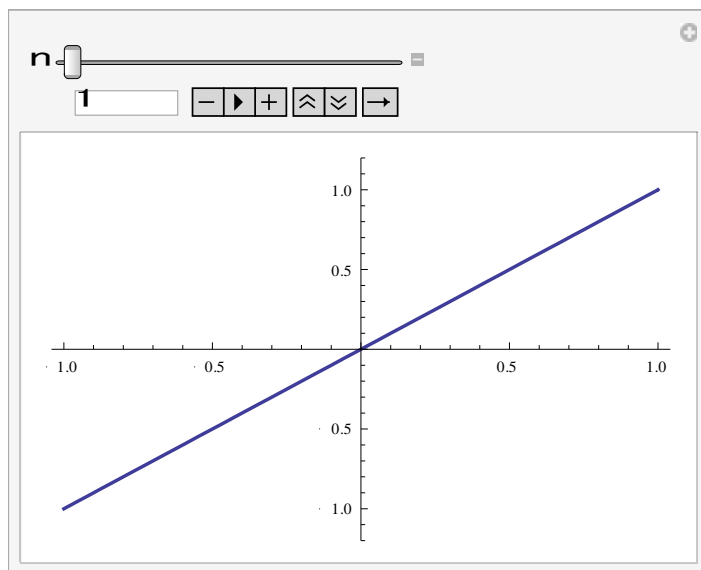
この多項式のグラフを作成すると、右図のような曲線になる。

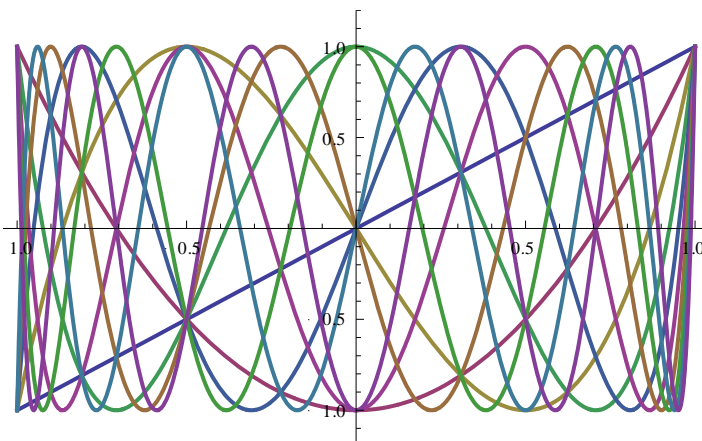
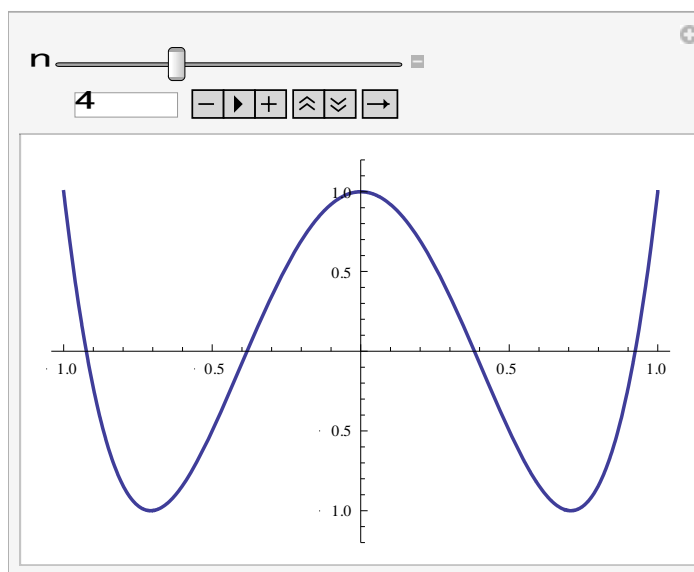
$$t_1[x_] := x;$$

$$t_2[x_] := 2x^2 - 1;$$

$$t_n[x_] := t_n[x] = 2x t_{n-1}[x] - t_{n-2}[x];$$

Manipulate[Plot[t_n[x], {x, -1, 1}, PlotRange -> 1.2, PlotStyle -> Thick], {n, 1, 10, 1}]





これらの関数は、 $-1 \leq x \leq 1$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ の正方形内に収まってしまうので、Cube Function と呼ばれることもある。(1)は数学的帰納法を用いて

漸化式 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x^2 - 1$

$$f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

から $f_n(x)$ の存在を示した。この漸化式を満たす多項式を「第1種チェビシエフ多項式」と呼ぶ。

【解答例(2)】

$$\text{多項式 } f_{n+1}(x) = 0, f_n(x) = 0$$

は、共通解を持たないことを示す設問である。

上図(↑)は $n = 1, 2, \dots, 10$ までの多項式 $f_n(x)$ の

グラフを重ねて作図した。x軸上で交点を重ねるような共通解は見られないが・・・。

【Point】 背理法の活用

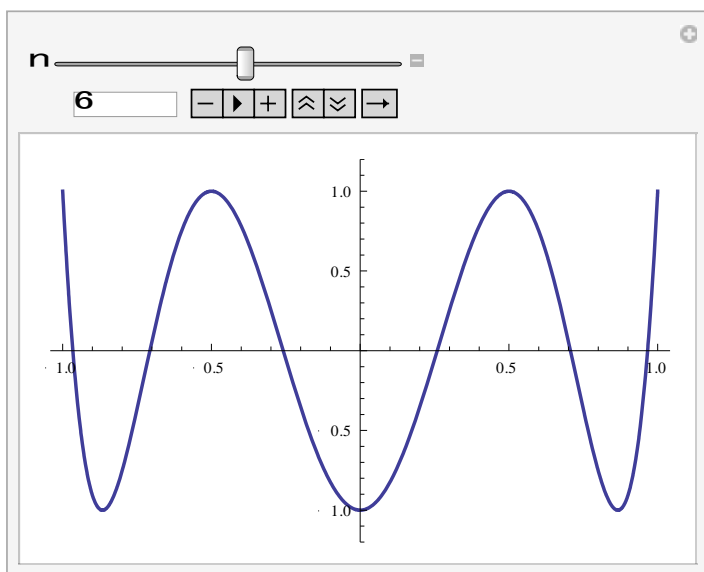
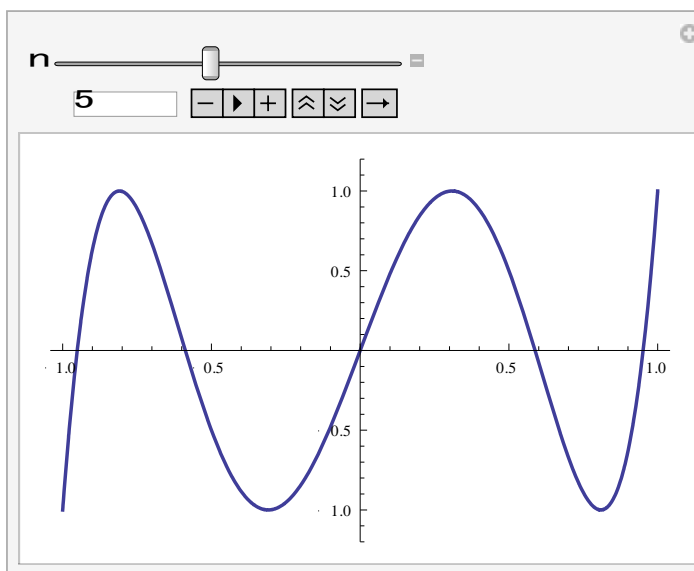
『 $f_{n+1}(x) = 0, f_n(x) = 0$ は共通解 $x = \alpha$ を持つ』

と仮定する。… (*)

$$f_{n+1}(\alpha) = 0, f_n(\alpha) = 0$$

漸化式 $f_{n+1}(x) - 2x f_n(x) = f_{n-1}(x)$ $n \geq 2$ より

$$x = \alpha \text{ を代入して } f_{n+1}(\alpha) - 2\alpha f_n(\alpha) = f_{n-1}(\alpha)$$



$$f_{n+1}(\alpha)=0, f_n(\alpha)=0 \text{ より } f_{n-1}(\alpha)=0$$

$$f_{n-1}(x)=0 \text{ も、共通解 } x=\alpha \text{ を持つ。}$$

帰納的に、 $f_1(x)=0, f_2(x)=0$ も共通解を持つ。

$$x=0, 2x^2-1=0 \text{ は、共通解を持つ。}$$

$$x=0, x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ となり共通解を持たない。}$$

たないので、矛盾する。

∴ 多項式 $f_{n+1}(x)=0, f_n(x)=0$ は、共通解を持たない。(QED)

【解説】 $f_n(x)=0$ の解は、どんな形?

n 次の方程式 $f_n(x)=0$ は、共通解を持たないので、

異なる n 個の解を持つことがわかった。

$$f_n(\cos\theta)=\cos n\theta \text{ を満たす多項式なので、}$$

$x=\cos\theta, -1 < x < 1$ から $0 < \theta < \pi$ とおくことができる。

$$f_n(x)=0 \Leftrightarrow \cos n\theta=0, x=\cos\theta, 0 < \theta < \pi$$

$0 < \theta < \pi$ から $0 < n\theta < n\pi, \cos n\theta=0$

$$n\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{1}{2n}\pi, \frac{3}{2n}\pi, \frac{5}{2n}\pi, \dots, \frac{2n-1}{2n}\pi$$

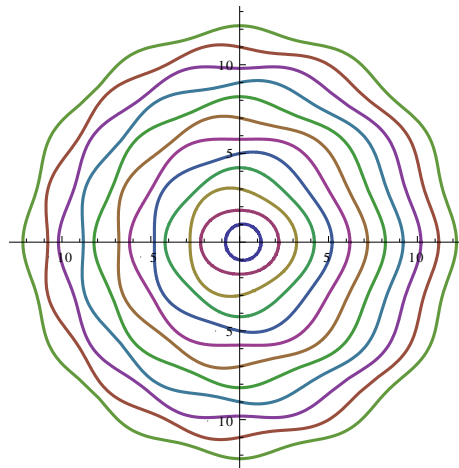
$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, (k=1, 2, 3, \dots, n) \text{ の } n \text{ 個の異なる解を持つ。これを } \mathbf{Chebyshev\ root} \text{ と呼ばれる。}$$

第 1 種チェビシェフ多項式 $f_n(x)$ の興味深い不思議な特性として、『 n 次の方程式 $f_n(x)=0$ が、必ず n 個の異なる実数解をもつ。』ことがある。

Chebyshev Spiral

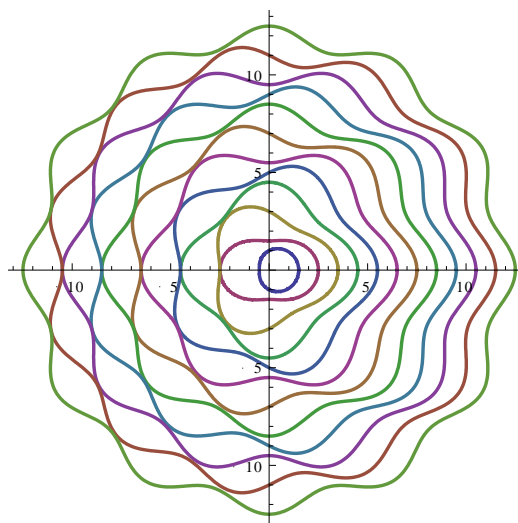
美しく、面白い曲線を作成することができる。

$$\text{極座標系 } r = n + \frac{1}{k} \cos n\theta \quad (n=1, 2, 3, \dots, 12)$$



(↑ $k=5$ のグラフ)

(↓ $k=2$ のグラフ)



$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = (4 \cos^3 \theta - 1) \sin \theta$$

のように、 $\sin n\theta$ は $\cos \theta$ だけの多項式にはならない。正の整数 n について、

$$\sin n\theta = g_n(\cos \theta) \sin \theta \text{ を満たす多項式 } g_n(x) \text{ を}$$

「第 2 種チェビシェフ多項式」と呼ぶ。

$f_n(x)$ と $g_n(x)$ はどんな関係があるのか?

京都大学 1996 年

(1) すべての実数 θ に対し $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$,

$\sin n\theta = g_n(\cos \theta)\sin \theta$ を満たし、係数が

ともにすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ と

$n-1$ 次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ。

(2) $f'_n(x) = ng_n(x)$ であることを示せ。

(3) p を 3 以上の素数とすると、 $f_p(x)$ の
 $p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れ
 ることを示せ。

【解答例(1)】 $f_n(x)$ の存在性の証明は、前問で解
 答したので省略。

$g_n(x)$ の存在性について証明する。

【Point】 加法定理をベースに漸化式を作成する

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\theta &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \\ \sin(n+1)\theta &= \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta \end{aligned} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\cos \theta) &= f_n(\cos \theta)\cos \theta - g_n(\cos \theta)\sin^2 \theta \\ g_{n+1}(\cos \theta) &= g_n(\cos \theta)\cos \theta + f_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

$f_n(x)$ と $g_n(x)$ の関係式は、

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= xf_n(x) - (1-x^2)g_n(x) \\ g_{n+1}(x) &= xg_n(x) + f_n(x) \end{aligned} \quad \text{となる。}$$

連立漸化式から f_n, f_{n+1} を消去すると、
 3 項間漸化式

$$\therefore g_{n+2}(x) - 2xg_{n+1}(x) + g_n(x) = 0$$

帰納的に、 $g_n(x)$ は $n-1$ 次の多項式であることが

わかる。第 1 種チェビシエフ多項式 $f_n(x)$ と第 2

種チェビシエフ多項式 $g_n(x)$ は、同じの漸化式で
 表され、初期値が異なる。

$$g_1(\cos \theta) = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1 \text{ から } g_1(x) = 1$$

$$g_2(\cos \theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2\cos \theta \text{ から } g_2(x) = 2x$$

$n=1, 2$ のとき成立する。

$n=k, k+1$ のとき

$g_k(x), g_{k+1}(x)$ が $k, k+1$ 次の多項式であるとき、

$$g_{k+2}(x) = 2xg_{k+1}(x) - g_k(x) \text{ より}$$

$g_{k+2}(x)$ は $k+1$ 次の多項式である。

よって、 $g_n(x)$ は $n-1$ 次の多項式である。(QED)

(2) $\cos n\theta = f_n(\cos \theta)$ の両辺を θ で、微分する

と、 $n \sin n\theta = f'_n(\cos \theta)\sin \theta$

$$ng_n(\cos \theta)\sin \theta = f'_n(\cos \theta)\sin \theta$$

$$ng_n(\cos \theta) = f'_n(\cos \theta) \quad x = \cos \theta \text{ より}$$

$$\therefore ng_n(x) = f'_n(x) \quad \text{(QED)}$$

(3) p ; 3 以上の素数について、 $pg_p(x) = f'_p(x)$

$g_p(x)$ は、 $p-1$ 次の整数を係数とする多項式な
 ので、

「 $f'_p(x)$ の係数は、すべて p の倍数」… (*)

$$f_p(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_p, a_{p-1}, \dots, a_1, a_0$ は整数

$$f_p'(x) = p a_p x^{p-1} + (p-1) a_{p-1} x^{p-2} + \dots + a_1$$

(*) より

$(p-1)a_{p-1}, (p-2)a_{p-2}, \dots, a_1$ は素数 p の倍数である。

$\therefore a_{p-1}, a_{p-2}, \dots, a_1$ は、 p の倍数… (**)

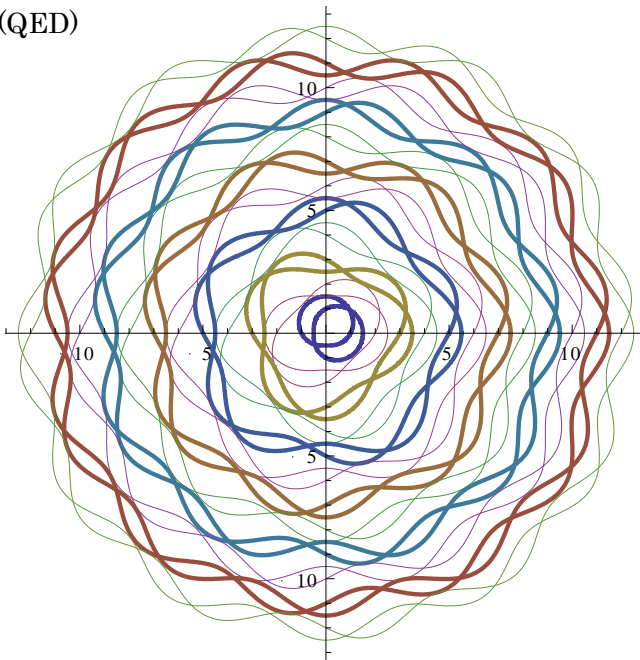
$f_p(\cos \theta) = \cos p\theta$ より、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると、

$$f_p\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{p\pi}{2} = 0 \quad p \text{ は、} 3 \text{ 以上の素数な}$$

ので、 $f_p(0) = 0$ より、定数項 $a_0 = 0$

$p-1$ 次以下の係数はすべて p で割り切れる。

(QED)



$$r = n + \frac{1}{k} \cos n\theta, r = n + \frac{1}{k} \sin n\theta$$

$(n=1, 2, 3, \dots, 12), k=2$

実に、美しいグラフになる。

百面相チェビシエフ多項式

第 1 種チェビシエフ多項式は、実に様々な顔を持つ多項式で、変化のある興味深い多項式である。

$$f_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} \quad \text{とおけるので}$$

$$f_n(x) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \cos n\theta$$

n 個の異なる解を持つので、

$$f_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(x - \cos \left| \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right| \right)$$

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

$$\text{更に、} \int_0^\pi \cos m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} 0 (m \neq n) \\ \pi (m = n = 0) \\ \frac{\pi}{2} (m = n \neq 0) \end{cases} \text{から}$$

$x = \cos \theta$ と変数変換すると、

$$\int_{-1}^1 \frac{f_m(x) f_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 (m \neq n) \\ \pi (m = n = 0) \\ \frac{\pi}{2} (m = n \neq 0) \end{cases}$$

松本睦郎 (札幌北高等学校)