

# 北海道大学





# 北海道大学

2016年

前期理系

Lorem ipsum dolor sit amet, suspendisse nulla pretium, rhoncus tempor placerat fermentum, enim integer ad vestibulum volutpat. Nisl rhoncus turpis est, vel elit, congue wisi enim nunc ultricies dolor sit, magna tincidunt. Maecenas aliquam est maecenas ligula nostra.



# 問題 1

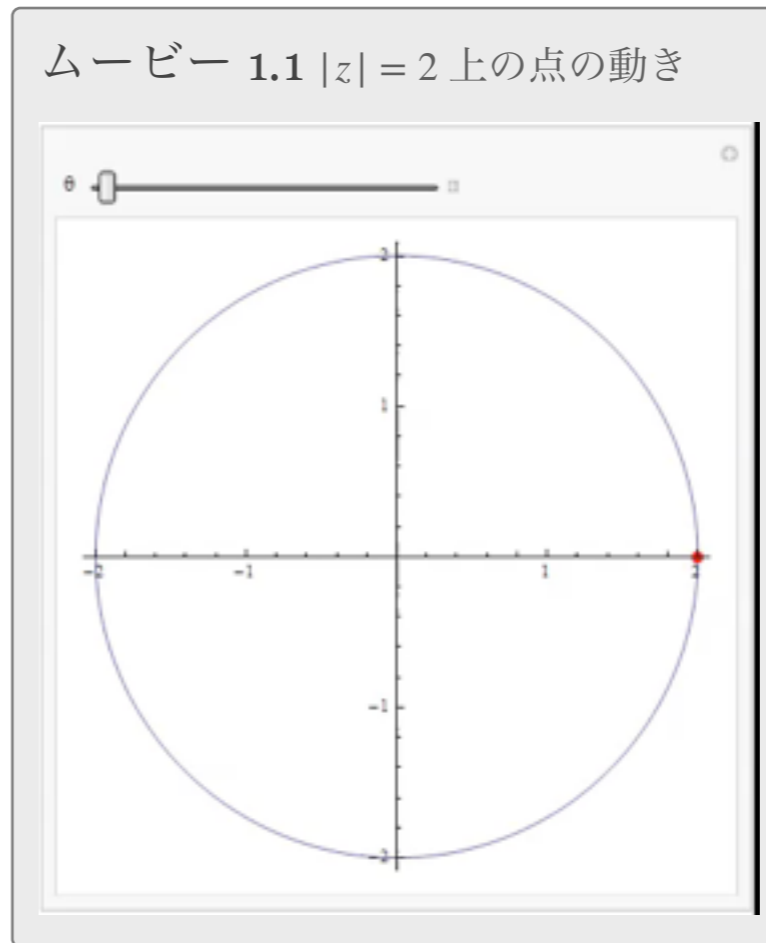
## 複素数平面

複素数平面上の点  $O$  を中心とする半径  $2$  の円  $C$  上に点  $z$  がある。  $a$  を実数の定数とし、

$$w = z^2 - 2az + 1 \quad \text{とおく。}$$

- $|w|^2$  を  $z$  の実数  $x$  と  $a$  を用いて表せ。
- 点  $z$  が  $C$  上を一周するとき、  $|w|$  の最小値を  $a$  を用いて表せ。

- $|z| = 2$  は原点を中心、半径  $2$  の円を表す。



$z$  の実数  $x$  の取りうる範囲は、  
 $-2 \leq x \leq 2$  である。

$$\begin{aligned} |w|^2 &= w\bar{w} = (z^2 - 2az + 1)(\bar{z}^2 - 2a\bar{z} + 1) \\ &= |z|^4 - 2az|z|^2 + z^2 - 2a|z|^2\bar{z} + 4a^2z|z|^2 - 2az + \bar{z}^2 - 2a\bar{z} + 1 \end{aligned}$$

$|z| = 2$  なので

$$\begin{aligned} &= 16 - 8az + z^2 - 8a\bar{z} + 16a^2 - 2a(z + \bar{z}) + 1 + \bar{z}^2 \\ &= 16 - 8a(z + \bar{z}) + z^2 + \bar{z}^2 - 2a(z + \bar{z}) + 16a^2 + 17 \\ &= -10a(z + \bar{z}) + (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} + 16a^2 + 17 \end{aligned}$$

$$z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x, \quad z\bar{z} = |z|^2 = 4$$

$$= 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9 \quad (-2 \leq x \leq 2) \quad \cdot \cdot \quad (\text{答})$$

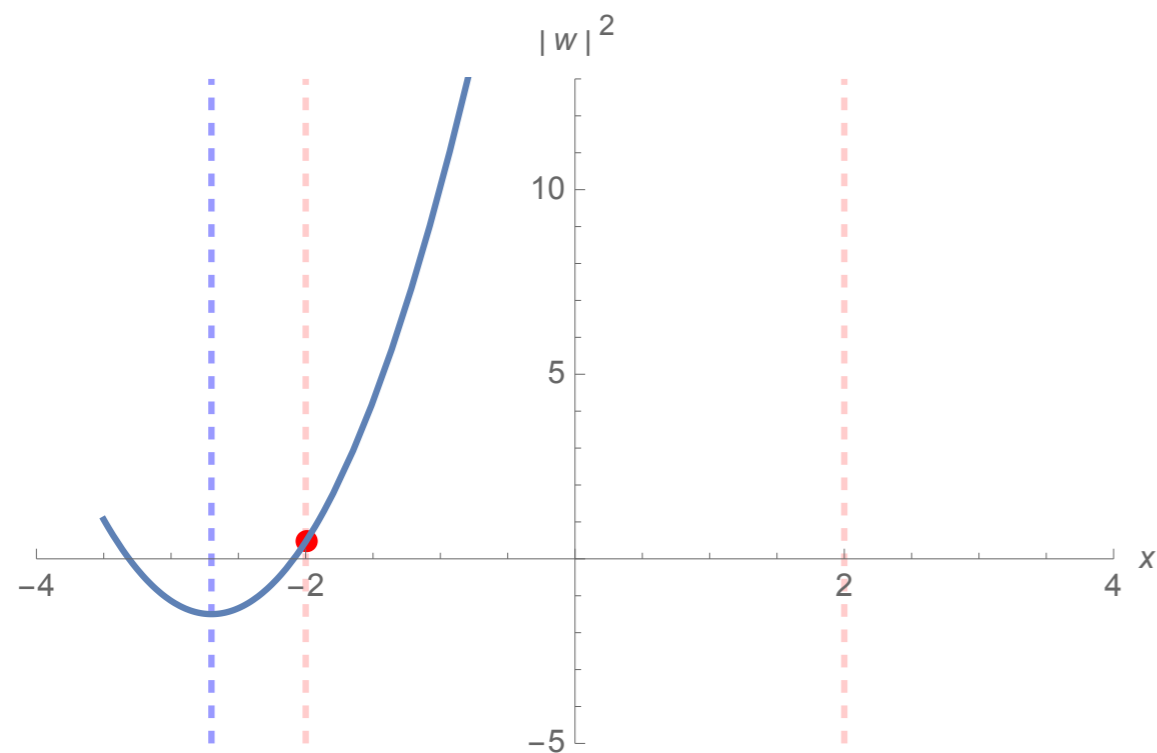
$$2. |w|^2 = 4x^2 - 20ax + 16a^2 + 9$$

$$= 4\left(x - \frac{5a}{2}\right)^2 - 9a^2 + 9$$

頂点  $\left(\frac{5a}{2}, -9a^2 + 9\right)$  の放物線である。

$|z| = 2$  より、 $-2 \leq x \leq 2$  での最小値を求める。

(i)  $\frac{5a}{2} < -2$  のとき つまり  $a < -\frac{4}{5}$  のとき



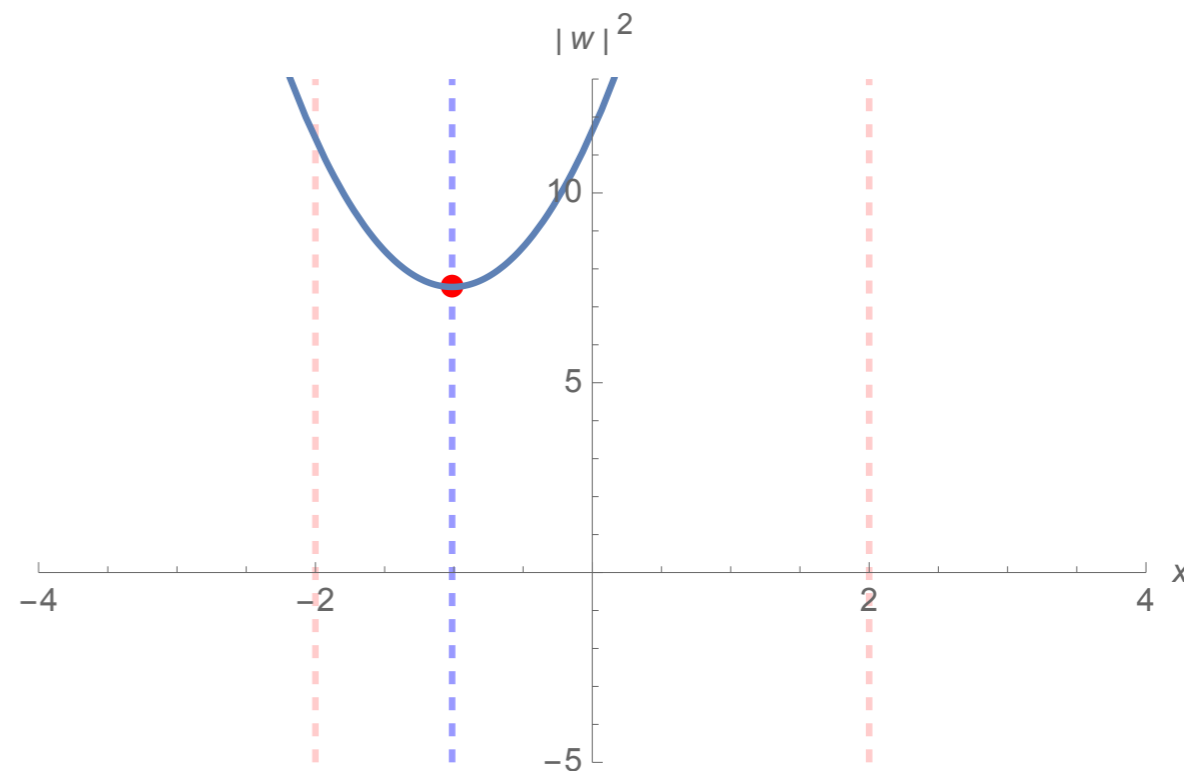
上図より、 $x = -2$  で最小値をとる。

$$|w|^2 \text{ の最小値} = 4(-2)^2 - 20a(-2) + 16a^2 + 9 = 16a^2 + 40a + 25$$

$$= (4a + 5)^2$$

$$|w| \text{ の最小値} = |4a + 5| \cdots \text{(答)}$$

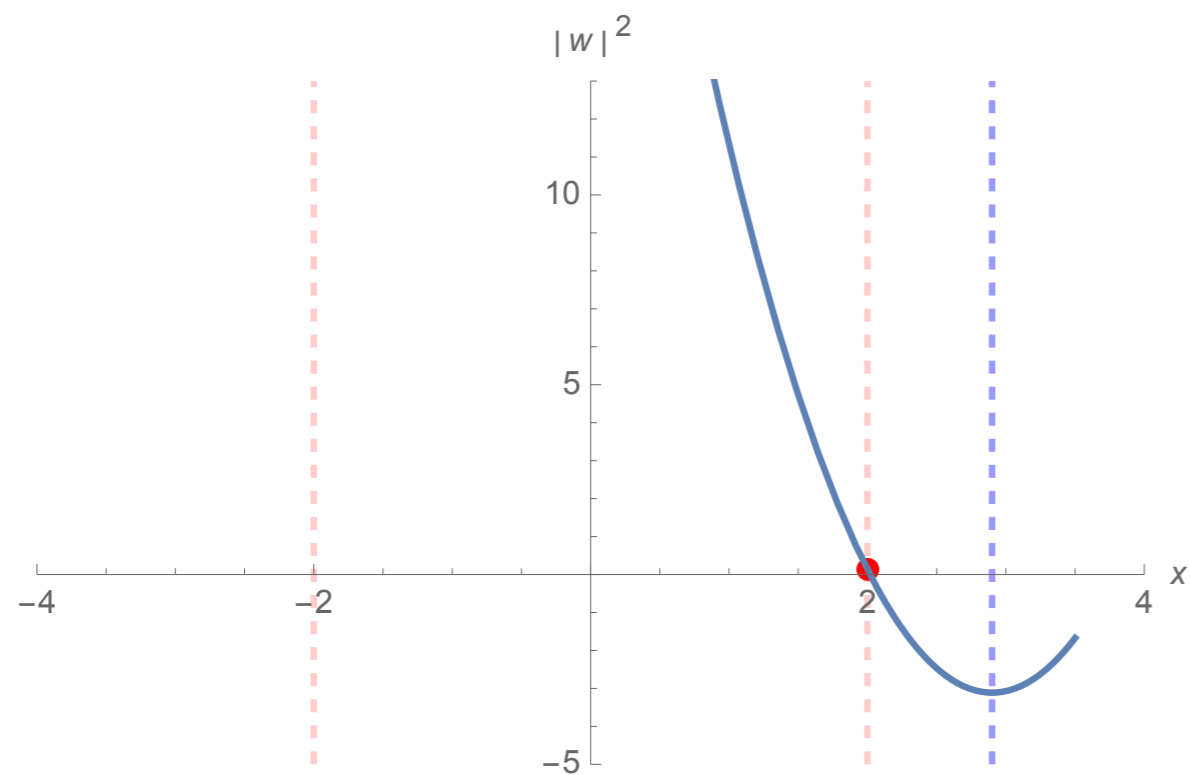
(ii)  $-2 \leq \frac{5a}{2} \leq 2$  のとき つまり  $-\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{4}{5}$  のとき



$x = \frac{5a}{2}$  で最小値  $|w|^2 = -9a^2 + 9$  となる。

$$|w| \text{ の最小値} = 3\sqrt{1 - a^2} \cdots \text{(答)}$$

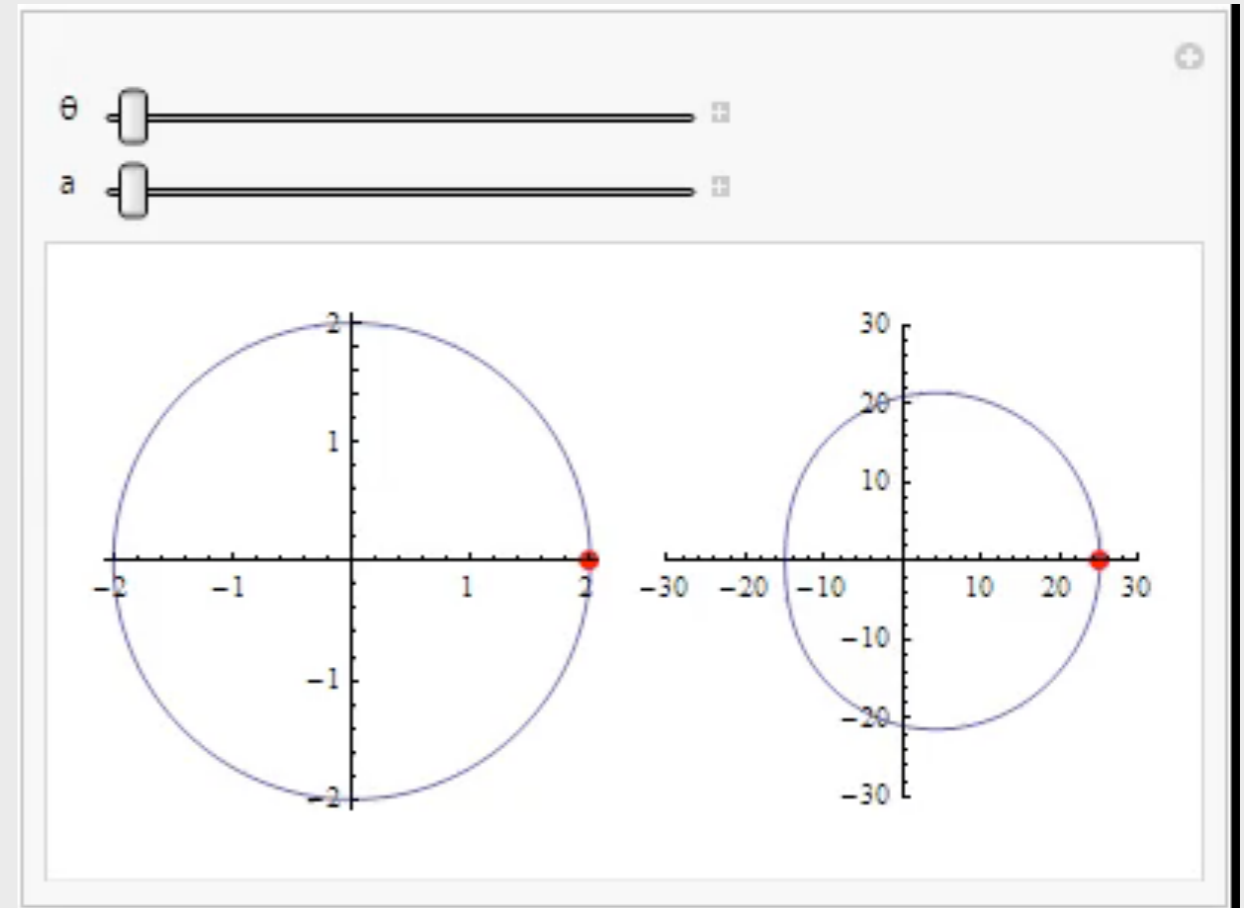
(iii)  $2 < \frac{5a}{2}$  のとき つまり  $\frac{4}{5} < a$  のとき



$x = 2$  で最小値  $|w|^2 = 16a^2 - 40a + 25 = (4a - 5)^2$

$|w|$  の最小値 =  $|4a - 5| \dots$  (答)

### ムービー 1.2 変換後の曲線の形



# 問題 2

## 積分

$a > 0$  に対し、関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \int_{-a}^a \left( \frac{e^{-x}}{2a} + f(t)\sin t \right) dt \text{ をみたすとする。}$$

1.  $f(x)$  を求めよ。

2.  $0 < a \leq 2\pi$  において、

$$g(a) = \int_{-a}^a f(t)\sin t dt \text{ の最小値とそのときの } a \text{ の値を求めよ。}$$

$$1. f(x) = \int_{-a}^a \left( \frac{e^{-x}}{2a} + f(t)\sin t \right) dt = \frac{e^{-x}}{2a} \int_{-a}^a dt + \int_{-a}^a f(t)\sin t dt$$

$$= \frac{e^{-x}}{2a} [t]_{-a}^a + \int_{-a}^a f(t)\sin t dt = e^{-a}[2a] + \int_{-a}^a f(t)\sin t dt$$

$$\therefore f(x) = e^{-x} + \int_{-a}^a f(t)\sin t dt \cdots \textcircled{1}$$

$$C = \int_{-a}^a f(t)\sin t dt \quad (C \text{ は定数}) \text{ とおく。} \cdots \textcircled{2}$$

②を①へ代入すると、

$$f(x) = e^{-x} + C \cdots \textcircled{3}$$

③を②へ代入すると

$$C = \int_{-a}^a (e^{-t} + C)\sin t dt$$

$$C = \int_{-a}^a e^{-t}\sin t dt + C \int_{-a}^a \sin t dt \cdots \textcircled{4}$$

$$\int_{-a}^a e^{-t}\sin t dt \text{ の値を求める。}$$

$$(e^{-t}\sin t)' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t \cdots \textcircled{5}$$

$$(e^{-t}\cos t)' = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} + \textcircled{6}$$



$$(e^{-t}\sin t)' + (e^{-t}\cos t)' = -2e^{-t}\sin t$$

両辺を  $t$  で積分する。

$$e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = -2 \int e^{-t}\sin t dt \quad \text{となるので}$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a e^{-t}\sin t dt &= -\frac{1}{2} \left[ e^{-t}(\sin t + \cos t) \right]_{-a}^a \\ &= -\frac{\sin a}{2}(e^a + e^{-a}) - \frac{\cos a}{2}(e^{-a} - e^a) \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$\int_{-a}^a \sin t dt$  の値を求める。

$$\int_{-a}^a \sin t dt = [-\cos t]_{-a}^a = -\cos a + \cos a = 0 \cdots \textcircled{8}$$

⑦⑧を④へ代入すると、

$$C = -\frac{\sin a}{2}(e^a + e^{-a}) + \frac{\cos a}{2}(e^a - e^{-a})$$

$$\therefore f(x) = e^{-x} + \frac{\sin a}{2}(e^a + e^{-a}) + \frac{\cos a}{2}(e^a - e^{-a}) \cdots \text{(答)}$$

2.

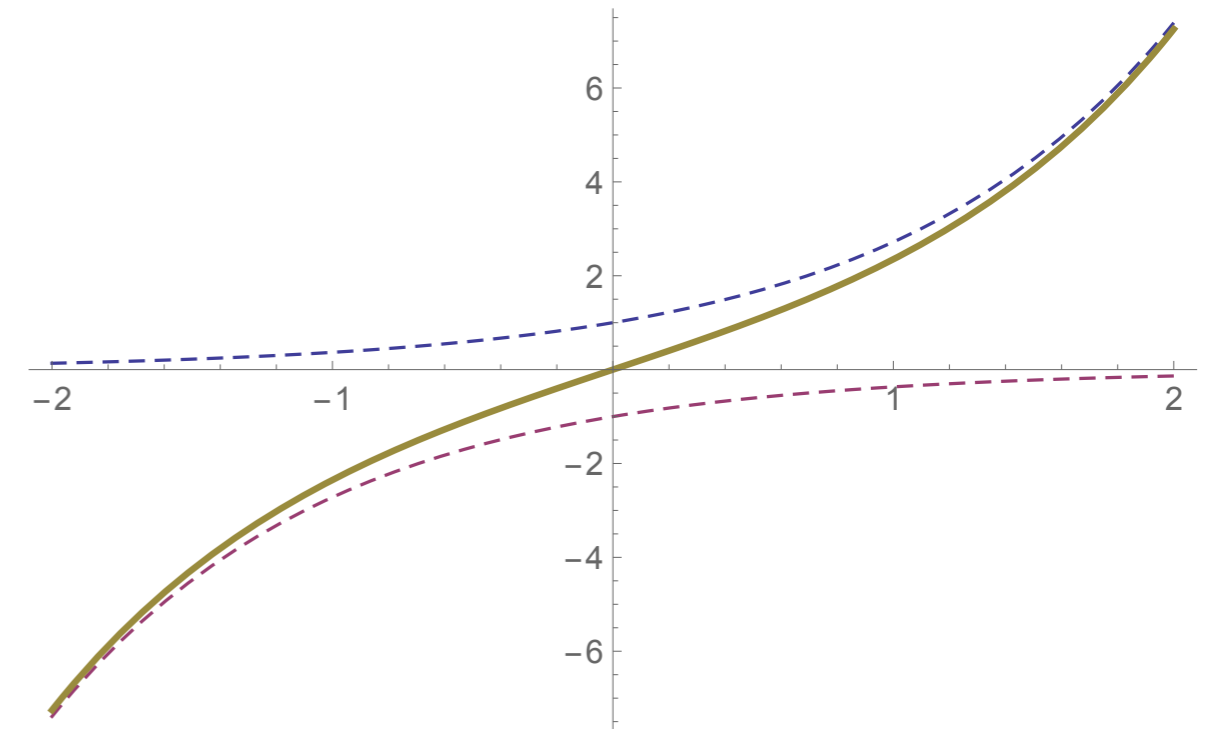
$g(a) = \int_{-a}^a f(t)\sin t dt$  の両辺を  $a$  で微分すると

$$g'(a) = f(a)\sin a - f(-a)\sin(-a)(-1)$$

$f(x) = e^{-x} + C$  なので

$$g'(a) = -(e^a - e^{-a})\sin a$$

下図より、 $e^x > e^{-x}$



$0 < a \leq 2\pi$  において、増減表を作成する。

$a$	(0)	...	$\pi$	...	$2\pi$
$g'(a)$	(0)	—	0	+	0
$g(a)$		↘	極小	↗	

$a = \pi$  において極小値つまり最小値をとる。

$$g(\pi) = -\frac{\sin \pi}{2}(e^\pi + e^{-\pi}) + \frac{\cos \pi}{2}(e^\pi - e^{-\pi}) = -\frac{1}{2}(e^\pi - e^{-\pi}) \cdots \text{(答)}$$

# 問題 3

## 確率

机のひきだしAに3枚のメダル、ひきだしBに2枚のメダルが入っている。ひきだしAの各メダルの色は、金、銀、銅のどれかであり、ひきだしBの各メダルの色は金、銀のどちらかである。

- ひきだしAのメダルの色が2種類である確率を求めよ。
- ひきだしA,Bをあわせたメダルの色が2種類である確率を求めよ。
- ひきだしA,Bをあわせてちょうど3枚の金メダルが入っていることがわかっているとき、ひきだしAのメダルの色が2種類である確率を求めよ。

1.

『Aのメダルの色が2種類である。』を否定すると、

『Aのメダルの色が1種類』又は『Aのメダルの色が3種類』である。

TypeI 『Aのメダルの色が1種類』のとき

色の選び方は金、銀、銅から1色を選ぶので、 ${}_3C_1 = 3$

例えば、 $A = \{\text{金、金、金}\}$ のときの確率は、 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

Type Iの確率は、 $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^2} \cdots \textcircled{1}$

TypeII 『Aのメダルの色が3種類』のとき

$A = \{\text{金、銀、銅}\}$ の確率は、 ${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3^2} \cdots \textcircled{2}$

求める確率は、 $1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{3} \cdots (\text{答})$

(別解) 金、銀、銅から2種類を選ぶ方法  ${}_3C_2 = 3$

Aの2種類が金、銀のとき、Aの3枚のメダルは $2^3$ 通りある。

Aの3枚とも金、銀のときを除外するので、確率は

$\frac{(2^3 - 2) \times 3}{3^3} = \frac{8 - 2}{3^2} = \frac{2}{3} \cdots (\text{答})$



2.

TypeIII 『Bのメダルが1種類』 のとき

このとき、 $B=\{\text{金、金}\}\text{or}\{\text{銀、銀}\}$ の2通りがある。

例えば、 $B=\{\text{金、金}\}$ の場合について、

$$\text{確率は } \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Case 1: 『Aのメダルが1種類』 の場合

$A=\{\text{銀、銀、銀}\}, \{\text{銅、銅、銅}\}$ の2通り

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 2 = \frac{2}{27}$$

Case 2: 『Aのメダルが2種類』 の場合

$A=\{\text{金、金、*}\}$ , (\*は金以外の色) 又は

$A=\{\text{金、*、*}\}$ , (\*は金以外の色で銀又は銅の2通り)

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) + 2 \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$B=\{\text{金、金}\} \text{の場合の確率は、} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{27} + \frac{4}{9}\right) = \frac{7}{2 \times 27}$$

$$B=\{\text{銀、銀}\} \text{の場合も同様に、} \frac{7}{2 \times 27}$$

$$\text{TypeIIIの確率は、} \frac{7}{27}$$

TypeIV 『Bのメダルが2種類』 のとき

$$\text{このとき、} B=\{\text{金、銀}\} \text{であり、確率は } {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Case 3: 『Aのメダルが1種類』 の場合

$A=\{\text{金、金、金}\}, \{\text{銀、銀、銀}\}$ の2通りあるので、確率は

$$2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$$

Case 4: 『Aのメダルが2種類』 の場合

$A=\{\text{金、金、銀}\}, \{\text{金、銀、銀}\}$

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) \times 2 = \frac{2}{3^2}$$

$$\text{TypeIVの確率は、} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{27} + \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{27}$$

$$\frac{7}{27} + \frac{4}{27} = \frac{11}{27} \dots \text{(答)}$$

3.

X: 『Aのメダルの色が2種類』 となる事象

Y: 『A,Bあわせて3枚の金メダル』 となる事象

条件付確率 $P_Y(X)$ を求める。

事象Yの確率  $P(Y)$  を求める。

$$\text{TypeV} : B = \{\text{金、金}\} \text{ のとき、その確率 } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Aが1枚の金を持つので、

$A = \{\text{金、銀、銀}\}, \{\text{金、銀、銅}\}, \{\text{金、銅、銅}\}$  の3つのケース

Case 1 ;  $A = \{\text{金、銀、銀}\}$  の場合

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Case 2 ;  $A = \{\text{金、銀、銅}\}$  の場合

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

Case 3 ;  $A = \{\text{金、銅、銅}\}$  の場合

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{TypeVの確率は、} \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \cdots \text{TypeV}$$

$$\text{TypeVI} : B = \{\text{金、銀}\} \text{ のとき、その確率 } {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Aが2枚の金を持つので、

$A = \{\text{金、金、銀}\}, \{\text{金、金、銅}\}$  の2つのケース

Case 4 ;  $A = \{\text{金、金、銀}\}$  の場合

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

Case 5 ;  $A = \{\text{金、金、銅}\}$  の場合

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

$$\text{TypeVIの確率は、} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \cdots \text{TypeVI}$$

$$\text{TypeVII} : B = \{\text{銀、銀}\} \text{ のとき、その確率 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{このとき、Aが3枚の金を持つ } A = \{\text{金、金、金}\} \text{ 確率 } \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\text{TypeVIIの確率は、} \frac{1}{4} \times \frac{1}{3^3} \cdots \text{TypeVII}$$

$$P(Y) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4 \times 27} = \frac{25}{4 \times 27}$$

次に、 $P(X \cap Y)$  の確率を求めると、

Case 1、Case 3、Case 4、Case 5 の場合なので

$$P(X \cap Y) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{18}{25} \cdots (\text{答})$$

# 問題 4

## 数列の漸化式

1. 次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ。

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

2. 方程式①の 3 つの実数解を  $s, t, u$  とし、

$$\text{数列}\{a_n\}\text{を } a_n = \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}$$

によって定める。このとき

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

3. (2) の  $a_n$  がすべて整数であることを示せ。

1.  $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$

左辺 =  $f(x)$  とおくと、 $f(0) = -1$  より、①は  $x = 0$  を解として持たない。

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{のとき} \quad 3x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}, \beta = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \quad \text{とおく}$$

増減表

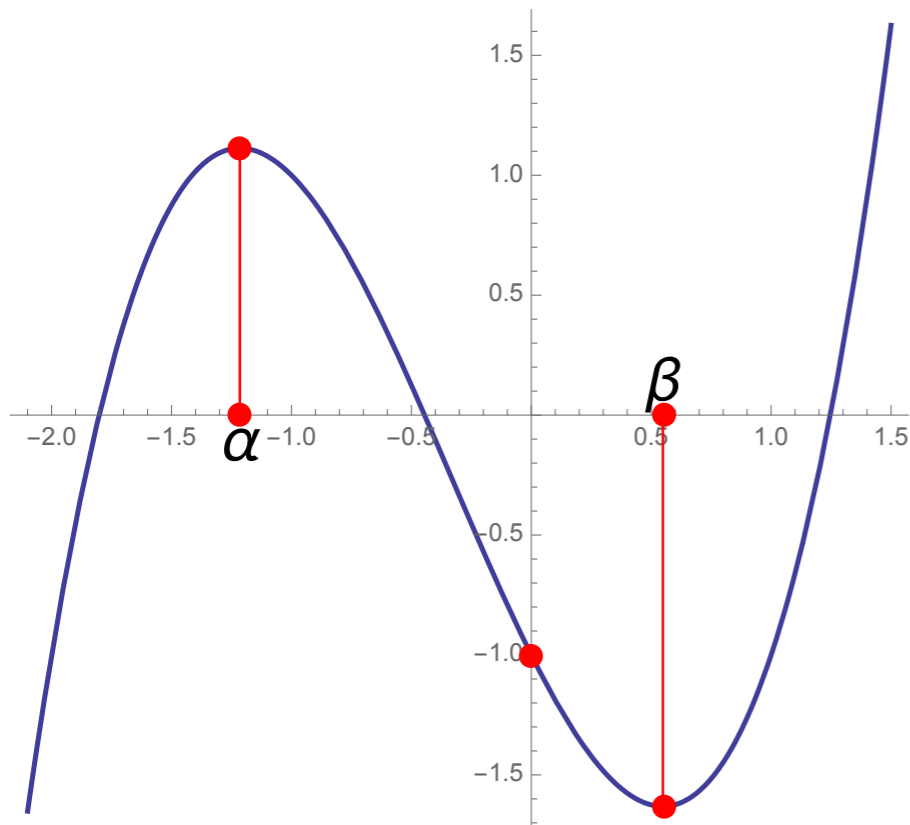
$x$	$\cdots$	$\alpha$	$\cdots$	$\beta$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(x)$  を  $f'(x)$  で割ると

$$f(x) = f'(x) \left( \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right) - \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}$$

$$f(\alpha) = f'(\alpha) \left( \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{9} \right) - \frac{14}{9}\alpha - \frac{7}{9} = -\frac{14}{9}\alpha - \frac{7}{9} = \frac{7 + 14\sqrt{7}}{9} > 0$$

$$f(\beta) = f'(\beta) \left( \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{9} \right) - \frac{14}{9}\beta - \frac{7}{9} = -\frac{14}{9}\beta - \frac{7}{9} = -\frac{14\sqrt{7} - 7}{9} < 0$$



$f(\alpha) > 0, f(\beta) < 0$  なので、上図より  $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$  は 0 でない 3 つの実数解をもつ。

2.

方程式①の 3 つの実数解を  $s, t, u$  なので、

$$s^3 + s^2 - 2s - 1 = 0, \quad t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0, \quad u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} & a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n \\ &= \frac{s^{n+2} + s^{n+1} - 2s^n - s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n+2} + t^{n+1} - 2t^n - s^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n+2} + u^{n+1} - 2u^n - u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{s^{n+1}(s^3 + s^2 - 2s - 1)}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n+1}(t^3 + t^2 - 2t - 1)}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n+1}(u^3 + u^2 - 2u - 1)}{(u-s)(u-t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.

$n$ に関する数学的帰納法によって証明する。前問2より

$$a_n = \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \cdots \textcircled{2}$$

$$a_{n+3} = a_n + 2a_{n+1} - a_{n+2} \cdots \textcircled{3}$$

(i)  $n = 1$  のとき、②から

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{(s-t)(s-u)} + \frac{1}{(t-u)(t-s)} + \frac{1}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{(t-u) - (s-u) + (s-t)}{(s-t)(s-u)(t-u)} = 0 \end{aligned}$$

(ii)  $n = 2$  のとき、②から

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{s}{(s-t)(s-u)} + \frac{t}{(t-u)(t-s)} + \frac{u}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{s(t-u) - t(s-u) + u(s-t)}{(s-t)(s-u)(t-u)} \\ &= \frac{st - su - ts + tu + us - ut}{(s-t)(s-u)(t-u)} = 0 \end{aligned}$$

(iii)  $n = 3$  のとき、②から

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{s^2}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^2}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^2}{(u-s)(u-t)} \\ &= \frac{s^2(t-u) - t^2(s-u) + u^2(s-t)}{(s-t)(s-u)(t-u)} \end{aligned}$$



$$= \frac{(t-u)s^2 - (t^2 - u^2)s + tu(t-u)}{(s-t)(s-u)(t-u)}$$

$$= \frac{(t-u)\{s^2 - (t-u)s + tu\}}{(s-t)(s-u)(t-u)}$$

$$= \frac{(t-u)(s-t)(s-u)}{(s-t)(s-u)(t-u)} = 1$$

$\therefore a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$ となり、整数値をとる。

$n = 1$ のとき③より、 $a_4 = a_3 + 2a_2 - a_1 = 1$ も整数値をとる。

$n = k$ のとき、 $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ が整数値をとると仮定すると、

$a_{k+3} = a_k + 2a_{k+1} - a_{k+2}$ から、 $a_{k+3}$ も整数値をとるので、

すべての自然数  $n$  について、 $a_n$  は整数値をとる。

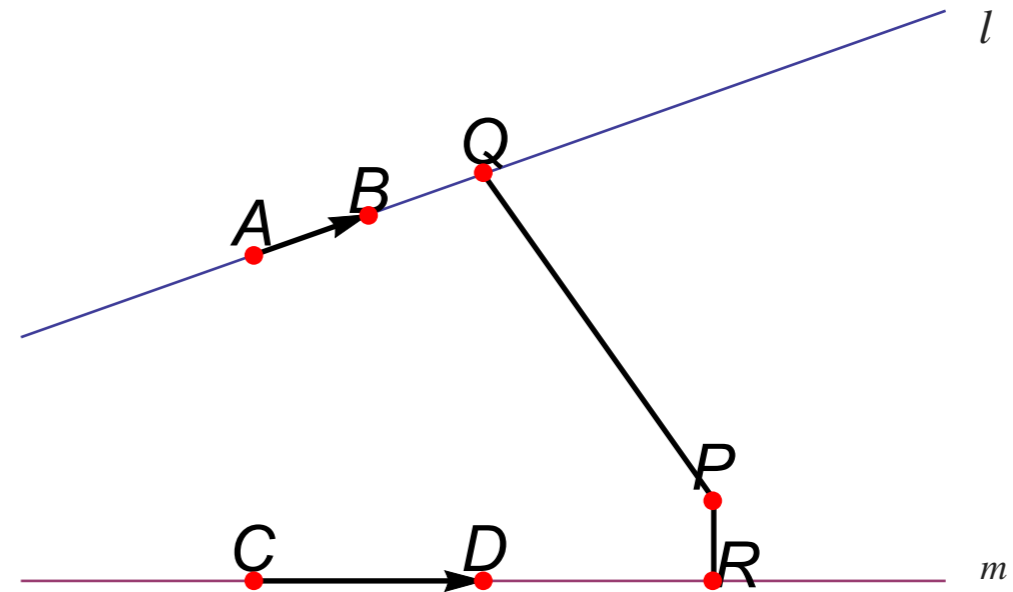
# 問題 5

## 空間ベクトル

空間の2点  $A(0,0,2), B(0,1,3)$  を通る直線を  $l$  とし、2点  $C(1,0,0), D(1,0,1)$  を通る直線を  $m$  とする。 $a$  を定数として、 $l$  上にも  $m$  上にもない点  $P(s,t,a)$  を考える。

1.  $P$  から  $l$  に下ろした垂線と  $l$  の交点を  $Q$  とし、 $P$  から  $m$  に下ろした垂線と  $m$  の交点を  $R$  とする。 $Q, R$  の座標をそれぞれ  $s, t, a$  を用いて表せ。
2.  $P$  を中心とし、 $l$  と  $m$  がともに接するような球面が存在するための条件を  $s, t, a$  の関係式で表せ。
3.  $s, t$  と定数  $a$  が (2) の条件をみたすとき、平面上の点  $(s, t)$  の奇跡が放物線であることを示し、その焦点と準線を  $a$  を用いて表せ。

1.



直線  $l$  の方向ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  を求める。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0,1,3) - (0,0,2) = (0,0,1)$$

直線  $l$  のベクトル方程式を求める。

点  $Q$  は直線  $l$  上の点なので、 $\overrightarrow{AQ} \parallel \overrightarrow{AB}$  より、

$$\overrightarrow{AQ} = q\overrightarrow{AB}, \quad q \text{ は実数}$$

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = q\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{AB}$$

これを、成分表示すると、

$$\overrightarrow{OQ} = (0,0,2) + q(0,1,1) = (0, q, 2+q) \cdots \textcircled{1}$$

同様に、直線  $m$  の方向ベクトル  $\overrightarrow{CD}$  を求める。

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (1,0,1) - (1,0,0) = (0,0,1)$$

直線  $m$  のベクトル方程式を求める。

点  $R$  は直線  $m$  上の点なので、 $\overrightarrow{CR} \parallel \overrightarrow{CD}$  より、 $\overrightarrow{CR} = r\overrightarrow{CD}$ 、 $r$  は実数

$$\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC} = r\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + r\overrightarrow{CD}$$

成分表示すると、

$$\overrightarrow{OR} = (1,0,0) + r(0,0,1) = (1,0,r) \cdots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{OP} = (s, t, a) \quad \text{と} \textcircled{1}、\textcircled{2} \text{から}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-s, q - t, 2 + q - a)$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (1 - s, -t, r - a)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0,0,1), \quad \overrightarrow{CD} = (0,0,1)$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{なので} \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$0(-s) + 1(q - t) + 1(2 + q - a) = 0$$

$$2q = t + a - 2$$

$$\therefore q = \frac{t + a - 2}{2}$$

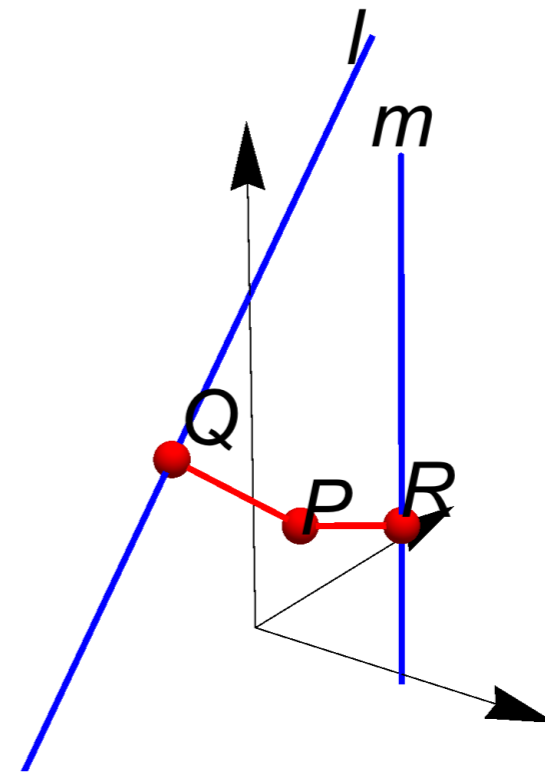
$$\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{CD} \quad \text{なので} \quad \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$0(1 - s) + 0(-t) + 1(r - a) = 0$$

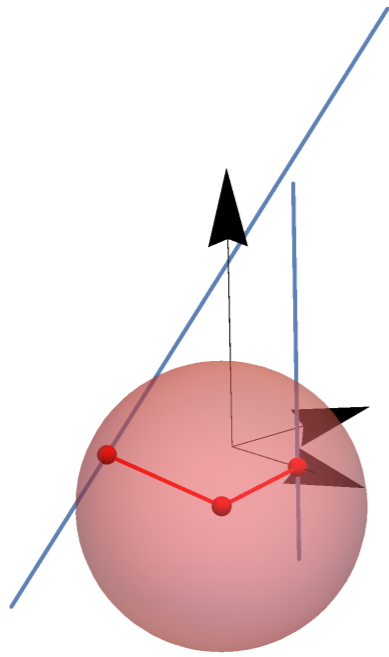
$$r - a = 0$$

$$\therefore r = a$$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \left( 0, \frac{t + a - 2}{2}, \frac{t + a + 2}{2} \right), \quad \overrightarrow{OR} = (1, 0, a) \cdots \text{(答)}$$



2.



前問より、 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-s, q - t, 2 + q - a)$

$$\overrightarrow{PQ} = \left( -s, \frac{a-2-t}{2}, \frac{t+2-a}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (1-s, -t, r-a)$$

$$\overrightarrow{PR} = (1-s, -t, 0)$$

$PQ, PR$  は半径になるので、

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PR}|^2$$

$$s^2 + \frac{(a-2-t)^2}{4} + \frac{(t+2-a)^2}{4} = (1-s)^2 + t^2$$

展開して整理すると、

$$t^2 + 2(a-2)t - a^2 + 4a - 2 - 4s = 0 \dots \text{(答)}$$

3.  $4s = t^2 + 2(a-2)t - a^2 + 4a - 2$   $t$  に関して平方完成すると、

$$(t+a-2)^2 = 4\left(s + \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{3}{2}\right)$$

$(s, t)$  平面において、 $t^2 = 4s$  の焦点  $(1, 0)$ 、準線  $s = -1$  を  $s$  軸方向へ  $-\frac{a^2}{2} + 2a - \frac{3}{2}$   $t$  軸方向へ  $-a + 2$  平行移動したもののなので、

焦点  $\left(-\frac{a^2}{2} + 2a - \frac{1}{2}, -a + 2\right)$ , 準線  $s = -\frac{a^2}{2} + 2a - \frac{5}{2} \dots \text{(答)}$

### ムービー 1.3 球体の動きを見よう

