問題１.

面積１の三角形ＡＢＣの各辺の長さをそれぞれ、ＡＢ＝２，ＢＣ＝ａ，ＣＡ＝ｂとする。さらに、Ｃから直線ＡＢへ下ろした垂線の足Ｄが線分ＡＢ上にあるとする。このとき、次の問いに答えよ。

（１）ＡＤ＝ｘとするとき、$a^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)b^2$**を，ｘを用いて表せ。**

（２）$a^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)b^2$**を最小にするｘを求めよ。また、そのときの∠ＢＡＣの大きさを求めよ。**

解答

（1）**右図のように**ΔABC**をおく**

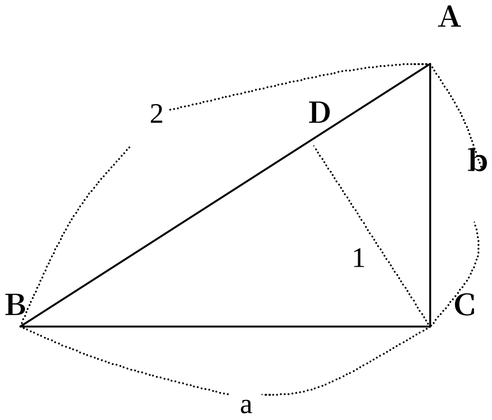
$\Delta ABC=1$ **より、ｈ**$=1$ **とおける。**

ＡＤ＝ｘとおくと

ΔADC **は直角三角形なので三平方の定理が成立する、**

$x^2+h^2=b^2$　**ただし**$h=1$**より**

$b^2=x^2+1\cdots$①



ΔDBC **も直角三角形なので三平方の定理をあてはめて、**

$(2-x)^2+1=a^2$

より

$a^2=x^2-4x+5\cdots$②

①②**を**$a^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)b^2$**へ代入すると、**

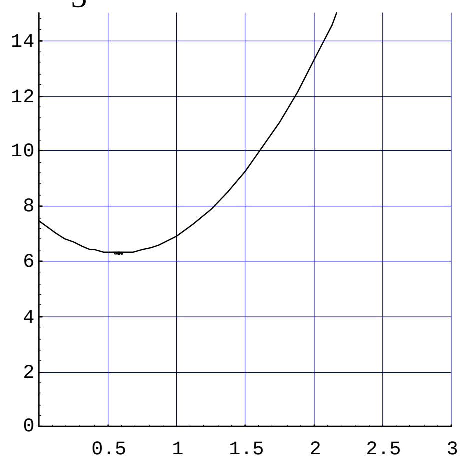
与式＝$x^2-4x+5+\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(x^2+1\right)=2\sqrt{3}x^2-4x+2\sqrt{3}+4\cdots$（**答**）

（2）**前問題を利用して**

与式＝$2\sqrt{3}x^2-4x+2\sqrt{3}+4=2\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+4$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **の時、最小となる。**

$\tan\angle BAC=\sqrt{3}$ **より、**$\angle BAC=\dfrac{p}{3}$



問題 2.

０＜ａ＜１とする。曲線 $y=1-x^2$ **と** $y=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2$ **の第１象限内での交点をＡとし、Ａからｘ軸に下ろした垂線の足をＢとする。また、原点をＯとし、線分ＯＢと線分ＡＢと曲線** $y=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2$ **とで囲まれた図形の面積をＳとする。このとき、次の問いに答えよ。**

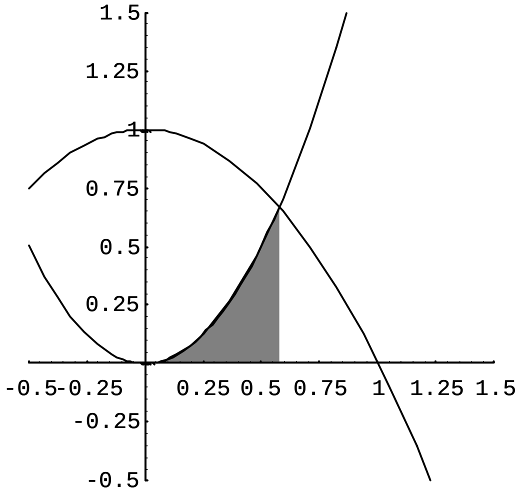
（１）点Ｂの座標を求めよ。

（２）面積Ｓを、ａを用いて表せ。

（３）面積Ｓを最大にするａの値を求めよ。

解答

(1) $\begin{cases} y=1-x^2 \cdots ① \\ y=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2 \cdots ② \end{cases}$



を連立して解くと

$\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2=1-x^2$

$\frac{x^2}{a^2}=1$

$x=\pm a$

$\therefore x=a$

B(a,0)

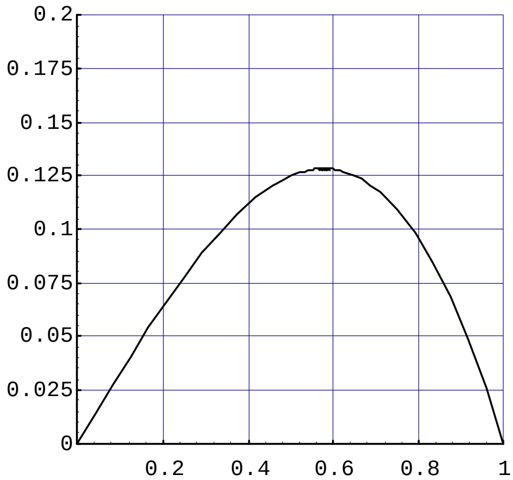
(2) $S=\int_0^a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2dx=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^a=\frac{a(1-a^2)}{3}$

(3) $S(a)=\frac{1}{3}\left(-a^3+a\right)$ $(0<a<1)$ **の範囲で最大値となる、**a **の値を求める。**

$S'(a)=-a^3+\frac{1}{3}$ **より**

a	0	$\cdots$	$1/\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		+	0	―	
$S(a)$		↗	**極大**	↘	

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **の時最大となる。**



問題３.

次の命題の真偽を述べ、その理由を説明せよ。ただし、$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい。

（１）$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

（２）xが実数であるとき、x^2+x が有理数ならば、x は有理数である。

（３）x,y がともに無理数ならば，$x+y, x^2+y^2$ のうち少なくとも一方は無理数である。

解答

（1）**この命題は真である。**

背理法を利用する。$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **が有理数であると仮定する。**…①

つまり、$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$　（p,q **は互いに素な整数で** $p\neq 0$）

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p}-\sqrt{3}$$

$$2=\frac{q^2}{p^2}-2\sqrt{3}\frac{q}{p}+3$$

$$2=\left(\frac{q^2}{p^2}+3\right)-\frac{2q}{p}\sqrt{3}$$

$$\frac{2q}{p}\sqrt{3}=\frac{q^2}{p^2}+1$$

左辺は無理数で、右辺は有理数となり、これは不合理となる。

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **は無理数である。**

（2）**この命題は偽である。**

反例をあげる。$x^2+x=1$（**有理数**）**とおく、**

$$x^2+x-1=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

xは無理数となる。

（3）**この命題は偽である。**

$x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$ **とおく、**$x+y=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$　$x^2+y^2=2+2=4$

どちらも、有理数となる。

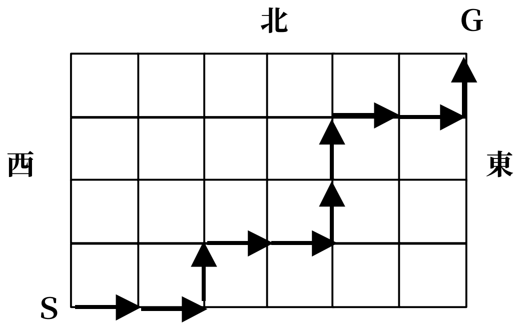
問題４.

図のような碁盤の目状の道路がある。Ｓ地点を出発して、道路上を東または北に進んでＧ地点に到達する経路を考える。（図１の太線はそのような経路の一例である。）

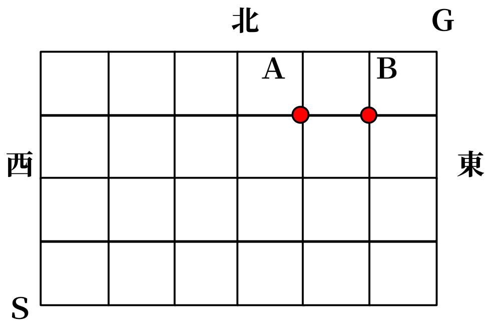
（１） Ｓ地点からＧ地点に至る経路は何通りあるか。

（２） Ｓ地点からＧ地点に至る経路のうち、図２のＡ地点とＢ地点をともに通る経路は何通りあるか。

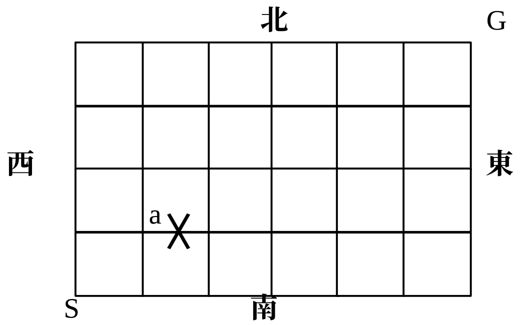
（３）図３のａの部分が通行止めのとき、Ｓ地点からＧ地点に至る経路は何通りあるか。



（図 1）



（図 2）



（図 3）

解答

（1）典型的な順列・組み合わせの問題である。S → G　${}_{10}C_4 = 210$

（2） S → A：${}_7C_3$　　A → B：1　　B → G：${}_2C_1$

積の法則より、${}_7C_3 \times {}_2C_1 = 70$

（3） a を通過する時、${}_2C_1 \times {}_7C_3 = 2 \times 35 = 70$

求める道のりの数は、210－70＝140