問題１．

放物線 $y=x^2$ 上の点 $A\left(a,a^2\right)$ における法線が放物線 $y=x^2$ と再び交わる点をＢとする。

ただし、ａ＞０とする。

（１）点Ｂの座標を、ａを用いて表せ。

（２）$a=\frac{1}{2}$ とするとき、線分ＡＢと放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積Ｓを求めよ。

（３）$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ とするとき、線分ＡＢと放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形をｙ軸のまわりに回転してできる回転体の体積Ｖを求めよ。

解答

（1）$y=x^2\cdots①$　　$y'=2x\cdots②$

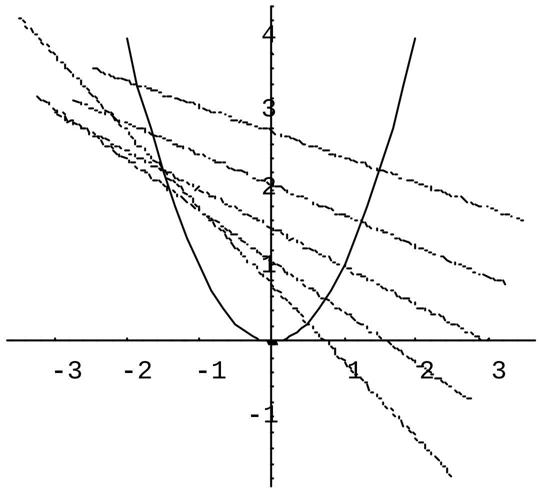
より法線の方程式は $y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2\cdots③$

①と③を連立方程式として解くと

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right)=0$$

$$\therefore x=a,x=-a-\frac{1}{2a}$$

$$B\left(-a-\frac{1}{2a},\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2\right)$$



（2）$a=\frac{1}{2}$　**の時、** $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),B\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ **法線の方程式** $y=-x+\frac{3}{4}$

よって面積Ｓとおくと、

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(-x+\frac{3}{4}-x^2\right)dx=\frac{4}{3}$$

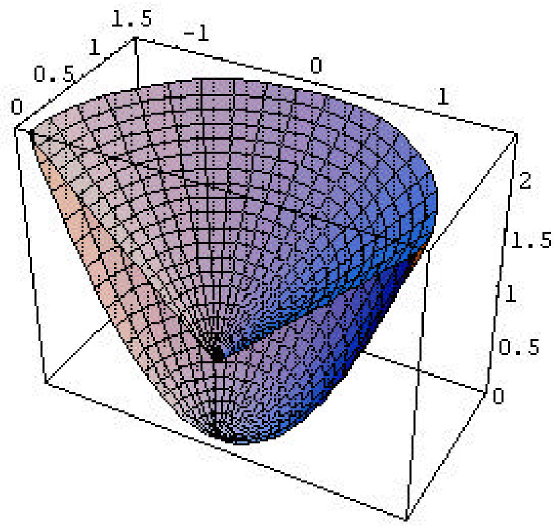
（3）$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$　**の時、**

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),B\left(-\sqrt{2},2\right)$$

よって、放物回転体の体積Ｖとおくと

$$V=\boldsymbol{p}\int_0^2 x^2dy-\frac{1}{3}\sqrt{2}^2\boldsymbol{p}\times 1$$

$$=\frac{4}{3}\boldsymbol{p}$$



問題２．

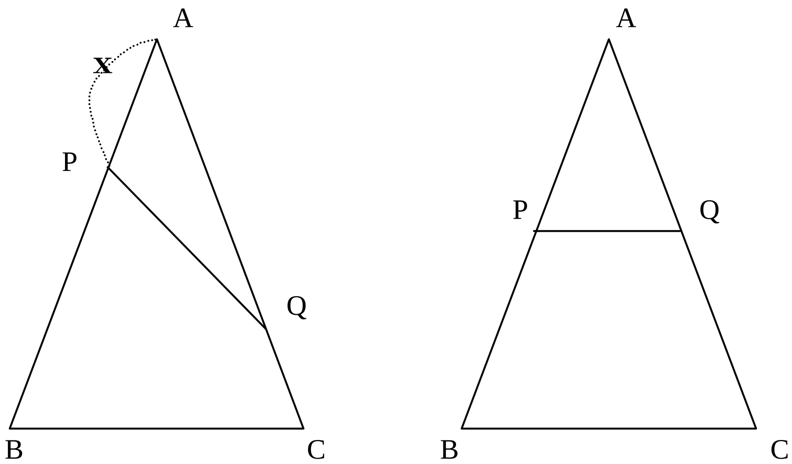
辺ＡＢと辺ＡＣの長さが等しい二等辺三角形ＡＢＣを考える。点Ｐは線分ＡＢ上を、点Ａから点Ｂに向かって一定の速さで動くとする。点Ｑは、点Ｃを点Ｐと同じ時刻に出発し、点Ｐと同じ速さで点Ａに向かって線分ＣＡ上を動くものとする。また、点Ｐが点Ｂに到達するまでの間で点Ｑに最も接近したときの線分ＰＱの長さが、線分ＡＰの長さに等しいものとする。このとき、次の問いに答えよ。

（１） $\angle BAC$ **の大きさを求めよ。**

（２）三角形ＰＡＱの面積が三角形ＡＢＣの面積の $\frac{1}{8}$ **になるとき、線分ＰＱの長さと線分ＡＢの長さの比を求めよ。**

解答

（1）



上図の様に、 $AB = AC = a, AP = CQ = x, \angle BAC = q, PQ = l$ **とおく。**

ΔAPQ **について、余弦定理を適用し**

$$l^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x)Cosq$$

$$= 2(1+Cosq)x^2 - 2a(1+Cosq)x + a^2$$

$$= 2(1+Cosq)\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}Cosq$$

$x = \frac{a}{2}$ **の時、** l^2 **は最小となる。この時、** $\frac{a^2}{2}(1-Cosq) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ **より** $Cosq = \frac{1}{2}$

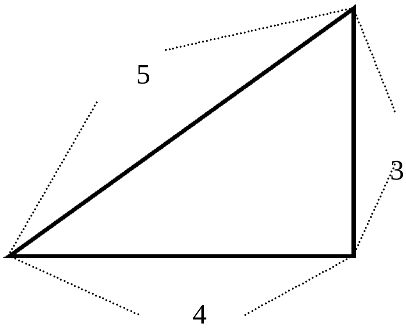
$$q = \frac{p}{3}$$

問題３.

３辺の長さがいずれも整数値であるような直角三角形を考える。

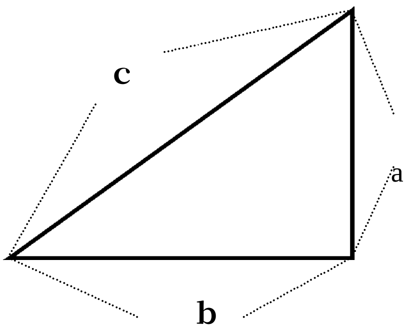
（１）直角をはさむ２辺の長さのうち、少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

（２）図のように、斜辺の長さと２番目に長い辺の長さの差が１であるような例を他に３つあげよ。



解答

(1)



a, b, c　**は整数。ピタゴラスの定理より、**$a^2+b^2=c^2 \cdots$①

a, b　**ともに、奇数であると仮定する。…（Ｉ）**

「奇数の 2 **乗＝奇数」、「奇数+奇数＝偶数」より**

a^2+b^2 **は偶数となり、**c^2 **は偶数で、ｃは偶数となる。**

$a=2m+1, b=2n+1, c=2k$ **と表示できる、整数** m, n, k **が存在する。**

①　**へ代入すると、**

$a^2+b^2=c^2$

$(2m+1)^2+(2n+1)^2=(2k)^2$

展開して、整理すると

$4(m^2+n^2)+4(m+n)+2=4k^2$

両辺を 2 **で割ると**

$2(m^2+n^2)+2(m+n)+1=2k^2$　**左辺は奇数、右辺は偶数となって不合理。**

よって、仮定（Ｉ）は成立しない。つまり、直角を挟む 2 **辺のうち、少なくても** 1 **辺は偶数である。**

問題４．

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=xSinx-Cosx$$

で定める。また、nを自然数とする。

（１）$2np \le x \le 2np+\frac{p}{2}$ の範囲において、$f(x)=0$ となるxがただ１つ存在することを示せ。

（２）　（１）での $f(x)=0$ となるxの値を a_n とする $2np \le x \le 2np+\frac{p}{2}$

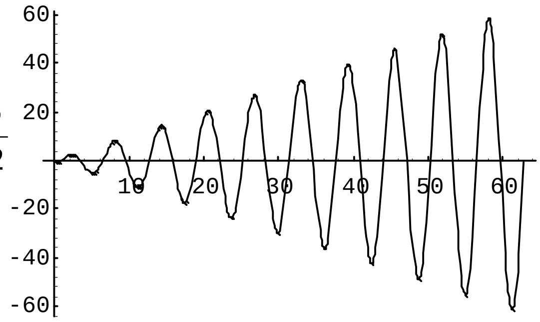
このとき、$\lim_{n\to\infty}(a_n-2np)=0$ 　を示せ。

解答

(1)　$f'(x)=2Sinx+xCosx>0 \quad \left(2np \le x \le 2np+\frac{p}{2}\right)$

$$f(2np)=-1<0$$

$$f\left(2np+\frac{p}{2}\right)=2np+\frac{p}{2}>0$$



$f(x)=xSinx-Cosx$ 　は $2np \le x \le 2np+\frac{p}{2}$

の範囲で単調増加関数で

$f(x)=0$ なる x がただ１つ存在する。

(2)解答Ｉ（代々木ゼミナールによる）

$$f(a_n)=0$$

$$f(a_{n+1}-2p)=(a_{n+1}-2p)Sin(a_{n+1}-2p)-Cos(a_{n+1}-2p)$$

$$=-2pSina_{n+1}<0$$

$2np<a_{n+1}-2p<a_n<2np+\frac{p}{2}$ 　より　$0<a_{n+1}-2(n+1)p<a_n-2np<\frac{p}{2}$

$b_n=a_n-2np$ 　とおくと　b_n は単調減少数列である。

しかも、$0<b_{n+1}<b_n<\frac{p}{2}$ 　で有界な単調減少数列である。

極限値が存在するので、$\lim_{n\to\infty}b_n=b$ 　とおく。$f(a_n)=0$ へ $a_n=b_n+2np$ 代入すると

$$(b_n+2np)Sin(b_n+2np)-Cos(b_n+2np)=0$$

$$(b_n+2np)Sinb_n=Cosb_n$$

両辺の極限をとると

$$\lim_{n\to\infty}(b_n+2np)Sinb_n=\lim_{n\to\infty}Cosb_n$$

$$Sinb\lim_{n\to\infty}(b_n+2np)=Cosb$$

右辺が有限確定値であるから、$Sinb=0$ でなければならない。

$Sinb = 0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\lim_{n\to\infty}(a_n - 2np) = 0$

解答Ⅱ

$f(a_n) = 0$ **より** $a_n Sina_n = Cosa_n$

$$Sina_n = \frac{Cosa_n}{a_n} \cdots ①$$

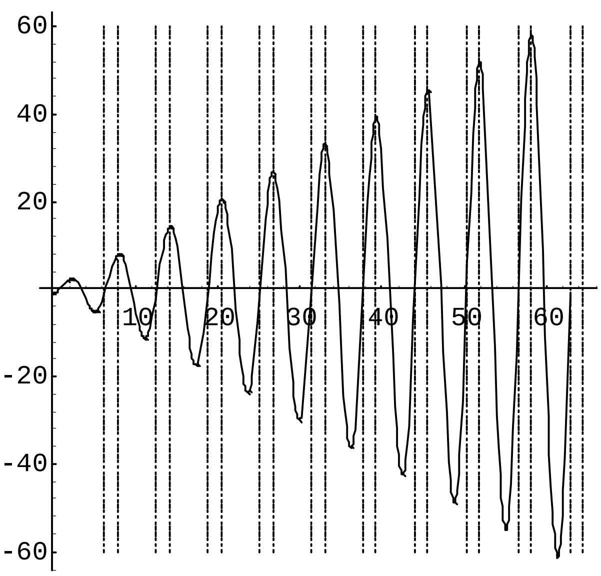
$n \to \infty$ **の時** $2np \le a_n \le 2np + \frac{p}{2}$ **より** $a_n \to \infty$

と $|Cosa_n| \le 1$ **より** $\lim_{n\to\infty} Sina_n = 0 \cdots ②$

① **より** $Sina_n, Cosa_n$ **は同符号であり**

$2np \le a_n \le 2np + \frac{p}{2}$ **より** $0 \le a_n - 2np \le \frac{p}{2}$

$\lim_{n\to\infty}(a_n - 2np) = 0$

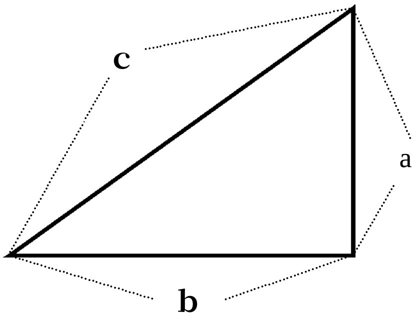


（2）

a,b,c **は整数とし、** $a<b<c$ **で**

$c-b=1\cdots$①

とおける。



$a^2+b^2=c^2\cdots$②

① **より** $b=c-1$ **を②へ代入して**

$a^2+(c-1)^2=c^2$

$a^2=2c-1$

a **は奇数であり、** $c=\dfrac{a^2+1}{2}$ **へ順次、奇数を代入していくと**

	a	b	c
i	1	0	1
ii	3	4	5
iii	5	12	13
iv	7	24	25
v	9	40	41

従って、上の表のiii、iv、ｖの時が求める例である。

（2） ΔABC は正三角形になる。 $AB = BC = CA = a$ より

ΔABC の面積 S とすると、$S = \frac{1}{2}a^2 Sin\frac{p}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\Delta APQ = \frac{1}{2}x(a-x)Sin\frac{p}{3} = \frac{1}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 　をｘについて解く

$8x^2 - 8ax + a^2 = 0$

$x = \frac{\left(2\pm\sqrt{2}\right)}{4}a$

$x = \frac{2-\sqrt{2}}{4}a$

$a - x = \frac{2+\sqrt{2}}{4}a$

$PQ^2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}a\right)^2 + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}a\right)^2 - 2\times\frac{2-\sqrt{2}}{4}\times a\times\frac{2+\sqrt{2}}{4}\times a\times\frac{1}{2} = \frac{5}{8}a^2$

$PQ = \frac{\sqrt{10}}{4}a$

$PQ : AB = \frac{\sqrt{10}a}{4} : a = \sqrt{10} : 4$

実　例