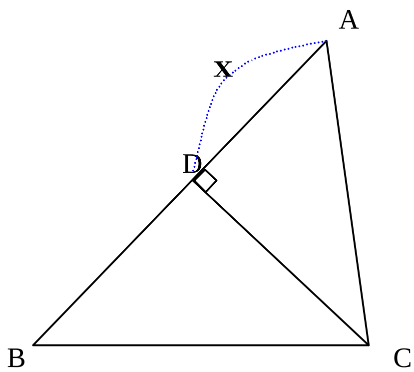
問題１.

三角形ＡＢＣにおいて、面積が１でＡＢ＝２であるとき、

$$BC^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)AC^2$$

の値を最小にするような　∠ＢＡＣの大きさを求めよ。

解答



ΔABC の面積＝1、AB=2　より

CD=1

ΔADC は直角三角形より、三平方の定理

$x^2+CD^2=CA^2$ …①

$CA^2=x^2+1$

ΔABC に余弦定理を適用して、

$BC^2=AB^2+CA^2-2AB\times CA\times CosA$

$BC^2=4+CA^2-4CA\times CosA$

$CA\times CosA=x$ …②

$\therefore\quad BC^2=4+CA^2-4x$

①、②を $BC^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)AC^2$ へ代入すると、

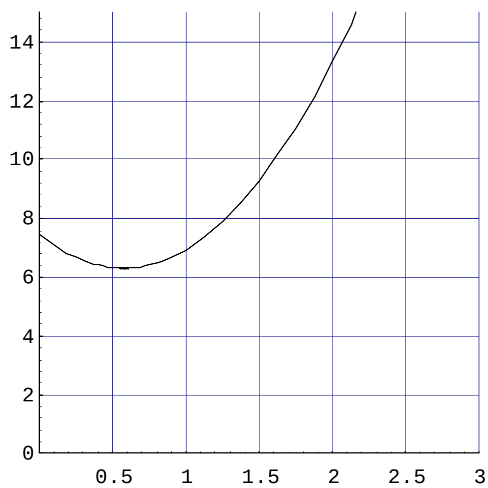
$BC^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)AC^2=4+CA^2-4x+\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(x^2+1\right)$

$=4+x^2+1-4x+\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(x^2+1\right)$

$=2\sqrt{3}x^2-4x+2\sqrt{3}+4=2\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+4$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の時、最小となる。$TanA=\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}$ つまり

$A=\dfrac{p}{3}$



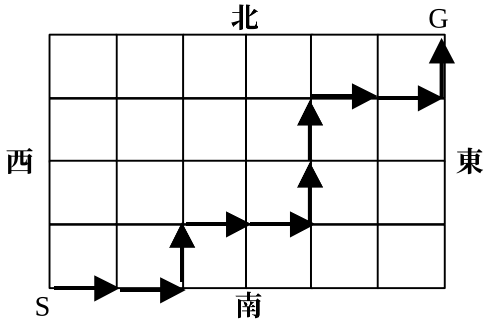
問題 2.

図のような碁盤の目状の道路がある。Ｓ地点を出発して、道路上を東または北に進んでＧ地点に到達する経路を考える。（図１の太線はそのような経路の一例である。）

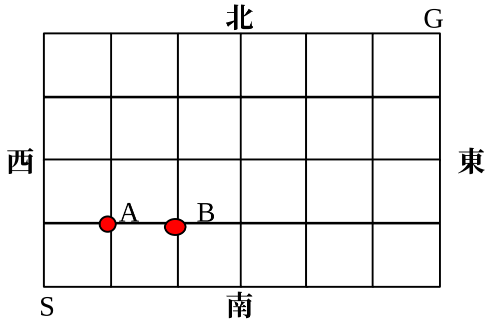
（１）Ｓ地点からＧ地点に至る経路は何通りあるか。

（２）Ｓ地点からＧ地点に至る経路のうち、図２のＡ地点とＢ地点をともに通る経路は何通りあるか。

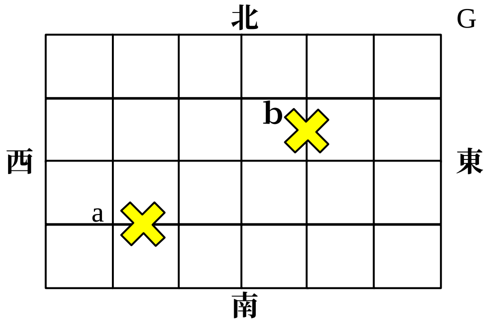
（３）図３のａ、ｂの２か所が通行止めの時、Ｓ地点からＧ地点に至る経路は何通りあるか。



(図 1)



(図 2)



(図 3)

解答

(1) **典型的な道のりの数の問題。** ${}_{10}C_4 = 210$

(2) **(ｉ)** S→A **について** ${}_{2}C_1 = 2$　　**(ii)** B→G **について** ${}_{7}C_3 = 35$

積の法則より $2 \times 35 = 70$

(3) **(ｉ)** a **を通過するとき**

${}_{2}C_1 \times {}_{7}C_3 = 2 \times 35 = 70$

(ii) ｂを通過するとき

${}_{6}C_2 \times {}_{3}C_1 = 15 \times 3 = 45$

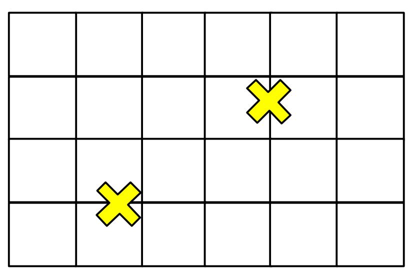
(iii) a **とｂの両方を通過するとき**

${}_{2}C_1 \times {}_{3}C_1 \times {}_{3}C_1 = 18$

a **又は** b **を通過する方法は**

７０＋４５－１８＝９７

２１０－９７＝１１３



問題３.

ｘｙ平面上の２直線　L_1, L_2 を

$L_1 : y = 0$

$L_2 : y = \sqrt{3}x$

で定める。Ｐをｘｙ平面上の点とする。直線 L_1 に関してＰと対称な点をＱ、直線 L_2 に関してＰと対称な点をＲとする。このとき、次の問いに答えよ。

（１）Ｐの座標を（ａ，ｂ）とするとき、Ｒの座標をａ，ｂを用いて表せ。

（２）２点Ｑ，Ｒの距離が２になるようなＰの軌跡Ｃを求めよ。

（３）点ＰがＣ上を動くとき、三角形ＰＱＲの面積の最大値とそれを与えるＰの座標を求めよ。

解答

（1）Ｒ（Ｘ，Ｙ）とおく。

PR の中点 $M\left(\dfrac{a+X}{2}, \dfrac{b+Y}{2}\right)$ が直線 $L_2 : y = \sqrt{3}x$ 上に存在する。

$\dfrac{b+Y}{2} = \sqrt{3}\dfrac{a+X}{2}$ …①

$b + Y = \sqrt{3}(a+X)$

PR の傾き＝$\dfrac{b-Y}{a-X}$　　L_2 と PR は垂直より

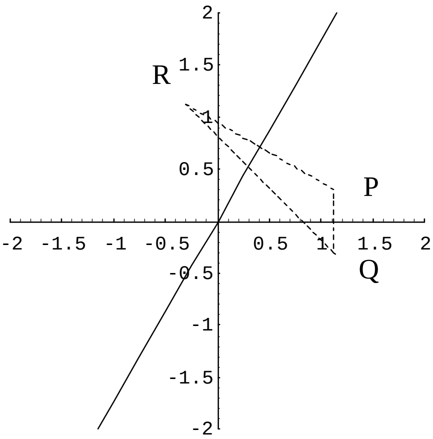
$\dfrac{b-Y}{a-X} \times \sqrt{3} = -1$

$X = a + \sqrt{3}(b-Y)$ …②

②を①へ代入して $Y = \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}$

②より、$X = \dfrac{-a+\sqrt{3}b}{2}$

$\therefore R\left(\dfrac{-a+\sqrt{3}b}{2}, \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)$



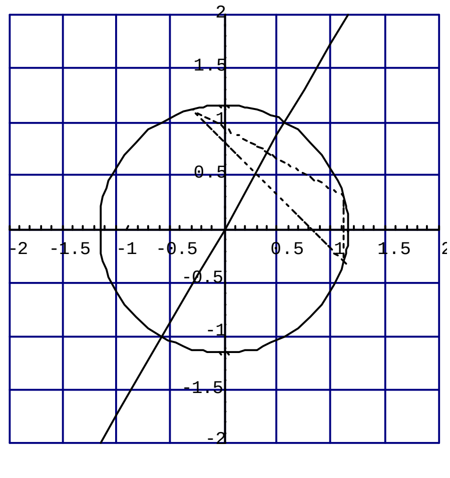
（2）Ｒ（Ｘ，Ｙ）　Ｑ（ａ，－ｂ）とおける。

（1）より $X = \dfrac{-a+\sqrt{3}b}{2}$　　$Y = \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}$ …③

RQ＝2　より距離公式を適用

$(X-a)^2 + (Y+b)^2 = 4$　へ③を代入して

$a^2 + b^2 = \dfrac{4}{3}$



問題４．

f(x)を周期１の周期関数とする。すなわち、f(x+1)=f(x)　$(-\infty < x < \infty)$とする。

aを実数とし、$p=\int_0^1 e^{ax} f(x)dx$とするとき。次の問いに答えよ。

（１）**n**を自然数とするとき、$\int_n^{n+1} e^{ax} f(x)dx$を**p**を用いて表せ。

（２）**n**を自然数とするとき$\int_0^n e^{ax} f(x)dx$を**p**を用いて表せ。

（３）周期１の周期関数 f(x)が$0 \le x \le 1$の範囲で

$f(x)=-\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{2}$　であるとき、$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x} f(x)dx$を求めよ。

解答

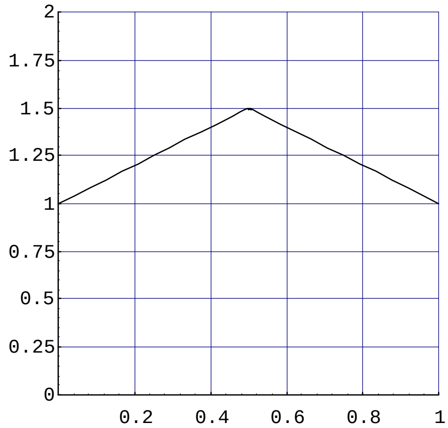
(1) 置換積分を利用する。$\int_n^{n+1} e^{ax} f(x)dx$について、$t=x-n$とおくと、$\frac{dt}{dx}=1$

x	$n\to n+1$
t	$0\to 1$

$$\int_n^{n+1} e^{ax} f(x)dx=\int_0^1 e^{a(t+n)} f(t+n)\frac{dx}{dt}dt=e^{an}\int_0^1 e^{at} f(t)dt=pe^{an}$$

(2) $\int_0^n e^{ax} f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} e^{ax} f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1} pe^{ak}=p\frac{1-e^{an}}{1-e^{a}}$　$(a\ne 0)$

$a=0$の時　$\int_0^n e^0 f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx=np$



(3) $f(x)=-\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{2}$　$(0\le x\le 1)$　より

（ｉ）$\frac{1}{2}\le x\le 1$の時　$f(x)=-x+2$

（ii）$0\le x\le \frac{1}{2}$の時　$f(x)=x+1$

$a=-1$　として（2）を利用する。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}-1}{e^{-1}-1}\times p=\frac{p}{1-e^{-1}}\cdots（＊）$$

pを求めると良い。

$$p=\int_0^1 e^{-x} f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}(x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x}(-x+2)dx=\left[-e^{-x}(x+1)-e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[-e^{-x}(x-2)-e^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=2-2e^{-\frac{1}{2}}$$

（＊）へ代入して　$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x} f(x)dx=\frac{2\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}{1-e^{-1}}=\frac{2\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$

問題５.

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-px}}-ax$ **が極値をもつように、定数ａの値の範囲を定めよ。ただし、ｐは正の定数で、ｅは自然対数の底である。**

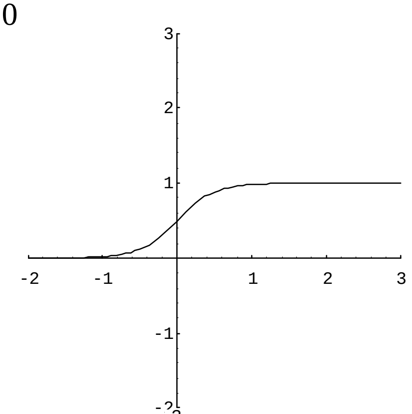
解答

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-px}}-ax$$

$$f'(x)=\frac{pe^{-px}}{\left(1+e^{-px}\right)^2}-a$$

極値を持つためには、 $f'(x)=0$ **なる** x **で** $f'(x)$ **が符号変化をしなければいけない。**

$\dfrac{pe^{-px}}{\left(1+e^{-px}\right)^2}-a=0$ **の時** $X=e^{-px}$ **とおくと、** $X>0$



$\dfrac{pX}{\left(1+X\right)^2}-a=0$ **分母を払って整理すると、**

$aX^2+\left(2a-p\right)X+a=0 \qquad \left(X>0\right)\cdots①$

少なくとも 1 **つは正の実数解を持てば良い。**

ただし重複解を除く。

（ｉ） $a=0$ **の時**

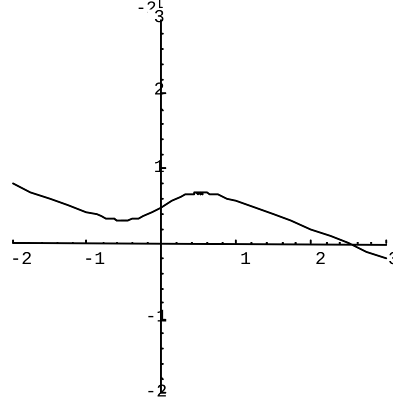
$-pX=0 \quad p>0$ **より** $X=0$

となり不適。

（ii） $a\neq 0$ **の時**

$$D=\left(2a-p\right)^2-4a^2>0$$

$$p^2-4ap>0$$



判別式 $4ap<p^2$

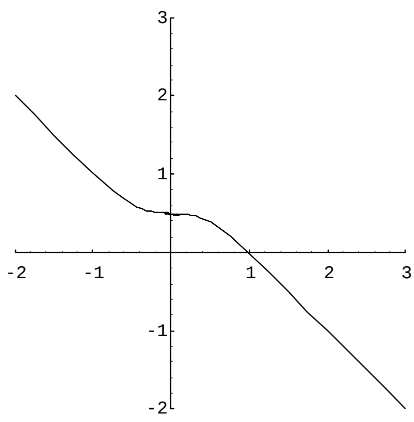
$p>0$

$a<\dfrac{p}{4}$

2 **解をａ,ｂとすると、解と係数の関係より**

$\mathrm{a}\times\mathrm{b}=1, \mathrm{a}+\mathrm{b}=\dfrac{p}{a}-2>0$ **となれば良い。**

$0<a<\dfrac{p}{2}$



これらより、 $0<a<\dfrac{p}{4}$

P の軌跡は　$x^2+y^2=\dfrac{4}{3}$

（3）

$PQ=|2b|$

直線 PQ と点 R との距離＝$\left|a-\dfrac{-a+\sqrt{3}b}{2}\right|=\left|\dfrac{3a-\sqrt{3}b}{2}\right|$

ΔPQR の面積を S とおくと、

$S=\dfrac{1}{2}|2b|\times\left|\dfrac{3a-\sqrt{3}b}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\sqrt{3}ab-b^2\right|\cdots①$

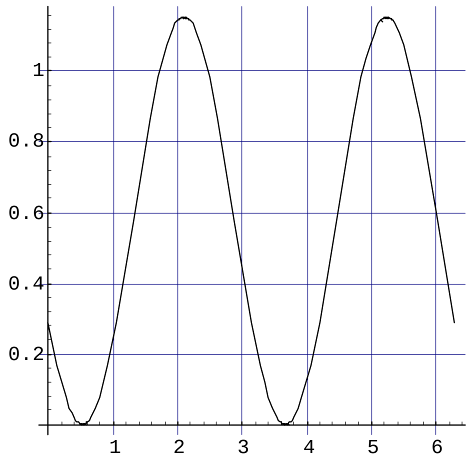
P（a，**b**）は $a^2+b^2=\dfrac{4}{3}$ を満たすので、

$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}Cos\mathrm{q},b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}Sin\mathrm{q}$ を①へ代入

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\dfrac{4\sqrt{3}}{3}Cos\mathrm{q}\times Sin\mathrm{q}-\dfrac{4}{3}Sin^2\mathrm{q}\right|$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left|\sqrt{3}Sin2\mathrm{q}-1+Cos2\mathrm{q}\right|$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left|2Sin\left(2\mathrm{q}+\dfrac{\mathrm{p}}{6}\right)-1\right|\leq\sqrt{3}$



$2\mathrm{q}+\dfrac{\mathrm{p}}{6}=\dfrac{3\mathrm{p}}{2},\dfrac{7\mathrm{p}}{2}$ の時、$\mathrm{q}=\dfrac{2\mathrm{p}}{3},\dfrac{5\mathrm{p}}{3}$ の時面積 S は最大

$P\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},1\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},-1\right)$