

環境学習「数学」

札幌藻岩高等学校
大久保 昌史

§ 1 自然環境と計算

平成19年10月19日(金)、札幌校の学生50人がキャンパス北側の茨戸川緑地で、植樹体験を実施しました。

この取組みは、武田泉准教授が担当している授業科目「人文地理学」及び「総合学習開発専攻環境社会グループ研修」の一環として、札幌市緑の推進課及び北海道空知・石狩森づくりセンターの協力のもと、札幌市「緑の回廊構想」にも取り上げられている茨戸川緑地エコプロジェクトとして、実施したものです。

参加した学生のほとんどは、初めての植樹体験であり、森づくりセンター職員からの指導のもと、戸惑いながらもシャベルで慎重に土を掘り、ミズナラの苗木を1本1本、注意深く愛情を込めて植樹していきました。

参加した学生からは、「植樹を通して自然環境保全の取組に参加でき、環境教育の重要性を改めて認識した。」「1本の木を育てることの難しさを理解できた。」「緑を未来に残す活動に積極的に参加していきたい。」との感想があるなど、教職を目指す学生にとっても、環境に対する意識を改めて喚起する貴重な体験となりました。

北海道教育大学全学では、環境教育に関連し、平成20年7月に行われるG8北海道洞爺湖サミットに向け、グローバル環境教育推進会議を立ち上げました。今後、学生・教職員一丸となって、環境に関する様々な取組を実施していくこととしています。
(北海道教育大学札幌校HPより)

たとえ1本の木であっても、その長さに成長するまでどのくらいの年月を必要としたのかを考えると、今の環境活動がいかに大事なのかを改めて考えさせられます。そこで、次のような問題を考えてみましょう。

問題

「芽が出た1年目に1メートル伸び、次の年から、いつも前年の2分の1伸び続ける木がある。この木は、1000年経ったら何メートルの大木になっているのだろうか？また100メートルを越すのは何年後か？」

考え方や計算・答えを書いてみましょう。



いかがでしょう？

「えっ？1000年も経ったら？そりゃあ、ものすごく大きな木に成長するんでないの？」
なんて考えてしまいますよね。

解答

結果的にはこの数列は、初項1、公比2分の1の無限級数なので、
計算すると「2」となります。
よって、この木の成長限界は2メートルである。

もちろん実際の成長度合を大きく無視していますので、モデルとしては扱いづらいですが、
上の方向には成長しなくても、横幅の方向にはものすごく成長しているかもしれませんね。

さて、次にこのようなことを考えてみましょう。

1 + 1 は本当に2なのか？

我々は小学校からの算数という教科によって、「 $1 + 1 = 2$ 」であるというものは事実である
ものとして疑いを持たないですよね。しかし、日常生活においてはどのようなのでしょうか？

本当に「 $1 + 1 = 2$ 」なのでしょうか？

例1：一人で仕事をする仕事量の倍は、二人でした仕事量になるのか？

そうにはならないですよね。例えば、二人がよっぽど仕事ができない人だったら？

または、なぜか息の合う二人だったら・・・？

例2：1リットルの量の砂の詰まった箱に、1リットルの量の水を加えたら2リットルになる
か？

答えは・・・ならないですよね。砂の隙間に水が収まるので、2リットルよりも少なくなる
のが実際の結果です。

このように、日常生活では「 $1 + 1 = 2$ 」ということは成り立たないほうがむしろ多いかも
しれません。

しかし、イタリアの数学者ペアノが

「1は自然数である。そして1には次の自然数がある」

という数学的帰納法によって、「ペアノの公理」という自然数を組み立てるための公理を構成し
たのです。

このように現実を考えると、数学の計算は本当に正しいのか？とか、実際に調べてみな
くちゃわからないことばかりじゃないのか？なんて考えてしまいそうです。

「実際に調べてみなくてはわからないこと」ということが原因で、考え方は決まっているのに
物事が先に進まないのであれば、やりたいことが全くできなくなってしまいます。こんな残念
なことはありません。

ではここで、次の問題に挑戦してみましょう。

問題

地球（ここでは球と仮定する）にピッタリとくっつくように電線を巻き、そのあと地球から1m離して巻くとき、電線の長さはいくら長くすれば良いか。

考え方や計算・答えを書いてみましょう。



まず「地球の半径がわからない・・・」などと考えてしまい、ギブアップしそうになるかもしれませんね。

しかも、地球規模の大きなものの長さを考えているのだから、ものすごい長さを想像してしまいましたが、実際に計算するとどうでしょう？

解答

地球の半径を r m とすると、円周の長さを求める公式によって

ピッタリとくっつくように巻いた電線の長さは $2\pi r$ m

半径を 1 m 長くすることによる電線の長さは $2\pi (r + 1)$ m

よって、その差は 2π により、 2π m

つまり、 $2\pi \approx 2 \times 3.14 = 6.28$ (m) で、6 m ちょっとしか長くないことがわかります。

地球規模の大きなことを考えているのに、しかも、実際に測っていない数値を扱っている計算なのに、しっかりとした結果が出てきました。おおまかでも結果が見えてくると、見えてこないのとでは大きな違いが生じてきます。

「わからないもの」を文字でおくことによって、計算・考えが進み、結果として答えが導き出せることから、中学 1 年生の数学で学ぶ「文字の偉大さ」をあらためて感じ取れるかもしれません。

§ 2 生活環境と図形

一人暮らしの生活に憧れを感じている人はいませんか？「カーテンをどのような色にしよう？」と「家具の配置は・・・？」などと数年後の楽しい生活を考えるとワクワクしてきますね。

さて、こんなことをイメージしてください。

あるアパートの物件を契約した。部屋の形は下記のような形である。

タイル型のじゅうたんを部屋に敷き詰めたい。

・・・こんなイメージです。できましたか？

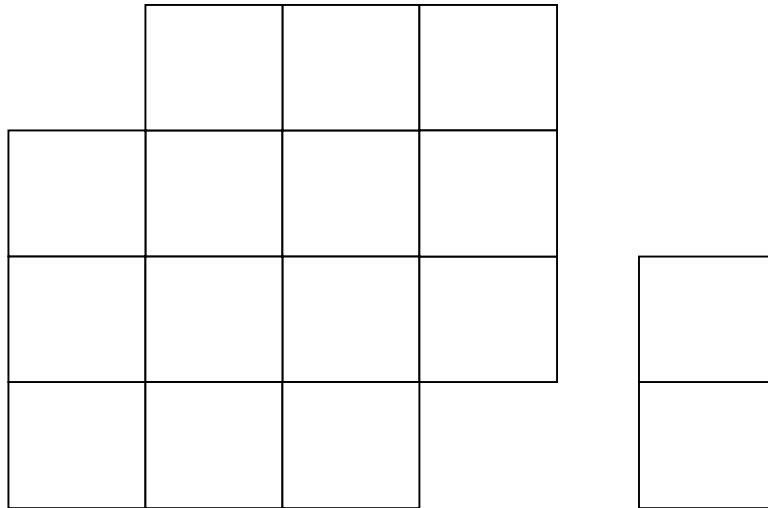
では、次の問題を考えてみましょう。

問題

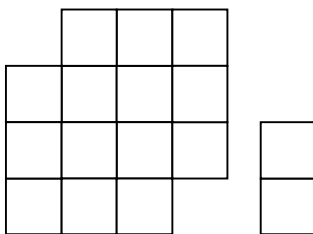
左下の図のように、 $4 \times 4 = 16$ 個のマス目からなるチェス版の、両角に位置する2つのマス目を除いてできた、14個のマス目からなる図形がある。これを「欠損チェス盤」と呼ぶことにする。

また、右下の図のように、隣接する2つの単位正方形からなる図形をドミノと呼ぶ。

このドミノ7枚で、この欠損チェス盤を覆い尽くすように並べたいが、可能なのか？不可能なのか？



考え方や計算・答えを書いてみましょう。



どうですか？できましたか？

答えは「不可能」なんです。さて、どうしてなのでしょう？

だって、14個のマス目に対して、2個のマス目で埋め尽くす…。
簡単に考えれば7個のパーツでおさまるはず…。なのに、なぜ???

解答

右図のように「色分け」をします。

すると、ドミノはどのような組み合わせによって構成されているのかというと…

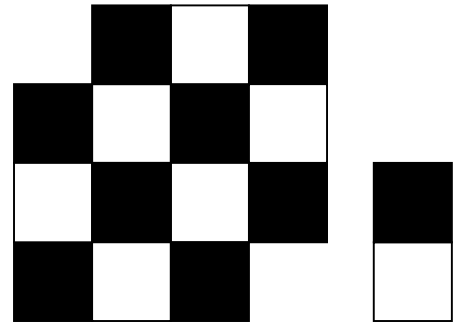
白… 1枚 黒… 1枚

ところが、欠損チェス盤は

白… 6枚 黒… 8枚

となり、その差は「2枚」。

これでは、どのように配列を考えても埋め尽くすことは不可能だということがわかります。



このように、数学の図形知識を応用すれば

「不可能を証明することを可能とする」

なんて、格好の良い言葉を言えてしまえるのかも…？

上記の問題は「1対1の対応」と「平面充填問題」を組み合わせた問題だと考えられます。

「1対1の対応」ということで、次のような話があります。

藻岩山（ある程度の範囲を決めて）の木を生徒全員で数えるとします。間違いなく数えるためには、どのような工夫をしたら良いでしょうか？

まず、1本1本数えていくと、もしかしたら誰かがすでに数え終わっている木かもしれませんし、数え忘れることだってあるかもしれません。第一、藻岩山ぐらいの広い範囲を考えるのであれば、数え間違える可能性のほうが高いですね。

さて、どうすればいいのでしょうか…？

これは豊臣秀吉が行った方法とされていますが、非常に無駄のない、効率の良い方法です。

まず、はじめに多数のひもをつくり、それを木に1本1本巻いていったというのです。こうすると、はじめに1万本ひもを作り、残りが200本だったら「9800本の木があった」ことになるからです。

また、秀吉の行った年貢の取り方についても、非常に面白い「京マス」の話があるのですが、それは社会科の先生に聞いてみましょう。



さて、皆さんは「三角形の内角の和の大きさはいくつですか？」と聞かれたらどのように答えますか？

…え？「180度」？ 一般的にはそうかもしれませんが、ちょっと考え方を変えるとそうならないことも考えられるのです。

きっと、皆さんは

「目の前にある紙（平面）に直線を3本引き、三角形を作り角度を考えている」
のではないですか？一般的に教えてもらっている幾何学を「ユークリッド幾何学」といいます。

「平行線は交わらない」とか「三角形の内角の和は180度」とかが当たり前のこととして使われています。しかし19世紀になって「非ユークリッド幾何学」と呼ばれる数学が登場したのです。

たとえば、これから三角形を書く紙を、平面の紙ではなく、地球のような丸いものを想像してください。

北極点に相当するところから、それぞれ90度になるように南下し、赤道に相当するところでそれぞれ向き合うように直線を書いてみてください。



どうですか？それぞれの角度は90度をなしていますが、三角形がかけたはずで、これで内角の和が180度にならない三角形を書くことができました。

これが「非ユークリッド幾何学」の基本となる考え方なのです。

今まで習った環境において、ちょっと視点を変えてみることで、新しい分野・世界での見方ができるなんて、素敵なことだと思いませんか？

§ 3 犯罪環境と数学

数年前、ある生徒に次のような質問をしました。

「30%引きの商品と3割引の商品とでは、どちらが安いと思う？」

『30%引きだろ？』

「どうして？」

『だって、30と3なら、30のほうが多く引いてるから。』

「・・・(絶句)」

学校を卒業した後、その生徒たちが騙されることなく、生きていくためにも必要な「算数力・数学力」を伝える責任感を強く感じた瞬間でした。

そこで「ネズミ講」と呼ばれる詐欺が、今でもニュースで耳にする事件のひとつかと思われませんが、この「ネズミ講」を数学的に理解してみようかと思えます。

もともと「ネズミ講」の法律上の名称は「無限連鎖講」というらしいのです。

おや...「無限」...？ 無限に連鎖するなんてあるのでしょうか???

「ネズミ講」犯罪の基本的なケースを考えてみましょう。

ある会の主催者は、次のような会則を決めて会員を募集しました。

会 則
(1) 主催者に入会金4000円を払うと、会員になることができる。
(2) 会員は、2名を新たに入会させると、会員1人について3000円の紹介料を受け取ることができる。ただし、1人の会員について、紹介者は2名までとします。
(3) 退会はいつでもできるものとします。

この会に入会する人は、次のように考えるのでしょうか。

「はじめに4000円の出費をしたが、2名紹介するだけで6000円の紹介料を受け取ることができる。すなわち2000円の儲けができる。しかも、2人ぐらいならすぐに見つかるし...

あれ？2名紹介して、すぐに退会してもいいのか...。ならば、また入会しなおせば、同じように4000円入会金を払って、2名紹介して、2000円の利益を得て...。おお！なんて都合のいい話なんだ！」

実際の犯罪のケースは、もう少し複雑なのかもしれませんが、いくつかのポイントだけに絞って考えたいと思います。さて、どこにワナがあるのか？そして、誰が儲かるのでしょうか？

主催者は・・・確実に儲かります。

入会者が1人増えるごとに、紹介者がいない場合は4000円、もしも紹介者が1人いる場合は1000円、紹介者が2人いる場合は2000円儲かります。入会者の人数にもよりますが、その総額は膨大な額になるはずですが、

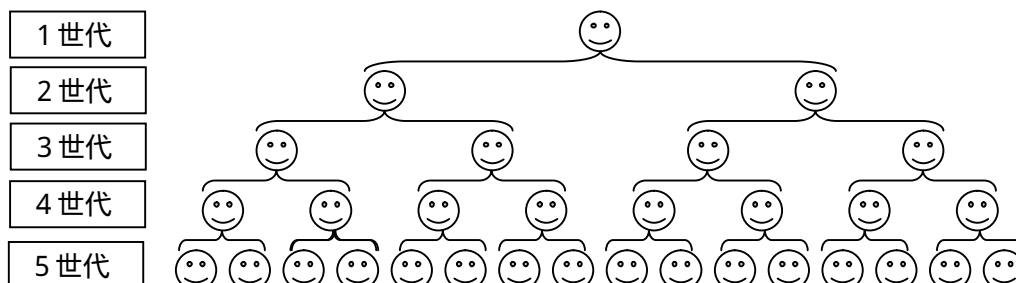
会員に関しては・・・1000円または2000円の儲けがあるはず・・・？

気がついた人もいるでしょうが、実はここがワナなのです。

その会員が儲けるためには、新入会員を見つけなければならないのです。逆を言えば、もしも新入会員を見つけられなければ、ただ単に4000円を取られたままになってしまいます。

しかし、会員になった人は「たった2人ぐらいなら何とかなるだろう」と思うはずなのですが、ここもワナなのです。

次の図を見てみましょう。



5世代目では、まだ「 $2^4 = 16$ 」人です。しかし、11世代目で1000人を突破。21世代目で会員数は100万人を突破。札幌のすべての人が会員になってしまうのは、あっという間なのかもしれません。

したがって、この会への入会者に関しては行き詰まり、それに伴って主催者は大儲けをし、ごく一部の若年世代の会員だけが2000円の儲けをし、残りの大量の会員が4000円ずつの損失を生じさせている結果となります。

ほんの少しの計算力と、確かなる判断力があれば、こんな事件に巻き込まれることはないはずなのですが…。しかし、このような判断さえも狂わせてしまう「お金の魅力」というものは非常に恐ろしく感じます。

悲しい事ながら、世の中には人を欺いてまでも私利私欲を肥やそうとする人がいるのです。

そんな人たちに騙されないためにも、そしてそんな悲しい世の中にしらないためにも、次の話を読んで、どこに騙されるトリックがあるのかを探して下さい。

3人の大学生が旅行をしておりまして。今夜泊まる宿を探しています。あいにくこの宿も満室でしたが、ようやく空き部屋のある宿を見つけることができました。しかし、たった一つしか空いていなく、3人で1部屋に泊まってもらうしかありませんでした。大学生たちは喜んでお願いしました。その部屋は3人で1部屋15000円で泊まれるそうです。

料金は前払いということで、3人は1人5000円ずつ出し合ってその部屋に泊まることにしました。会計が終わり、3人は部屋に案内され旅の疲れを癒すことにしました。

この宿の支配人はとても心優しい人で「1つの部屋に3人もとまってもらうのは気の毒だ。あの部屋はちょっと汚れているし、10000円で泊まってもらう。」と、召使いに5000円を大学生たちに返してもらうように頼みました。

5000円を受け取った召使いは思いました。

「5000円を返してもらっても、3人で分けられないじゃん。だったら、俺が2000円もらっておけば、残りの3000円になる。だったら、1人1000円もらえて困ることもないな。」と、勝手に2000円を自分のポケットに入れて、大学生に3000円を返したのです。

…さて、話はここまでですが、ここで手元にあるお金の合計について考えてみましょう。

大学生たちは1人5000円ずつ、合計15000円を宿主に支払った。支配人は5000円を召使いに持って行ってもらった。召使いは2000円を自分のポケットに、残りの3000円を大学生たちに返した。大学生たちは1000円ずつ戻ってきたことになるので、結局1人4000円で宿泊したことになる。

ということは、 $4000円 \times 3 = 12000円$ 。

また、召使いのポケットにある2000円を足して14000円…。

あれ？はじめ15000円を払ったはずなのに、話の終わりには14000円になっている…？

1000円はどこに行った？だれかが盗んだのか？？

考え方や計算・答えを書いてみましょう。

§ 4 家庭環境と数学

書店にいくと「子供を東大に入れるには？」とか[医大生に入れるための子育て]などのタイトルの本が目飛び込んできました。やはり「東大」や「医学生」なんてのは花形スターなのでしょうか。しかし「数学者になるための子育て」なんてのが見当たりません…。

さて、そんな数学者たちがどのような家庭環境に育ったのかをちょっと考えてみましょう。そのために「父親の職業」をまとめたのが下の表です。

数学者	国籍	父親の職業
フェルマー	フランス	町の副参事官
アーベル	ノルウェー	牧師
デカルト	フランス	貴族
ケプラー	ドイツ	酒場の主
カルダーノ	イタリア	弁護士
フィボナッチ	イタリア	貿易商
アルキメデス	ギリシア	天文学者
パスカル	フランス	税務高等法院
ニュートン	イギリス	荘園の領主
ライプニッツ	ドイツ	大学の教授
オイラー	スイス	牧師
ターレス	ギリシア	商人
ガウス	ドイツ	石切り職人
ガロア	フランス	寮生学校の校長
リーマン	ドイツ	牧師
カントール	デンマーク	商人
ヒルベルト	ポーランド	法律家
アインシュタイン	ドイツ	工場経営

商人の子として生まれたら交易などで外国に出かけ見聞を広められたからなのでしょうか。また、教会には蔵書が多かったことも良い環境となったのだと考えられます。

昔の環境を考えるならば、調べられる本がある環境、独学できる環境がこのような結果につながっているのではないかと考えられます。専門書のある本屋が身近にあり、インターネットも手軽にできるという、すばらしい環境にある現代の皆さんはどう考えますか？

< 参考文献・引用文献 >

1. おもしろ数学～この謎が解けますか？ 著：仲田紀夫 出版：三笠書房
2. 数学通になる本著：中宮寺薫 出版：オーエス出版社
3. 思考をつける数学 著：深川和久 出版：永岡書店

