表題：さいころを4回投げたとき出た目の和が素数である確率

副題：第39回北海道高等学校数学コンテスト問題3の問題作りについて

元札幌啓北商業高等学校　教諭　佐々木光憲

## 1 数学コンテストの現況

1988年に始まった「北海道高等学校数学コンテスト」も今年1月で第42回を迎えました。今年も全道17校（旭川藤星、旭川東、岩見沢東、S高校、帯広柏葉、北見北斗、釧路湖陵、国際情報、札幌開成、札幌北、札幌西陵、札幌創成、札幌西、札幌東、札幌平岸、札幌南、立命館慶祥）から183名の申込があり、すでに答案も集まり採点が行われています。今年も5問の問題を3時間半かけて解く長丁場に多くの高校生が挑戦してくれたことをうれしく思います。

北海道高等学校数学コンテストは下のような狙いを持って今まで行われてきました。過去にのべ6000名以上の道内の中学・高校生が受けてくれています。現在のコンテスト事務局には高校時代コンテストを受けた先生も何人もいらっしゃいます。

① 数学の問題を解く楽しみ、じっくり取り組む充実感を受験者に味わってもらう
② 高校の数学、受験の数学にない数学の奥深さ、面白さを感じてもらう
③ コンテストの上位者には表彰式で表彰することによってより励みになる
④ 数学オリンピックなどへの参加のきっかけにする

出題内容としては高校1年終了程度、数Ｉ＋数Ａを考えています。難しい問題もありますが数学好きの生徒であれば途中までは手が付けられるような問題も含めるように考えています。

2020年のコロナ禍以降、コンテストの公開会場（札幌地域）ができなくなり成績上位者が集まる3月の表彰式も行っておりません。また後援して頂いている会社の減少により財政的にも厳しくなり、昨年初めてクラウドファンディングによる一般の方からの支援をいただきました。何とか今後も経費の圧縮なども行いながら続けて行けるよう努力していきたいと思います。

## 2 数学コンテストの歴史と問題作り、表彰式の役割

コンテストのはじまりについては数実研のサイト数学のいずみの著者別索引から　佐々木光憲 **「北海道高等学校数学コンテスト２２年目の挑戦」**及び**「第30回北海道高等学校数学コンテスト」**の中に詳しく書いてありますのでそちらをご覧いただきたいと思います。北海道のコンテスト開始のときはまだ日本数学オリンピックも始まっていませんでした。日本数学オリンピックが始まる際に先駆的な試みとして北海道のコンテストについて当時数学オリンピックの準備委員をされていた秋山仁先生から問い合わせがありそこから秋山先生とのご縁が出来たのも懐かしい思い出です。

また初めて日本が国際数学オリンピックに選手を送った平成3年の北京大会で銅メダルを獲得した札幌北高校の伊山修さん（現在東京大学大学院数理科学研究科教授をされています）が第8回の北海道数学コンテストの最優秀賞だったことも初期のコンテストにおけるうれしい出来事でした。

最初期（第4回まで）を除くと数学コンテストの問題は5問で各40点満点、計200点満点で行わ

れています。コンテストの問題は当初は北大などの大学の先生のご協力をいただいていましたが現在では代数解析研究部の皆さんの持ち寄った問題をベースに難易度や問題の表現、枝問の作成など検討して作られています。コンテストの問題は大学・大学院レベルの数学の内容の中から高校生にも解けるもの、学校以外の数学の問題集（海外の問題を含む）を参考にしたもの、日常の現象から数学的発想で解けそうなものを探したもの、また我々が生徒に数学を教えている中でちょっと拡張して考えると数学の奥深さが分かるようなものなど様々なものがありますが、今回は私が第39回の数学コンテストに出題した問題について問題作りと採点について話したいと思います。

第38回から表彰式がなくなってこの第39回のときも成績上位者による表彰式はありませんでした。

表彰式では表彰のあとの懇談会で問題出題者からは問題の背景や多かった考え方のほかに解答例と違うユニークな答案へのコメントなどをいうことができます。一方入賞者も問題の感想、意見をいいます。問題が易しいとか難しいとかだけでなく最初はこのように考えたけどこの方法で試してみた、中には時間切れで解けなかったのでくやしくて家に帰ってから考えたら解けたなどという生徒もいました。表彰式での出題者と受験者との交流というのもなかなか貴重な機会であると思います。実際学校現場では採点していて自分の予測していないやり方で解いている答案は滅多にありません。普段教えていない生徒だからこそ生徒の発想を見て評価しなければならない、特に違う発想でも最後までできていれば当然正解ですが、途中で終わっているものや不備があるものをどう評価するか。これも難しいですが楽しく貴重な機会です。

表彰式については出題者と参加者の交流だけでなく、参加者どうしの交流ができる貴重な場でもあります。数学コンテストでも別の学校の参加者どうしが表彰式で知り合ってその後も手紙のやりとりをしたり、卒業後の大学で再会したりしたケースもあるようです。表彰式で「数学の話をできる友達が自分の学校にはいないので数学好きどうし話ができるのは楽しい」という意見もありました。数学以外の話になりますが化学オリンピック、地学オリンピックなどでの国際大会に向けての合宿で「生まれてからこんなに自分の好きな分野の話ができる人に会ったことはなかった、すごく楽しかった」という参加者もいたそうです。

今ではネットやSNSなどで自分の好きな分野、興味のある事柄について調べたりすることのハードルはかなり低くなりました。ただ同じ分野に興味を持つ仲間を見つけるのは相変わらず難しいのではないでしょうか。スポーツの分野でその競技に情熱を燃やすどうしが競い合う大会があるのなら、科学の分野でも競い合い真理を探求する舞台があってもよいのではとの思いは今でも変わりません。

$\boxed{3}$ 第 39 回北海道高等学校数学コンテストの問題３とは

$\boxed{\text{問題}}$素数とは正の整数で，正の約数が１とそれ自身の２個だけであるような整数である（１は素数に含めない）．たとえば１から６までの整数のうち素数は２，３，５の３個である．

（１）解答用紙の１から 30 までの整数の表のうち素数を○で囲みなさい（説明は不要）．

（２）１ から ６ までの数字が書かれたさいころがある．またどの目が出るかは同程度に確からしいとする．このさいころを ２ 回投げて出た目の和とその確率を調べ解答用紙の表を完成させ，この表を用いて目の和が素数である確率を求めなさい．

（３）２回さいころを投げたときの目の和を６で割ったとき，余りが１の確率，２の確率，３の確率，４の確率，５の確率，余り０の（割り切れる）確率をそれぞれ求めなさい．

また、３回さいころを投げたときの目の和を６で割ったとき，余りが１の確率，２の確率，３の確率，４の確率，５の確率，余り ０の（割り切れる）確率はすべて等しいことを説明しなさい．

（４）さいころを３回投げて出た目の和が素数となる確率を求めなさい．

（５）さいころを５回投げて出た目の和が素数となる確率を求めなさい．なおさいころを５回投げたときの目の和を６で割ったとき，余りが１の確率，２の確率，３の確率，４の確率，５の確率，余り ０の（割り切れる）確率はすべて等しいことを用いてもよい．

$\boxed{\text{解答用紙}}$

（１）１から 30 までの整数の表・・・素数に○をつける

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | ③ | 4 | ⑤ | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

（２）　　　　　さいころを２回投げたときの出た目の和とその確率

| 目の和 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | | | | | | | | | | | |

・・・よってさいころを２回投げて出た目の和が素数である確率は　　　である

（3）　さいころを２回投げたときの出た目の和を６で割ったときの余りとその確率

| 目の和を６で割ったときの余り | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | | | | | | |

（4）参考に使ってもよい（３回投げた場合）

| 余1 | 余2 | 余3 | 余4 | 余5 | 余０ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

・・・さいころを３回投げたとき目の和が素数である確率は　　　　　である

（5）参考に使ってもよい（５回投げた場合）

| 余1 | 余2 | 余3 | 余4 | 余5 | 余０ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

・・・さいころを５回投げたとき目の和が素数である確率は　　　　　である

補足

コンテスト冊子の着眼点にも書きましたが、今回の問題の最初の発想はさいころをｎ回（ｎは正の整数）投げたときの目の和が素数となる確率はｎを大きくしていくと単調減少するのではないかという予想を立てるところから始まりました（この予想は成り立たないことが判明しました）。その途中で４回投げたときに出た目の和が素数となる確率が意外にきれいな数値になることに気づいて今回の出題のきっかけになりました。

　今回取り上げるコンテストの問題のポイントを一行でいえば以下になります。

$\boxed{\text{さいころを4回投げたとき出た目の和が素数である確率を求めなさい}}$ 簡単ですか？

さいころは1から6までの目が出る確率が等しい普通さいころを考えています。

1回投げて出た目が素数なのは出た目が2，3，5のときなので確率は $\frac{3}{6}=\boxed{\frac{1}{2}}$

2回投げて出た目の和が素数なのは目の和が2，3，5，7，11のときなので解答（2）の表を完成

させれば確率は$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\boxed{\frac{15}{36}}=\boxed{\frac{5}{12}}$　　ここまではよいとして

3回投げたとき出た目の和が素数である確率は？・・・この問題はネットにも出ていて2018年東京都の公務員採用試験（ひょっとしたら教員採用試験も）の問題だったようです。東京都ⅠB2018~素数になる確率~（数的処理／数的推理／確率）（youtube.com）

Youtubeの説明も悪くはないと思いますが、4回投げたときの目の和が素数の確率、まして5回投げたときの目の和が素数の確率に発展させていくともっと違う考え方の方がよいと思います。

コンテスト問題3に戻りましょう、さいころを3回投げたときの目の和は3から18までですがその中で素数は3，5，7，11，13，17です。この6個の素数のうち最初の3以外はいずれも6で割ったときの余りが1または5の場合です。6の倍数（余り0）は素数でありませんし2以外の6で割って余り2の整数は偶数なので素数ではありません。3以外の6で割って余り3の数は3の倍数なので素数ではないし、6で割って余り4の整数も素数ではない。（1）の表の一行目の2，3，5以外で素数が現れるのは余り1のときと、余り5のときのみです。ただし余り1のとき、余り5のときすべて素数というわけではありませんが。

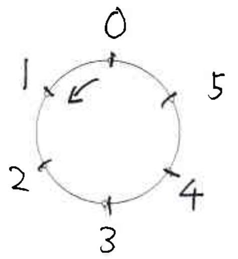
ここでさいころを2回投げたときの表に戻りましょう。目の和は2から12までありますがそれぞれの確率は等しいわけではありません。ただし6で割ったときの余りで考えると確率はすべて同じとなります。

6で割って余り0なのは和が6と12のときで合わせると$\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$、余り1なのは和が7のときのみで$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$、余り2なのは和が2と8のときで合わせると$\frac{1}{36}+\frac{5}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$、余り3なのは和が3と9のときで合わせると$\frac{2}{36}+\frac{4}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$、以下同様に和が4のときと和が5のときも確率は$\frac{1}{6}$となります。

では3回投げた場合の確率はどうなるでしょうか、（2）と同じように和が3から18までの表を作ってから示すことも可能ですがけっこう大変です。まして4回投げたときの表、さらに5回投げたときの表を作るのはもっと大変です。和を6で割った余りを用いて考えるともっと簡単に説明できます。

イメージとして0から6までの数字の入ったスゴロクを考えてください。1回さいころを投げて目の数だけ進むと考えるとどの数字の位置に行く確率もすべて等しく$\frac{1}{6}$です。2回目投げたときも1回目投げたときの位置がどこであってもそれぞれ移動する位置の確率は$\frac{1}{6}$なのでどの位置に行く確率も等しくなります。さいころを1回投げたときに6カ所の点に存在する確率はすべて同じであれば2回目以降も確率はすべて同じになります（正式には数Bで学ぶ数学的帰納法で説明する必要があります）

さてそれでは３回投げたときの出た目の和が素数となる確率を求めましょう




| | 余1 | 余2 | 余3 | 余4 | 余5 | 余0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3○ | 4 | ⑤ | 6 |
| | ⑦ | 8 | 9 | 10 | ⑪ | 12 |
| | ⑬ | 14 | 15 | 16 | ⑰ | 18 |
| 確率 | 1/6 | | △ | | 1/6 | |

３回さいころを投げたので目の和は３から 18 までであるがそのうち素数になるのは余り１のとき
と余り５のとき全部と余り３で和が３になるときであるが和が３のときは出た目が 1,1, 1 のときなので

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{216}$よって　３回投げたとき出た目の和が素数になる確率は$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{216}=\frac{73}{216}$

では４回投げたときの出た目の和が素数となる確率はどうなるかというと

| | 余1 | 余2 | 余3 | 余4 | 余5 | 余 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 4 | ⑤ | 6 |
| | ⑦ | 8 | 9 | 10 | ⑪ | 12 |
| | ⑬ | 14 | 15 | 16 | ⑰ | 18 |
| | ⑲ | 20 | 21 | 22 | ㉓ | 24 |
| 確率 | 1/6 | | | | 1/6 | |

４回さいころを投げたので目の和は４から 24 までとなり和が素数になるのは余り１のときと

余り５のときなので　４回投げたとき出た目の和が素数となる確率は$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$（やさしい？）

５回投げたときの出た目の和が素数となる確率は・・・これは結構大変かも

| | 余1 | 余2 | 余3 | 余 4 | 余5 | 余 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | ⑤ | 6 |
| | ⑦ | 8 | 9 | 10 | ⑪ | 12 |
| | ⑬ | 14 | 15 | 16 | ⑰ | 18 |
| | ⑲ | 20 | 21 | 22 | ㉓ | 24 |
| | 25 | 26 | 27 | 28 | ㉙ | 30 |
| 確率 | △ | | | | 1/6 | |

５回さいころを投げたで目の和は５から 30 までとなるが和が素数になるのは余り５のとき全部と
余り１のときで和が 25 のときを除いたものなので　和が 25 になる場合(1,6,6,6,6)と(2,5,6,6,6)
(3,4,6,6,6)と(3,5,5,6,6)と(4,4,5,6,6)と(4,5,5,5,6)と(5,5, 5,5,5)の場合を除くと

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6^5}\left(\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{3!}+1\right)\quad=\frac{1}{3}-\frac{5+20+20+30+30+20+1}{7776}=\frac{137}{432}$$

## $\boxed{4}$ 採点を終えてより

さて、問題3を見て皆さんはどのような感想を持たれたでしょうか。出題者の意図を説明します。

（1）素数に○をつけるだけなので易しいと思いますが○をつけるときに素数がどの位置にあるかを見ておいてほしい。最初の1行以外では素数は6で割った余り1のところと余り5のところにしかないことに気づいてほしいです。整数を割った数の余りで分類する考え方は剰余類分類ともいいます。採点していてもほとんど正解でした。

（2）2回さいころを投げて出た目がそれぞれ2，3，4，・・・12となる確率を求めて表を作るという問題で前半の表作るところまでの正解率は 97%でした。さすがコンテストを受ける人たちだなと思いました。後半の目の和が素数の確率では分数の足し算で間違える人がいました。よく見ると表の確率を約分していた人の方が間違える率が高かったように思います。センター試験のように穴埋め式の試験であれば約分していないと減点されるかもしれませんが途中の式で約分していないからといって減点されることはないと思います（最後の結果は約分してほしいですが）。正解率は71%でした。

（3）せっかく（2）で和が2から12までの表を作ったのでそれを利用してほしかったのですが丁寧に36通り調べて書いてくれた人もいました。枝問をつけるということはその部分を次の設問に生かしてほしいということです。前半の正解率は91%でした。一方後半の3回投げたときの目の和を6で割ったときの余りで分類すると確率が等しいことの説明は説明不十分と言わざるを得ない答案も多かったです。「6通りあるからすべて同じ」とか「2回で同じだったら3回でも同じ」というようないささか乱暴な説明が多かったように思いました。ポイントはn回目投げたあとの余りが何であっても次のさいころの結果によって起こる余りの変化が同様に確からしいこと（数学的帰納法の考え方になりますが）を説明してほしかったのです。正解率は53%でした。

（4）からがこの問題のメインゾーンです。本稿$\boxed{3}$で書いたように余りの考えを使うと素数になる場所は限られるのでそれほど面倒ではないのですが、余りの考えを使った生徒は小数で、（2）と同様に和が3から18までの表を作って計算した人の方が多かったです。それでも最後までできていれば正解としましたがこのやり方で4回のとき、5回のときを考えると大変です。正解率は58%でした。

（5）これはかなり面倒な計算になります。やはり和が5から30までの表を作った人もいましたが途中で挫折した人が多かったです。和が素数になるのが余り1のときと余り5のときだけなのですが、和が25のときは素数にならないのでその分を除かなければなりません。正解率は約10%でしたがよくがんばって計算したと思います。途中まで計算した分についても配点しましたので問題3全体の平均点は40点中の28.4点でしたが受験者215名中満点が15名いたことは賞賛してもよいことだと思います。