

3点通過による2次曲線の決定問題のレシピ

市立札幌旭丘高等学校 菅原 満

0 はじめに

本レポートは「2次曲線の決定問題」, その中で特に「3点通過」の条件の使い方についてまとめたものです。普段, 私が教材研究に際して気を付けていることに

- (1) 数学的に正しいか
 (2) 数学教育的に適切か ~ 対象生徒に対し内容・時期が指導段階を考慮して適切か

という2つの視点があります。

次の「絶対値不等式の解法」をあなたはどのように考えますか。

(参考) (a) $|2x-3| < x+1$ を解け

$$\text{解) } -(x+1) < 2x-3 < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+1) < 2x-3 \\ 2x-3 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < x \\ x < 4 \end{cases} \therefore \frac{2}{3} < x < 4$$

(b) $|2x-3| > x+1$ を解け

$$\text{解) } 2x-3 < -(x+1) \text{ または } x+1 < 2x-3 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3} \text{ または } 4 < x$$

いずれも,

$$(I) |A| < B \Leftrightarrow -B < A < B \quad (II) |A| > B \Leftrightarrow A < -B \text{ or } B < A \quad (III) |A| = B \Leftrightarrow A = \pm B$$

次の公式を使った解法です。

この解法について, 小栗是徳先生が「絶対値不等式の扱いをめぐって」において数学的に正しいことと, 教育的指導について丁寧に解説してくれています。

小栗先生はこの教材の教育的指導の方針として次のようにまとめられています。

「絶対値の指導目的は何か」

数学教育の目的の1つに, 生徒自身が自ら考えて自分の答えを出すという点がある。絶対値の指導目的は, 絶対値の意味や必要性を理解させ, その使い方では絶対値についての場合分けをきちんとさせることである。途中を無視して答えのみを出させることは, 目的と手段の履き違えである。

実際, $|x| = \pm x$ という指導を受けた生徒の中には, $|2| = \pm 2$, $|-2| = \pm(-2)$, という誤用がよくみられる。

絶対値が出てくると, 生徒は理解しにくいのですぐ公式に頼って機械的に解こうとしてしまう。そうではなく, 時間をかけてこれを数学的にきちんと指導するのが我々数学教師の責任ではないか。

単純に「こうすればいい」というような結論は出ないかもしれません。しかし, 教材研究において, この2つの視点を忘れずに行う姿勢は大切なことだと思います。

数学的に正しいことが, 教育現場で必ずしも正しいとは言えない場合があります。また, 同じ内容でも対象の生徒の状況によっても変わってくるでしょう。目の前の生徒の様子とその先を見ることを忘れずに教材開発にあたりたいものです。

1. 数学的系統性を意識した指導(1) ～ 縦に繋げる

(基本) 原点(0, 0)を通り傾き m の直線 $y = mx \cdots \textcircled{1} \Rightarrow$ 点(p, q)を通り傾き m の直線 $y - q = m(x - p) \cdots \textcircled{2}$

変数を2個もつ $y = mx + n$ いわゆる直線の標準形(※ x 軸に垂直なものを除く)において, 点(p, q)を通る条件を使って変数を1個に減らした置き方が② $y - q = m(x - p)$ とみることができます。

「通る点(p, q)を使って, 求める図形の方程式の変数を1つ減らす」

ということも, 本質的理解への大切な道だと思います。

点(p, q)を通る条件で, 変数を1個減らす

(例1) 直線 $y = mx + n \Rightarrow y - q = m(x - p)$

(例2) 直線 $ax + by + c = 0 \Rightarrow a(x - p) + b(y - q) = 0$

(例3) 放物線 $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y - q = a(x - p)^2 + b(x - p)$

(例4) 円 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow (x - p)^2 + (y - q)^2 + a(x - p) + b(y - q) = 0$

最初に書いた通り, これは単に平行移動の考えを用いて求める図形の方程式を表しただけです。しかしながら, (例3), (例4) のような使い方は, これまでほとんど見たことがありません。

前述した「この単元で何を学習するのか」という教育的視点を重視して考えると「3元連立1次方程式を解く」ことが大切な場面では, この教材を展開することは不適切となるでしょう。しかし, 演習を進めているときにはこのような展開もあっていいのではないかと考えます。

私は(例3)の形を教科通信「Do Mathematics」を通して生徒に紹介しています。

参考までに(例4)を用いた解答を示しておきます。生徒に2つの解法のメリット・デメリットを比較させてみることも面白いかもしれません

(問) 3点 $A(-1, 7)$, $B(2, -2)$, $C(6, 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

解) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおくと

A を通るから $(-1)^2 + 7^2 - a + 7b + c = 0$ より $-a + 7b + c = -50 \cdots \textcircled{1}$

B を通るから $2^2 + (-2)^2 + 2a - 2b + c = 0$ より $2a - 2b + c = -8 \cdots \textcircled{2}$

C を通るから $6^2 + 6a + c = 0$ より $6a + c = -36 \cdots \textcircled{3}$

これを解いて, $a = -4$, $b = -6$, $c = -12$ より $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

別解) C(6, 0) を通るから $(x - 6)^2 + y^2 + a(x - 6) + by = 0$ とおける

A を通るから $(-1 - 6)^2 + 7^2 + a(-1 - 6) + b \cdot 7 = 0$ より $-a + b = -14 \cdots \textcircled{1}$

B[を通るから $(2 - 6)^2 + (-2)^2 + a(2 - 6) + b \cdot (-2) = 0$ より $-2a - b = -10 \cdots \textcircled{2}$

①, ②より $a = 8$, $b = -6$

従って, $(x - 6)^2 + y^2 + 8(x - 6) - 6y = 0$ より $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

2. 数学的系統性を意識した指導(2) ～ 横に展開する

図形と方程式における内容を、整式の分野に広げてみましょう。

ここでは、剰余の定理を眺めてみましょう。

(例5) 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 3, $x+3$ で割ると余りが -7 である。整式 $P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解1) $P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x) = (x-2)(x+3) \cdot Q(x) + ax + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

$$\text{剰余の定理より } P(2) = 2a + b = 3 \quad \text{かつ} \quad P(-3) = -3a + b = -7$$

$$\text{従って, } a = 2, b = -1 \text{ だから 求める余りは } 2x - 1$$

教科書にある標準的な解答です。剰余の定理を習うときは、まずこの解法をマスターしてもらいたい。

しかし、学習が進み図形と方程式での「通る点から変数を減らす」考えに触れたときには、次の解法も並べてその比較から類似性を類推できるようにする。

解2) $P(x)$ を $x-2$ で割ると 3 余るから、 $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りは $a(x-2)+3$ とおける。

$$\text{よって, } P(x) = (x-2)(x+3) \cdot Q(x) + a(x-2) + 3 \quad (a \text{ は定数})$$

$$P(-3) = -5a + 3 = -7 \text{ より } a = 2 \text{ だから 求める余りは } 2(x-2) + 3 = 2x - 1$$

(例6) 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割れば 7 余り, x^2+1 で割れば $3x-9$ 余る。この整式 $P(x)$ を $(x-2)(x^2+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

3次式で割った余りですから2次以下の整式 ax^2+bx+c になります。

標準的な解法と、本レポートの考え方2通り考えてみましょう。

標準解) 余りは ax^2+bx+c とおけるから

$$P(x) = (x-2)(x^2+1) \cdot Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} P(2) = 4a + 2b + c = 7 \\ P(i) = -a + bi + c = 3i - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 7 \\ c - a + bi = -9 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 7 \\ c - a = -9 \\ b = 3 \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases}$$

$$\text{従って 求める余りは } 2x^2 + 3x - 7$$

その1) x^2+1 で割った余りが $3x-9$ になるから 余りは $a(x^2+1)+3x-9$ とおける

$$P(x) = (x-2)(x^2+1) \cdot Q(x) + a(x^2+1) + 3x - 9 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$P(2) = 5a + 3 \cdot 2 - 9 = 5a - 3 = 7 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{従って, 求める余りは } 2(x^2+1) + 3x - 9 = 2x^2 + 3x - 7$$

余りのおき方はもう一通りあるが、未知数の個数に着目すると(その1)の方が簡便であることは明らかです。

下記の場合は(標準解)と同様に $x^2+1=0$ を満たす $x = \pm i$ から $P(i)$ を利用することになります。

その2) $x-2$ で割った余りが 7 になるから 余りは $a(x-2)^2 + b(x-2) + 7$ とおける

$$P(x) = (x-2)(x^2+1) \cdot Q(x) + a(x-2)^2 + b(x-2) + 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

…………… 以上、日々の教材研究のひとコマでした。

ちょっと数学したい人へ・・・

■□■ 2次関数の決定問題 ～ 3点を通過する場合 ■□■

「3点を通る2次関数を求めよ」という問題について考えてみよう。まずは、例題を・・・

■例■ グラフが3点 $(-1, 1)$, $(-2, -6)$, $(3, 9)$ を通るような2次関数を求めよ。

解答) 求める2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおくと3点を通るから代入して

$$\begin{cases} a - b + c = 1 & \dots \text{①} \\ 4a - 2b + c = -6 & \dots \text{②} \\ 9a + 3b + c = 9 & \dots \text{③} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{より } 3a - b = -7 \quad \dots \text{④}$$

$$\text{③} - \text{②} \text{より } 5a + 5b = 15 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 3 \quad \dots \text{⑤}$$

$$\text{④}, \text{⑤} \text{を連立して解くと } a = -1, b = 4$$

$$\text{①より } c = 6$$

$$\text{従って, 求める2次関数は } y = -x^2 + 4x + 6$$

ごく一般的な解答ですね。代入の方法を工夫してみましょう。

2次関数 $y = a(x-p)^2 + b(x-p) + q \dots \text{①}$ を考えてみましょう。ちょっと面白い形をしていますね。

Question_1 ①は点 (p, q) を通ることを示せ。

$$x = p \text{ を代入すると } y = a(\underline{p} - \underline{p})^2 + b(\underline{p} - \underline{p}) + q = q \text{ となるから 点 } (p, q) \text{ を通る.}$$

従って, $y = a(x-p)^2 + b(x-p) + q$ は, 確かにグラフが点 (p, q) を通る2次関数ということを示せました。

グラフが点 (p, q) を通る2次関数は $y = a(x - \underline{p})^2 + b(x - \underline{p}) + \underline{q}$ とおけ

これを使って(例)の問題を解いてみましょう。

別解) 求める2次関数は $(-1, 1)$ を通るから, $y = a(x+1)^2 + b(x+1) + 1$ とおける

$$(-2, -6) \text{ を通るから } -6 = a - b + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - b = -7 \quad \dots \text{①}$$

$$(3, 9) \text{ を通るから } 9 = 16a + 4b + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + b = 2 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{より } 5a = -5 \quad \therefore \quad a = -1 \quad \text{①へ代入して } b = 6$$

$$\text{従って, 求める2次関数は } y = -(x+1)^2 + 6(x+1) + 1 \quad \therefore \quad y = -x^2 + 4x + 6$$

求める2次関数の形で工夫をしたため計算量が減りましたね。知恵を使うと力を節約できます。では、教科書の問題をこの方法で解いてみましょう。

(p87 例題8) 3点 $(1, 6)$, $(-2, -9)$, $(4, 3)$ を通る2次関数を求めよ。

(p87 問21) 3点 $(-1, -7)$, $(2, -1)$, $(3, -7)$ を通る2次関数を求めよ。