第７０回数実研 兼 第１５回数実研夏季セミナー

＝＝ 新高等学校学習指導要領実施へ向けて ＝＝

展望 「数学A~整数の性質」（その1）

札幌藻岩高等学校　菅原　満

■■■ は じ め に　～　新カリで何が変わったの？ ■■■

平成 21 年 3 月 9 日「高等学校学習指導要領」は告示された．また，それに呼応するべく解説・数学編が文部科学省から 7 月に発表された．概観すると「目標の改善点」には，次の 5 点の記述がある，

(ｱ) “目的意識をもった主体的活動”すなわち,“数学的活動”を一層充実させる
(ｲ) 知識の“体系的理解”
(ｳ) “数学的に考察し表現する能力”を高める
(ｴ) “数学のよさ”
(ｵ) “数学的論拠に基づいて判断する態度”を育てる

これらの改善された点は，以下のような具体的内容として目標達成に寄与していると考えられる．

(ｱ)に対して　⇒　①数学Ⅰ，数学Ａにおける“課題学習”の設定

(ｲ)に対して　⇒　②数学としての学問体系の再構成

ex./ “条件付き確率“を数Ａへ,”期待値，二項定理“を数Ｂへ，図形の性質に空間新設など

(ｳ)(ｵ)に対して⇒　③数Ⅰにおける“データの分析“の新設および①の課題学習新設

(ｴ)に対して　⇒　④新設「課題学習」での解説にある具体的教材例ばかりでなく，
それ以外の解説・数学編の記述に具現化するべき教材の具体的事例が多い．

ex./ ・40 名のクラスから 3 名のクラス代表を選ぶ選挙の当確票数 ←(数Ⅰ・不等式)
・地図上に表された標高差のある 2 点間の距離←（数Ⅰ・図形と計量）
・幅 20cm の金属板を折り曲げての雨どいを作るときの断面積の最大値←（数Ⅰ・二次関数）
・箱ひげ図の説明←（数Ⅰ・データの分析）
・100m 走と走り幅跳びの計測記録から散布図，相関係数を求める←（数Ⅰ・データの分析）
．対数の定義「 $2^x=4$ を満たす実数 x は 2 であるが， $2^x=3$ を満たす実数 x を記号 log を使って $\log_2 3$ と表す.」←（数Ⅱ・対数関数）（※註） $2^{\log_2 3}=3$ を定義とするということ
・１の大きさを１辺とする正５角形の作図←（数Ａ・平面図形）
・正多面体が５種類しかないことのオイラーの定理を用いた証明←（数Ａ・空間図形）
・九去法，油分け算など塵劫記の紹介←（数Ａ・課題学習）
・「確率分布と統計的な推測」の解説
・「数学活用」解説における具体的教材例の列挙

などなど・・・・

本レポートは，数学Ａに新設された「整数の性質」の内容を，
私の勤務する “札幌藻岩高校の生徒に対して行う” ことを前提とした指導の教材シミュレーションである.

今回の改訂から「数学Ａ」は

「（１）場合の数と確率」，　「（２）整数の性質」，　「（３）図形の性質」　＋　「（４）課題学習」

（１）～（３）の３分野からの内容を適宜選択して学習する形となっている．

また，「（４）課題学習」は内容との関連を踏まえ，適切な時期や場面を考慮し，実施に当たっては，一方的に知識を与えるのではなく，数学的活動を一層重視し，

課題の構想・立案 ⇒ 考察・処理 ⇒ 結果を元に過程の再検討　⇒ 課題の再設定

のサイクルで事象を数学化し，考察しその結果を活用することを想定している．

■■■　１．数学Ａの内容選択について　■■■

平成 24 年度から理科・数学のみ先行実施として新カリキュラムがスタートする．

各学校において「数学Ａ」を標準単位の２単位で履修させる場合，上記の３分野のどの内容を選択するかが問題となる．「（１）場合の数と確率」と「（３）図形の性質」は，従前の学習指導要領にも存在したことから，教える側も馴染みのある内容である．

（１）においては“条件付き確率”が復活し，数学的流れからすると妥当と思える．（３）では“”空間図形“が新設されオイラーの多面体定理などを扱うことになるかもしれない．「（２）整数の性質」に関しては，興味はあってもこれまで体系的に教えた経験の蓄積がないため扱い難い印象をもつ．

平成 24 年度入試から公民の 4 単位科目「倫理、政治・経済」新設などセンター試験の動向も気になるところである．「数学Ａ」に関してはこれまでの「数学Ｂ」と同様の選択問題の形式になることが十分予想される．

このため，問題蓄積がない分だけ対策が難しいという点では（１）（３）の内容を選択することが多くなりそうである．

しかしながら，「（２）整数の性質」の内容には，ピタゴラス，ディオファントスに始まる古代ギリシャ時代の人々が興味を抱いてきた離散数学に関する興味深い内容がキラ星のごとく存在する．

この改訂を機会として，整数の面白さを生徒たちに伝えることは，「数学のよさ」を体験するには有意義なことではないだろうか．さて，藻岩高校の生徒たちは，どう感じてくれるでしょう．

■■■　２．整数の性質　■■■

新学習指導要領には「整数の性質」に関しては，以下のように記述されている

(2)　整数の性質

整数の性質についての理解を深め，それを事象の考察に活用できるようにする。

ア　約数と倍数

素因数分解を用いた公約数や公倍数の求め方を理解し，整数に関連した事象を論理的に考察し表現すること。

イ　ユークリッドの互除法

整数の除法の性質に基づいてユークリッドの互除法の仕組みを理解し，それを用いて二つの整数の最大公約数を求めること。また，二元一次不定方程式の解の意味について理解し，簡単な場合についてその整数解を求めること。

ウ　整数の性質の活用

二進法などの仕組みや分数が有限小数又は循環小数で表される仕組みを理解し，整数の性質を事象の考察に活用すること。

＝＝　指導に当たっての留意点　＝＝

(1) 基礎知識の学習を重視しつつも，単なる知識の伝達のみを目的とはしない
(2) 実験的内容を盛り込む．必要に応じ，コンピュータなどで多倍長の数値も扱う工夫をする
(3) 問題解決の過程を通して，「数学のよさ，面白さ，有用さ」を認識させるように工夫する
(4) 対象とする生徒に応じ，教材内容に柔軟性を持たせる．

◆　指導配当時間について　◆

２単位の科目であれば３５×２＝７０単位時間が原則である．ここでは仮に１単位３０単位時間として６０単位時間で指導計画を考えてみた．

「（１）場合の数と確率」は，教材内容に多少の出入りはあるが３３単位時間を配当し，「（３）整数の性質」には２７単位時間と若干（１）への配当時間を多くしてある．

本校での数学Ａの履修対象学年は１年生であり，教材内容にはレディネスの問題から導入に慎重さが求められるものもあり，今後の研究が待たれることになる．

課題学習については，指導過程のなかで適宜，レポート提出課題などの形で教材からの研究・発展内容として与えることも考えられる．

	《新学習指導要領》	■　私　案　■	配当時間	備　　考
数学Ａ（６０単位時間）	（１）場合の数と確率	（１）場合の数と確率	［**33**］	※「集合」・「二項定理」・「期待値」は他科目へ移設
	ア　場合の数	ア　場合の数	ア １４	
	(ｱ)数え上げの原則	(ｱ)数え上げの原則	４	
	(ｲ)順列・組合せ	(ｲ)順列・組合せ	１０	
	イ　確率	イ　確率	イ １４	
	(ｱ)確率とその基本的な法則	(ｱ)確率とその基本的な法則	４	
	(ｲ)独立な試行と確率	(ｲ)独立な試行と確率	５	
	(ｳ)条件付き確率	(ｳ)条件付き確率	５	※数Ｂより移設「条件付き確率」
		■＝＝　課題学習　＝＝	■（５）	
	（２）整数の性質	（２）整数の性質	［**27**］	※新設
	ア　約数と倍数	ア　約数と倍数	ア ６	※十進 Basic，Mathematica の利用
		(ｱ)除法の原理	２	→ｴﾗﾄｽﾃﾈｽの篩
		(ｲ)素因数分解，約数の個数	４	→完全数
	イ　ユークリッドの互除法	イ　ユークリッドの互除法	イ １１	
		(ｱ)互除法の原理	２	※倍数の判定法
		(ｲ)合同式	４	※剰余系
		(ｳ)二元一次不定方程式	５	※１次合同式との関連
	ウ　整数の性質の活用	ウ　整数の性質の活用	ウ ６	
		(ｱ) n 進法	２	※分銅の問題→2 進法，3 進法
		(ｲ)循環小数（$1/n$）	４	※鳩の巣原理
		■＝＝　課題学習　＝＝	■（４）	※n 進法表示と 循環小数

■■■　第２節　整数の性質 ■■■

2-1　約数と倍数

2-1-1 除法の原理

整数の和，差，および積は整数となるが商については，常に整数になるとは限らない．
以下の内容は，各々具体例を生徒に考えさせながら定着を図ることとする．

Item_1 **《約数と倍数》** 2つの整数 a ，b（$b\neq 0$）に対して商 $\frac{a}{b}$ が整数となるとき，即ち $a=bq$ となる整数 q が存在するとき　「b は a の**約数**である」といい，「a は b の**倍数**である」という

⇒　この定義は分かってくれるでしょう．

Item_2 **《除法の原理》** 2つの整数 a ，b（$b>0$）に対して，

$a=qb+r$ ，$0\leqq r<b$　を 満たす整数 q，r が ただ1組存在する．

※このとき「r は b を法としての a の最小正剰余」という．

⇒ $b=13$ とすると，$a=62$ のとき，　$q=5$　，$r=7$　（※ $62=5\times 13+7$）

$a=-38$ のとき，$q=-3$　，$r=1$　（※ $-38=-3\times 13+1$）

※ここでは（余り＝０）のときは，割り切れることも付け加えておこう．そのときに $a=qb$ と表され，q，b は a の 約数になっていることも言っておきたい

Item_3 **《最小公倍数(L.C.M)と最大公約数(G.C.M)》** 2つ以上の整数 a，b，c，…に対し，共通な倍数を公倍数という．0は常に公倍数である．0を除いて（絶対値が）最小のものを**最小公倍数**という．
2つ以上の整数 a，b，c，…に対し，共通な約数を公約数という，1は公約数である．
公約数で（絶対値が）最大のものを**最大公約数**という．

※「**互いに素**」～ 2つの整数 a，b の最大公約数が1であるとき２数は**互いに素**であるという

⇒　難しく言葉を定義すると，数学的内容がうまくイメージできない生徒がいるようです．
ここは，あせらずに具体的事例を多く挙げながら理解と定着を図りましょう．
※ついでに分数計算における，以下のことも言っておきたい

最大公約数 ⇒ 分子・分母を**約分**するときに使う
最小公倍数 ⇒ 分母が異なる分数を**通分**するときの共通分母として使う

Try_1　次の2数の公約数を書き出し，最大公約数を求めよ．

(1) ２０　，４２

１２	1，2，
２４	1，2，

最大公約数は_______

（２）９０　，１０８

９０	1，2，
１０８	1，2，

最大公約数は_______

⇒ ここでは，まずは実際に割り算させたい．そのうえで小・中学校で習った方法でもOKだが，
次に示す素因数分解を使った方法は後述（*Try_4*）．※(1) $20=2^2\times 5^1$，　$42=2^1\times 3^1\times 7^1$

2-1-2 素因数分解と約数の個数

素数については小学校５年生のときに初出のはずである．生徒に聞いてみるのも大切である．
また，「１」が素数に含まれるかも，ぜひ生徒に聞いてみることにしよう．大丈夫かな？

Item_4 **《素　数》** 1 とその数自身の 2 つの数によってしか割り切れない数を**素数**という.

《素因数分解の一意性》自然数は素数の積に，ただ一通りに表すことができる

どの数が素数か，実際に調べさてみたいものです．実際に篩（ふるい）にかけてもらいましょう．

Try_2 １から１００までの自然数の中にある素数を次の手順で，探し出しましょう.

「素数は 1 とその数自身以外に約数をもたない」ことから，

(ｱ) ２に○をつけて，２の倍数にすべて×印をつける

(ｲ) ３に○をつけて，３の倍数にすべて×印をつける

・・・・・・・・・

以下，この手順を繰り返して○印のついた数が晴れて素数となります．この操作を「エラトステネスの篩(ふるい)」といいます．まず，やってみましょう.

Q1. １から１００までの素数を探し出しなさい

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

＝＝＝ 数式処理ソフトについて ＝＝＝

★数式処理ｿﾌﾄ *Mathematica* などには，多くの整数を扱うツールが揃っている，余裕があれば生徒たちに実験させながら進めたいところです.

FactorInteger[*n*] : *n* を素因数分解 , Divisors[*n*] : *n* の約数を表示

DivisorSigma[0 , *n*] : *n* の約数の個数 , Prime[*x*] : *x* 番目の素数を表示

PrimeQ[*x*] : *x* が素数であるか判断 , GCD[*x* , *y*] : *x* と *y* の最大公約数

LCM[*x* , *y*] : *x* と *y* の最小公倍数

★フリーソフトの数式処理ｿﾌﾄでは「Maxima」などもありますが多倍長の数値計算などをさせたいときには不向きです.「UBASIC」は速度も速いのですが，開発された時期が古いため MS-DOS 上での使用が想定されていますので Windows ではいわゆる「DOS 窓」で使用することになります.

ここでは，文教大学の白石和夫先生が作られた

「(仮称)十進 BASIC」 (仮称)十進 BASIC のホームページ http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/

をお勧めします．このソフトは Windows95/98/Me/NT4.0/2000/XP/Visa で動作し，数値計算に関しても，通常は 16 桁ですが，モードを切り替えることで有効数字 1000 桁以下の正確な 10 進数を扱えます.

Mathematica のような便利な関数はありませんが,「エラトステネスの篩」「ユークリッドの互除法」「ピタゴラス数を求める」などを簡単なプログラムを作ることで実験ができます.

Try_3　[*Try_2*] で１から１００まで数に「エラトステネスの篩」を行ったとき，
どの数の倍数まで調べる必要があるでしょうか．また，なぜその数まででよいか理由を
添えて答えよ．

⇒　$\sqrt{100}=10$ まで調べれば OK です．理由は，約数の対称性から導かれます．

Item_5　自然数 N が　$N=a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot a_3^{p_3}\cdot\cdots\cdot a_n^{p_n}$　（a_1 ～ a_n は素数）と素因数分解されるとき
(1) **約数の個数** ～ $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\cdots(p_n+1)$
(2) **約数の総和** ～ $(1+a_1+\cdots+a_1^{p_1})(1+a_2+\cdots+a_2^{p_2})\cdots(1+a_n+\cdots+a_n^{p_n})$

⇒ ここはちょっと解説が必要です．できるだけ具体的な例をあげて説明しましょう．

Try_4　Q1. 次の数を素因数分解せよ
(1) ２５２０　　　(2) ２３７６

Q2.　２５２０ と ２３７６ の最大公約数を G とする．
(1) G を求めよ
(2) G の約数をすべて求めよ．また，全部で約数は何個あるか
(3) G の約数の総和を求めよ．
(4) G の約数のすべて掛けた積を求めよ．積の形でよい．

⇒　(4)　$G=2^3\times3^2=72$　より　$(1\times72)\cdot(2\times36)\cdot(3\times24)\cdot(4\times18)\cdot(6\times12)\cdot(8\times9)=\boxed{72^6}=13931406950$

Try_5　[*Item_5*] から，次のことに関して考えられることを理由をつけて述べよ．
(1) 約数の個数が奇数個となる数は，どんな数か．
(2) １から１００までの整数で約数の個数が偶数個の整数はいくつあるか答えよ

⇒ (1) 自然数 N の約数を小さい順に　$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$　と並べると
$N=a_1\times a_n=a_2\times a_{n-1}=\cdots$　と必ずペアになっている．よって，約数が奇数個となるのは，
ペアが組めない約数 $a_{\frac{1+n}{2}}=\sqrt{N}$　があるときでこのとき N は平方数となる．
※このことは，*Item_5*(1) から
「積 $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\cdots(p_n+1)$ が奇数」　⇔　「p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n がすべて偶数」
からも分かる．
(2) １から１００までの平方数（$1^2,2^2,3^2,\cdots,10^2$）以外の数だから　９０個

Item_6　自然数 a に対して，a の約数の総和を $S(a)$ と表す．このとき，
$S(a)=2a$
となる数 a を**完全数**という．
ex /　６を考えると．６の約数は　1, 2, 3, 6　であるから
６＝１＋２＋３＋６＝２×６　　となり６は完全数である．

Try_6　６より大きい完全数を見つけよ．

⇒ かなり強引ですが，生徒たちは必ずや見つけてくれるでしょう．*Home Work* にしましょう．

Try_7 $a = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1) \quad (n > 1)$ の形で表される数において，

$2^n - 1$ が素数ならば，a は完全数である．

ことが知られています．また，偶数の完全数はこの形に限ります．

n に，値を代入して，*Try_2* で 調べた素数表を使い，４番目の完全数を見つけなさい．

n	$2^n - 1$	a
2	$2^2 - 1 = 3$	$2^{2-1} \cdot 3 = \boxed{6}$

⇒ $2^n - 1$ の形の数を**メルセンヌ数**といいます．またこの形で表される素数をメルセンヌ素数といいます．

※数列の和を学習した後では，この証明はちょうどいい問題となるでしょう．
　ぜひ，考えさせてみたい問題です．

次のテーマは「ユークリッドの互除法」です．では，準備をしていきましょう

2-2　ユークリッドの互除法

2-2-1　互除法の原理

具体的に，最小公倍数，最大公約数はどのように求めていくのであろうか．
以下では「ユークリッドの互除法」と，その応用として「二元一次不定方程式」の解法について考察してみよう．

Item_7
(1) 2 つ以上の整数の公倍数は，最小公倍数の倍数である．
(2) 2 つ以上の整数の公約数は，最大公約数の約数である．
(3) a , b の最小公倍数を L，最大公約数を G とすれば　a　b　(
(4) a，b が互いに素で，かつ積 bc が a で割り切れるならば，c は a で割り切れる．

⇒厳密には，生徒の実態に合わせて証明をしておいた方がよい．例えば，

proof　(1) a，b，c，… の最小公倍数を L（>0）とし，m を任意の公倍数とする．

$m=aL+r$ ，$0\leqq r<L$ …①　とすると　$r=$ m　(であり

m も L も a の倍数だから r は a の倍数．同様に r は b，c，…の倍数となる．

即ち，r は a，b，c，… の公倍数となる．

r が 0 でないとすると，L の最小正に反するから　∴　$r=0$

よって，$m=qL$　となるから　m は L の倍数である．　(Q.E.D.)

※これにみるように「除法の原理」は適用範囲が広い定理であり，「不定方程式の解の存在」の証明においても応用される．

［定義］ 2 数 a，b の最大公約数を　$G(a\,,b)$　で表わすこととする．

Item_8　**《ユークリッドの互除法の原理》**　$G(\,a\,,\,b)$ $=$ $G(\,b\,,\,a$

⇒ この性質を a を b で割ったときの商 q，余り r として　$a=qb+r$ ，$0\leqq r<|b|$
に対して，繰り返し適用して GCM を求める方法が「ユークリッドの互除法」ということ．

Try_8　438 と 90 の最大公約数をユークリッドの互除法で求めよ．

$$
\begin{aligned}
&G(438\,,90) && \Leftarrow 438=4\times 90+78\\
&=G(90\,,78) && \Leftarrow \;\; 90=1\times 78+12\\
&=G(78\,,12) && \Leftarrow \;\; 78=6\times 12+6\\
&=G(12\,,6) && \Leftarrow \;\; 12=2\times \boxed{6}+\underline{0}\\
&=\boxed{6}
\end{aligned}
$$

ユークリッドの互除法の運算については，上記のほか，下記のような方法もある

(i) $\dfrac{438}{90}\rightarrow\dfrac{90}{78}\rightarrow\dfrac{78}{12}\rightarrow\dfrac{12}{\boxed{6}}=2$　のように

$\dfrac{a}{b}\rightarrow\dfrac{b}{a\text{ を }b\text{で割ったときの余り}}\rightarrow$ …

と計算をしていく

(ii)

4	438	90	1
	360	78	
6	78	12	2
	72	12	
	$\boxed{6}$	0	

Try_9　Q1. 次の 2 数の最大公約数を求めよ.

(1) ５７８　，１９５５　　　　（２）２４６８　，　４０８

Q2.　次の分数を約分可能ならば約分し，規約分数にせよ.

(1) $\dfrac{2664}{3885}$　　　　(2) $\dfrac{111111111}{12345679}$

Try_10　Q1.　平成 24 年は西暦 2012 年であり，1 月 1 日が誕生日のＳ君はこの時 17 歳であった.
Ｓ君が生まれてから 60 歳になるまでに，西暦の年号がＳ君の年齢で割り切れる年は何年あるか.《*Item_8*》の考えを応用して考えよ.

（答）a＝西暦の年号，　b＝Ｓ君の年齢　とすると，

「a が b で割り切れる」⇔　「（$a-b$）が b で割り切れる」 ことより　$a-b=2012-17=1995$　と一定だから，1995 の約数を調べて　1,　3,　5,　7,　15,　19,　21，35，57 の 9 年

2-2-2 合同式

整数や自然数を取り扱うときは，その数自身だけでなく，数のある一面に着目することで見通しがよくなることがあります.

Try_11　今日は 2009 年８月７日(金)ですが，来年の今日は何曜日でしょう．ただし，2010 年は閏年ではありません.

⇒　n 日後の曜日を考えるために表にしてみましょう

金	土	日	月	火	水	木
(0)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	361	362	363
364	**365**					

曜日は７つありますから，n 日後の曜日は，n を 7 で割った余りを考えることで判明します.

つまり（７）曜日だけを考えると，１日後と８日後は同じ（曜日）ということです.

これを　$8\equiv 1 \pmod{7}$　と表し　「７を法として８と１は合同である」といいます.

つまり，数を７で割ったときの余りにだけ着目するわけです.　　※⇒“剰余系”

$8\equiv 1$ (mod.7)　⇔　「$8-1=7k$　となる整数 k がある」　ということです.

これを使うと，この問題は，

$365=7\times 52+1$　となりますから　$365\equiv 1$ (mod.7)　で 365 日後は１日後と同じ土曜日となります.

Try_11　1, 3, 6, 14 ,29, 60, 121, 249, 501, 1003 の 10 個の数から 2 個を使い差（＞0）を考える.
このとき，2 数の差が 6 で割り切れるのはいくつあるか.

⇒ 6 で割った余りで分類してみましょう．差が 6 で割り切れるのは，　　　　（答え　７つ）
余りが同じもの同士のときのみです.

Item_9　**《合同式の性質》**

(i)　$x \equiv x \pmod{.p}$ [反射律]　　　(ii)　$x \equiv y \pmod{.p} \Rightarrow y \equiv x \pmod{.p}$　[対称律]

(iii)　$x \equiv y \pmod{.p}$　かつ　$y \equiv z \pmod{.p} \Rightarrow x \equiv z \pmod{.p}$　[推移律]

これらは，等号（＝）と同じです．さらに，結合法則・分配法則も上記から OK です

(iv)　$x \equiv y \pmod{.p}$　かつ　$a \equiv b \pmod{.p} \Rightarrow x \pm a \equiv z \pm b \pmod{.p}$　※移項できる

(v)　$x \equiv y \pmod{.p}$　かつ　$a \equiv b \pmod{.p} \Rightarrow x \cdot a \equiv z \cdot b \pmod{.p}$

(vi)　$c \neq 0$ の整数とする　$c \cdot x \equiv c \cdot y \pmod{.p} \Rightarrow x \equiv y \left(\mathrm{mod}.\dfrac{p}{G(c,p)}\right)$

$\Rightarrow$　これらの性質から　$a \equiv b \pmod{.p}$　ならば　$a^n \equiv b^n \pmod{.p}$　なども OK です

Try_11　**《3の倍数の判定》**

12345　を 3 で割った余りを求めてみましょう．

$12345 = 1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^5$　　と表せる．

また，$10 \equiv 1 \pmod{.3}$　より　$10^n \equiv 1 \pmod{.3}$　となるから

$2 \cdot 10 \equiv 2 \pmod{.3}$, $3 \cdot 10^2 \equiv 3 \pmod{.3}$, $4 \cdot 10^3 \equiv 4 \pmod{.3}$, $5 \cdot 10^4 \equiv 5 \pmod{.3}$　より

$12345 \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \equiv 15 \equiv 0 \pmod{.3}$

＊＊＊　この部分は今回，間に合いませんでした・・・あしからず　＊＊＊

この辺りは，本校の高校１年生にはちょっと難しいようです．
素直に，余りによる分類をすることで問題解決を図ることだけを伝えるようにしていった方がいいようです．

なお，１次合同式　即ち　$a\ \not\equiv\ (b\ \mathrm{m}\ \mathrm{o}$　がこの後の二元一次不定方程式と本質的には同一のものです．

例えば，　$7x \equiv 1 \pmod{.3} \Leftrightarrow$　「$7x - 1 = 3k$　となる整数 k が存在する」

$\Leftrightarrow$　「$7x - 3k = 1$　を満たす整数 x , k を求める」

ということで二元一次不定方程式の問題となります．

解法例）$7x \equiv 1 \Leftrightarrow 3x + 3x + x \equiv x \equiv 1 \pmod{.3}$　，即ち　$x = 3k + 1\ (k \in \mathbb{Z})$ となります

これを進めて，後述の二元一次不定方程式を解く際にも，

１次合同式を利用して，指導してみてはどうでしょう．

2-2-3 二元一次不定方程式

a ，b，c，x，y を整数とするとき，$ax+by=c$ を満たす整数 x，y をすべて求める問題を，西暦 350 年ごろアレキサンドリアに生存したとされる *Diophantus* が著書『算術』の中に記していたことから
ディオファントスの問題と呼ばれている．

Try_12　x，y を整数とするとき，$\boxed{4x+6y}$ のとる値を調べてみよう．
下の表を完成し，取りうる最小の正の値を予想せよ．

$\boxed{4x+6y}$

↑y	a=4												
5	20	-10					20	26	32	38	44	50	
4	16	-14					16	22	28	34	40	46	
3	12	-18					12	18	24	30	36	42	
2	8	-22								26	32	38	
1	4	-26	-20	-14						22	28	34	
0	0	-30	-24	-18									
-1	-4	-34	-28	-22									
-2	-8	-38	-32	-26									
-3	-12	-42	-36	-30	-24	-18	-12	-6					
-4	-16	-46	-40	-34	-28	-22	-16	-10					
-5	-20	-50	-44	-38	-32	-26	-20	-14					
		-30	-24	-18	-12	-6	0	6	12	18	24	30	b=6
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	→x

Try_13　x，y を整数とするとき，$\boxed{2x+3y}$ のとる値を調べてみよう．
下の表を完成し，取りうる最小の正の値を予想せよ．

$\boxed{2x+3y}$

↑y	a=2												
5	10	-5					10	13	16	19	22	25	
4	8	-7					8	11	14	17	20	23	
3	6	-9					6	9	12	15	18	21	
2	4	-11								13	16	19	
1	2	-13	-10	-7						11	14	17	
0	0	-15	-12	-9									
-1	-2	-17	-14	-11									
-2	-4	-19	-16	-13									
-3	-6	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3					
-4	-8	-23	-20	-17	-14	-11	-8	-5					
-5	-10	-25	-22	-19	-16	-13	-10	-7					
		-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	b=3
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	→x

Try_14　これらの作業結果と，下の２つの表の結果から $\boxed{ax+by}$ のとる**最小の正の値**がどうなるかを考察せよ．また，次の式のとる最小の正の値を類推せよ．

(1) $12x+28y$　　(2) $10x+7y$　　(3) $56x+105y$

$\Rightarrow$ (1) 4　　(2) 1　　(3) 7

※ $ax+by$ は $G(a,b)$ を正の最小値としてとる．証明は後述．

$\boxed{5x+4y}$

↑y	a=5											
5	25	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
4	20	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	15	−5	−1	3	7	11	15	19	23	27	31	35
2	10	−10	−6	−2	2	6	10	14	18	22	26	30
1	5	−15	−11	−7	−3	**1**	5	9	13	17	21	25
0	0	−20	−16	−12	−8	−4	0	4	8	12	16	20
-1	-5	−25	−21	−17	−13	−9	−5	−1	3	7	11	15
-2	-10	−30	−26	−22	−18	−14	−10	−6	−2	2	6	10
-3	-15	−35	−31	−27	−23	−19	−15	−11	−7	−3	**1**	5
-4	-20	−40	−36	−32	−28	−24	−20	−16	−12	−8	−4	0
-5	-25	−45	−41	−37	−33	−29	−25	−21	−17	−13	−9	−5
		-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20 b=4
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5 →x

$\boxed{5x+15y}$

↑y	a=5											
5	25	−50	−35	−20	−5	10	25	40	55	70	85	100
4	20	−55	−40	−25	−10	**5**	20	35	50	65	80	95
3	15	−60	−45	−30	−15	0	15	30	45	60	75	90
2	10	−65	−50	−35	−20	−5	10	25	40	55	70	85
1	5	−70	−55	−40	−25	−10	**5**	20	35	50	65	80
0	0	−75	−60	−45	−30	−15	0	15	30	45	60	75
-1	-5	−80	−65	−50	−35	−20	−5	10	25	40	55	70
-2	-10	−85	−70	−55	−40	−25	−10	**5**	20	35	50	65
-3	-15	−90	−75	−60	−45	−30	−15	0	15	30	45	60
-4	-20	−95	−80	−65	−50	−35	−20	−5	10	25	40	55
-5	-25	−100	−85	−70	−55	−40	−25	−10	**5**	20	35	50
		-75	-60	-45	-30	-15	0	15	30	45	60	75 b=15
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5 →x

Item_10　**《整数論の基本定理》**　整数 a , b が互いに素のとき，即ち $G(a,\ b)=1$ のとき
$ax+by=1$ は整数解をもつ

この定理は重要です．《*Try_12*～14》を通じて「何となくそう思う」程度とは思いますが，向学のために証明をしておきましょう．ここでは，除法の原理を使って証明しておきます．

proof)　$f(x,y)=ax+by$ として，$f(x,y)$ のとる値で最小の正であるものを c_0 として，

$f(x_0,y_0)=ax_0+by_0=c_0$　とおく．

また，$f(x,y)$ によって表される任意の整数 c をとして $f(x,y)=ax+by=c$ とすると

c は c_0 の倍数となる．なぜならは，$c=qc_0+r$ ，$0\leqq r<c_0$ とすると

$$r=c-qc_0=(ax+by)-q(ax_0+by_0)=a(x-qx_0)+b(y-qy_0)$$

となり，c_0 よりも小さい正の整数 r が $f(x,y)$ によって表されたことになり c_0 が最小の正数であることに矛盾する．従って，$r=0$ となり，c は c_0 の倍数となる

よって，$f(1,0)=a\cdot1+b\cdot0=a$ は c_0 の倍数であり，$f(0,1)=a\cdot0+b\cdot1=b$ も c_0 の倍数となるから，

c_0 は a，b の公約数となるが，条件より $G(a,\ b)=1$ だから $c_0=1$．

従って，整数 a , b が互いに素のとき $ax+by=1$ は必ず解をもつ　　(Q.E.D.)

このことから，二元一次不定方程式が解をもつ条件は次のように表せます．

Item_11 **《不定方程式の解の存在条件》**　整数 a , b, c に対して，

$ax+by=c$ が整数解をもつ　⇔　c が　$d=GCM(a,\ b)$ で割り切れる

⇒ 言い換えれば，

「 $f(x\,,\,y)=ax+by$ 　によって表される数は，$d=GCM(a,\ b)$ の倍数全体である」

ということになります．

この視点で《*Try_13* のサンプル表》を見直してみましょう

★ $\boxed{5x+4y}$ は，$GCM(5,4)=1$ ですから，「１の倍数全体」すなわち整数全体を表わすはずです．

実際に表の中には，すべての整数があるように見えます．

★ $\boxed{5x+15y}$ は，$GCM(5,15)=5$ ですから，「5 の倍数全体」を表わすはずです．

実際に表の中の数字を調べると納得できることでしょう．

このように**数学**という**「知恵の集積」**によって
本来，**「無限の時間を必要とする調査」**を**「有限の時間」**で行うというパワーを秘めているのです．

= **Coffee Break** =　ちょっと一休み

Diophantus に関する，ギリシャ詩文集の次の一句である．彼は生涯何年生きたか求めてみよう．

「ディオファントスの人生は、6 分の 1 が少年期、12 分の 1 が青年期であり、その後に人生の 7 分の 1 が経って結婚し、結婚して 5 年で子供に恵まれた。ところがその子はディオファントスの一生の半分しか生きずに世を去った。自分の子を失って 4 年後にディオファントスも亡くなった。」

（答え）84年間　※ x 年の生涯とすると，$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$

＊＊＊　これ以降の部分は今回，間に合いませんでした・・・あしからず　＊＊＊

この後は，不定方程式の解法に入ります．x，y の係数にユークリッドの互除法を使い最大公約数を求める過程を逆に辿り，特殊解を見つけ一般解を得て一般解を導く解法が“期待される解法”のようです．

しかしながら，同値な１次合同式を解いて，一般解を導く方法も生徒に伝えたいところです．

様々な解法を考えながら周辺の問題に取り組むことで，身近にある事象の数学的解釈（数学化）を体験できるのではないでしょうか．

===　最　後　に　・・・　====

これを書いているのは夏季セミナーの前日の本校の職員室です，途中までのレポートとなりましたが，今回はここで休止し印刷・綴じこみをしたいと思います．

明日，長尾先生の講演を聞き，知見を深めてまたレポートを見直したいと思います．

《参考文献》
『高等学校学習指導要領解説　数学』（文部科学省）
『初等整数論講義』：（共立出版／高木貞治 著）
『高校数学＋α　：基礎と論理の物語』（共立出版／宮腰忠 著）
大学への数学『マスター・オブ・数学』（東京出版）