

鳩の巣原理について

1 鳩の巣原理について

数学Aの教科書（実○出版、新高校数学A）のコラムに鳩の巣原理（部屋割り論法）について記載されていたので、興味を持ち、調べてレポートにまとめてみました。

教科書の内容としては、 $\frac{1}{7} = 0.142857142857 \dots = 0.14285\dot{7}$ のように、 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7$

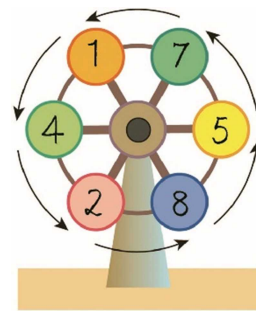
$\rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$ と、決まった数（1,4,2,8,5,7）が循環します。また、6回割り算をした余りは順に  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$  と循環し、1から6までの数が全部出てきます。したがって、7回目の割り算には必ず前と同じ余りが出てくることになります。（一般に、 $p$ を $q$ で割ると、 $p$ 回以内に必ず同じ余りが現れる。）

この結果が分かれば、 $\frac{3}{7}$ 、 $\frac{2}{7}$ 、 $\frac{6}{7}$ 、 $\frac{4}{7}$ 、 $\frac{5}{7}$ の値は計算しなくても、 $\frac{3}{7} = 0.42857\dot{1}$ 、

$\frac{2}{7} = 0.28571\dot{4}$ 、 $\frac{6}{7} = 0.85714\dot{2}$ 、 $\frac{4}{7} = 0.57142\dot{8}$ 、 $\frac{5}{7} = 0.71428\dot{5}$ のように求められる、と

いうものでした。

$$\begin{array}{r}
 0.142857142857\cdots \\
 7 \overline{)1.0} \\
 \underline{7} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{14} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 50 \\
 \underline{49} \\
 10
 \end{array}$$



鳩の巣原理（部屋割り論法）とは・・・鳩の数と巣の数が同じとき、どの鳩も平等に1つの巣に入ることができます。しかし、鳩の数が巣の数を上回るとき、1つの巣に複数羽の鳩を入れざるを得ません。このように、「 $n$ 個の巣に対し、 $n+1$ 羽の鳩を入れると、少なくとも1つの巣には2羽以上の鳩が入ることになる」という考え方（原理）を鳩の巣原理（部屋割り論法）といいます。

「鳩の巣原理は数え上げ問題の例の一つで、一対一対応ができない無限集合など、多くの形式的問題に適用できる。この原理に関する最初の記述は、ディリクレが1834年に "*Schubfachprinzip*"（「引き出し原理」）の名前で書いたものであると信じられている。また、ディリクレが発見したためディリクレの原理と呼ばれることもある。」（Wikipedia より）

## 2 鳩の巣原理（部屋割り論法）に関する問題

(1) 5人以上のグループの中には、血液型（A、B、O、ABの4種類とする）が同じ人たちが必ずいます。また、3人以上のグループの中には、性別（男、女の2種類とする）が同じ人たちが必ずいます。血液型と性別の組合せは全部で8通りのため、9人以上のグループの中には血液型と性別の両方とも同じ人たちが必ずいることになります。

血液型と性別と誕生日（2月29日を含めて366種類とします）がすべて同じ人たちが必ずいることになるのは、何人以上のグループのときですか。（2013 数学検定3級）

（解答）

$$4 \times 2 \times 366 = 2928、$$

$2928 + 1 = \underline{2929}$ （人）（血液型、性別、誕生日が全て同じ人が必ずいるための条件は2928人よりも多くなければいけない。つまり、これよりも1人多い2929人いればよい。）

この問題に関連して、桜美林大学の芳沢光雄先生は、

「ここに9人いると、性別（男、女）と血液型（A、B、AB、O）が一致する2人が必ずいる。それは、性別と血液型の組は全部で8通りだからである」

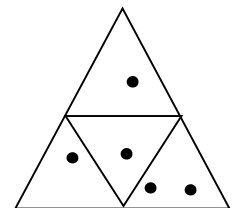
「ある2人の日本人は、誕生日の月と日、生まれた時刻の時と分、血液型、住所地の都道府県名がすべて一致する。なぜならば、誕生日の月と日で366日あり、生まれた時刻の時と分で24×60通りあり、血液型で4通りあり、住所地の都道府県名で47通りある。したがって、それらの組が全部でいくつあるかを考えると、それらの数字をすべて掛け合わせた数字になるので、 $366 \times 24 \times 60 \times 4 \times 47 = 9908$ 万3520（通り）となる。ところが、日本人の人口は1億2千万人を超えているので、鳩の巣原理により、現在生きているある2人の日本人は誕生日の月と日、生まれた時刻の時と分、血液型、住所地の都道府県がすべて一致するのである」

と新聞の記事で述べています。

(2) 1辺の長さが2の正三角形の内部に、任意に5個の点をとったとき、その内部の2点で、距離が1以下となるものが少なくとも1組存在することを示せ。（広島大学）

（証明）

正三角形を1辺の長さが1の正三角形に分割すると、図のように4つに分けることができる。この内部に5個の点をとるので、鳩の巣原理から、少なくとも2つは同じ正三角形の周または内部に存在することになる。そのときの2点間の距離は1以下である。



(3) 座標空間内で、その座標が全て整数である点のことを格子点という。9個の格子点が与えられたとき、そのうちの2点の midpoint がまた格子点となっているものが少なくとも1組は存在する。(広島大学)

(解答)

座標空間上の格子点の偶数、奇数のパターンについて、

$(x, y, z) = (\text{偶}, \text{偶}, \text{偶}) (\text{偶}, \text{偶}, \text{奇}) (\text{偶}, \text{奇}, \text{偶}) (\text{偶}, \text{奇}, \text{奇}) (\text{奇}, \text{偶}, \text{偶}) (\text{奇}, \text{偶}, \text{奇}) (\text{奇}, \text{奇}, \text{偶}) (\text{奇}, \text{奇}, \text{奇})$  の8通りが考えられる(偶数は偶、奇数は奇と表した)。偶数と偶数、奇数と奇数の和が偶数となるから、格子点と格子点の midpoint がまた格子点となるには、2点の  $x$  座標、 $y$  座標、 $z$  座標の偶奇が完全に一致すればよい。鳩の巣原理より、9個の格子点が与えられたとき少なくとも2点が同じ偶奇のパターンになる。

この2点の midpoint は格子点となる。

(4) 分数  $\frac{n}{m}$  ( $m, n$  は互いに素な自然数) が無限小数になるとき、循環小数になることを示せ。

(解答)

任意の自然数を  $m$  で割って割り切れないとき、余り  $r$  は、 $1 \leq r < m$ 、つまり0から  $m-1$  までの  $m-1$  通りしかない。したがって、 $m$  回以上割り算を繰り返していくと、鳩の巣原理から、必ず同じ余りになるときが現れる。これ以降は循環する。 $(m$  回目には以前と同じあまりが出てくる)

(5) 相異なる  $n+1$  個の整数から2つの整数を選ぶと、その差が  $n$  の倍数になるものがあることを示せ。(早稲田大学)

(解答)

任意の整数を  $n$  で割ると、余り  $r$  は、 $0 \leq r < n$ 、つまり、0から  $n-1$  までの  $n$  通りである。したがって、相異なる  $n+1$  個の整数を  $n$  で割ると、鳩の巣原理から、少なくとも2つは同じ余りになる。それらを  $na+r$ 、 $nb+r$  とおく ( $a, b$  は整数で、 $r$  は、 $0 \sim n-1$  のいずれかの整数)。差をとると、 $(na+r) - (nb+r) = n(a-b)$  となり、 $a-b$  は整数だから  $n(a-b)$  は  $n$  の倍数。

(6) 任意に与えられた相異なる4つの整数  $m_1, m_2, m_3, m_4$  から、適当に2つの整数を選んでその差が3の倍数となるようにできる。このことを証明せよ。(神戸大学)

(解答)

整数を3で割った余りで分類すると、 $k$  を整数として  $3k$ 、 $3k+1$ 、 $3k+2$  の3種類のグループに分類できる。相異なる整数が4つ与えられたとき、鳩の巣原理より同じグループに属するものが少なくとも2つ存在する。それらを  $m_i = 3a+r$ 、 $m_j = 3b+r$  とおく ( $i, j$  は  $1 \sim 4$  のいずれかの整数。 $a, b$  は整数で、 $r$  は  $0 \sim 2$  のいずれかの整数)。  $m_i$  と  $m_j$  の差をとると、 $(3a+r) - (3b+r) = 3(a-b)$  となり、 $a-b$  は整数だから  $3(a-b)$  は3の倍数。