言語活動の２系列をもとにした数学の文字（式）概念指導への提言および治療

文字（式）への抽象化のＳＬ研究の成果を踏まえて

大阪高等学校数学教育会　ＳＬ委員会　疋田 直樹
（cacqe800@hcn.zaq.ne.jp ）

このアプローチは、昭和５０年より続く大阪におけるスローラーナー研究の成果をベースとし、言語学の理論を援用して数学の指導法を探るものである。

高等学校において、学習意欲はあるが、なにがしかの障碍となる考え方、観念があり、それが故に学習が進まない、その障壁を除去すれば、進んで学習していける学習者を少なからず見てきた。我々は、彼等をスローラーナーと名付け、診断テストをもとにした数値解析により、その障壁箇所を見つけようとしてきた。解析にあたっては、各設問についてどの程度自信をもって解答しているかという「自信度」も我々の研究グループは考慮した。

本論では、高校に入学し最初に学習し、かつ関数概念、解析へと繋がる代数分野について焦点を当てる。この分野では、文字への抽象化、「数から文字（式）への抽象化」が大きな障壁となる。その障壁の原因を探るための数値解析により以下の３点が明らかになった。

１）数から文字（式）への抽象化は、文字を定数的にとらえる系列と文字を変数的にとらえる２系列がある。

２）この両系列が統合されて文字（式）への抽象化が図れる。

また、

３）文字を変数的にとらえる系列を分数および分数に表される諸概念（割合、比、倍概念）が支え、文字を定数的にとらえる系列を正負の数の発想が支える。

これらのことを踏まえ、適切な指導（治療）を推進するにあたって、我々は対処療法でない根源的な治療を目指し、様々なことを試み続けてきている。生徒のもつ思考形態に迫り、そこから策を得るということが我々のねらいである。

治療法の一つとして、本論では、思考はほとんど言語で行うことと考え合わせて生徒の次のような「言語活動」に対応させて考察した。

スローラーナー達が、言語生活において、言葉を解釈しようとするとき、

- 個々の言葉の意味がわからない。
- 個々のことがらの意味がわかっていてもそれらの文脈がつかめない。
- 言葉の論理性や抽象性につまずいている。
- 言葉の情緒性が感じ取れない。

などが挙げられるが、これらは、数学の内容を理解する場面においても共通している。そこで、これらの共通項を考察し、克服する術を探り、文字（式）への抽象化の指導に活かそうと考えた次第である。

その際、手がかりとしたのは言語学者ソシュールが、日常の言語活動において、言語体系の中にある一つの語を実際の言語活動のなかに結びつける仕方には２種類のものがあるということである。この２つはそれぞれ独自の価値を生み出すものとして働き、しかもこの２つのものは、人間活動の主要な２つの形態に対応しているとする。文章に表れる語は、文脈での意味と、関連する語群（類語）としての意味があること、
この２面で、文脈、話の筋道に該当するのが「統合軸」、関連する語群（類語）に該当するのが「連合軸」といい、統合軸は文脈から適語を選び、連合軸は語群から関連する語を抽出する。そして、上述の「数から文字への抽象化」における、定数的側面が「統合軸」に、変数的側面が「連合軸」に対応するとみる。
更に、失語症の研究（ヤコブソン）による成果も検討し、２側面のおのおのを探った。

ヤコブソンによれば、失語症には大きく分けて２つのタイプがあり、連合軸の支障によって「これをああして、それを～」のように、文脈だけが残るタイプと、統合軸の支障によって「電文体」のように、語だけが残り、語が次々とでるタイプの２つがあるとしている。前者には、メタ言語的アプローチが、そして後者には「繋ぎ」、語（記号）のもつコノテーションを活かすことが必要としている。（新）

これらの観点より、「代入する」、「一つに見る（和の抽象化が図れる）」、「式構成上の括弧の意味」、「全体を見る」などが言語の知見より映し出され、治療に活かせる術が得られ、それをもとに提言を行う。

「算術の少年しのび泣けり夏」（西東三鬼「旗」）という句がある。
夏休みの終わり頃だろうか。長い夏休みが終わりに近づき、宿題も仕上げねばならない時期、いざ手をつけると、わからないことが出てきて、前に進まない。時間は刻々と流れ、残された時間でどうしたらよいかという焦りと、自責の念、おのれの無力感に自然に涙がにじみ出てくる。どうしょう、どうしょう。
このように、算数･数学の学習が進まないゆえに苦しむ、これらの生徒の苦しみが少しでも除けるようにという提言である。

第１章は、「共同研究に参画された先生方」にお名前を上げさせてもらいました諸先生との共同研究成果の［２］～［１３］をもとに、現在までの経緯（概要）をできるだけ客観的に整理したものです。第２章以下はその研究成果を踏まえた私の論述となっています。
なお、橋本是浩先生には本報告全般にわたって、また長期間にわたってご助言を頂き深く感謝いたします。

目　　次

言語活動の２系列をもとにした数学の文字（式）概念指導への提言および治療
文字（式）への抽象化のＳＬ研究の成果を踏まえて

第１章　スローラーナー研究概要

昭和５０年、第２ベビーブーム、そして良好な経済状況にも支えられ高学歴社会の時代を迎え、高等学校への進学率が増加した。その結果、高等学校において、真面目で学習意欲をもちつつも、授業に取り組めず望ましい学習結果をあげることができない生徒が増え、特に、数学において「授業で、何をいっているのかわからない」という生徒をかかえるようになった。とりわけ、新設された高等学校や実業高校などの多くでは、これまでのような授業展開では対応できなくなった。それに対して、「分数計算ができない」に対して分数計算を練習させる、形式から答を書かせるというような、いわゆる対処療法では、試験前に形だけは覚えるがすぐ忘れる、授業に既習であった以前の知識がすぐに使えないなど支障をきたした。そのうえ、数学嫌いを増やすことと危惧された。

このような状況を踏まえ、対処療法でない根源的な治療を、そしてはやく授業に参加できるようにすることを目指すということで、本研究が始まった。

本スローラーナー研究とは、大阪高校数学研究プロジェクトチームと総称し、大阪府下の大学、高校の関係者で組織されたものである。昭和５０年６月発足し、ＳＬ※を生み出している学習上の障害となっている個所と、その背景的な要因の究明を現在まで行ってきた。この要因を踏まえ、治療用教材「Express」シリーズを開発、その教材の生徒への試行を重ね、個々の生徒にたいしての**「診断－治療システム」**を開発することを目的として研究を進めてきている。

※）スローラーナーを、以下このように略記する。なお、我々は、ＳＬを、いわゆる低学力の者というようにきめつけ、固定的なとらえ方はしない。何らかの原因により学習上障壁となるものができたため、その後の学習が停滞したり、未消化のままになっているが、障壁となっているものを取り除くことができれば、更に、すすんで学習していける学習者ととらえる。

そのため、基礎・基本の問題についての生徒がどのように考え、どのように誤るかの反応（解答）を大量に採取し、数値解析的手法で理解の構造を探った。

数値解析により、一見支離滅裂に見えた解答群のなかから我々も指導者も気づかなかった理解回路が見えてきた。この発見は研究を進める上での鍵となった。このような数値解析に加え、平素接する生徒の反応も重んじ、理解の道筋を探ってきた。

【１】現在までの歩み

我々の研究では、多くのデータ処理が短時間に行えることが重要である。電子計算機の処理能力の向上、マークカードリーダーの能力向上により、昭和５７年からパンチカードの検索からマークカードの使用へと変化する。このことを踏まえ、我々の研究活動を、おおむね以下の［１］、［２］の２つの時期に分けてみた。

［１］昭和５０年～昭和５７年（マークカードシステム導入の前）

（１）第一次調査（主に中学校の内容）

第一次調査の問題は、数から文字への抽象化において、学習上障壁となっている箇所を発見し、抽象化の大筋を明らかにし、学習系統の太いパイプを探し求めるためのものである。その構成は、次の第Ⅰ部～第Ⅲ部の３部からなっている。

第Ⅰ部で扱う問題項目は、

数の概念形成および、それに伴う表現上の規約や計算に関するもので、数と数直線上の点との対応、記数法、割合と比の概念、倍概念、分数表示、分数計算、数０および正の数･負の数などである。

第Ⅱ部で扱う問題項目は、

数の拡張から文字（変数）に至る抽象化・一般化の過程と、文字式の表現上の規約や計算に関するものである。そして、それを第Ⅰ部との関連において調べる。

第Ⅲ部で扱う問題項目は、

方程式、不等式、関数の考えを、第Ⅰ部、第Ⅱ部の数や文字（変数）についての把握との関連において調べようとするものである。

この第一次調査を利用し、主に相関係数の解析により、文字形成の過程を「ブロック系列図※」の形で作成した。

※）当時の表現で、障壁箇所を表した図である。

このブロック系列図は、３２項目の相関関係から作られ、そのキーポイントは文字形成の主要なブロックは、分数の理解に関わっているということである。すなわち、

・分数が数として、数直線上に位置づけられ、分数をそれ自身、数として把握できること

・分数に表される諸概念の理解ができていること、特に

「５０kgの $\frac{2}{3}$ は（　　）kg」

「３個１０kgのとき、７個では（ ）kg」

の２題が分数グループと文字グループとの繋ぎとなっていること

そして、

・因数分解が到着点としてあること

などが明確にされた。

（２）第二次調査（主に数学Ⅰの内容）

この調査は、第一次調査（主に中学校の内容）を受けて、数学Ⅰで用いられる諸概念を一次調査との関連で調べることを狙った。小中学校の学習内容について、治療を必要とし、そのままでは高校の内容が理解できない生徒を見いだす診断の問題となる。具体的な問題項目は以下の通りである。

① 数概念(特に、分数、比の概念) ② 和と積の意味　③ 置き換え(代入、置換も含め)

④ ２つ以上の文字を含んだ式についての理解、および方程式とグラフの関係

⑤ 等式（恒等式、方程式）についての理解　⑥ 文字の種類（変数、任意定数、定数）

⑦ 変数の種類（自由変数、束縛変数）

この第二次調査問題をもとに、相関係数、点双列相関係数、パス係数による解析により、

「パスダイヤグラム総括図」を作成した。結果、数学Ⅰの初期内容に、分数に表される諸概念及び式の形が大きく関わっていることが解析された。
さらに、この第二次調査の結果として、

　　積及び積と和の形で構成されている数の約数・倍数関係を、組み立てから直接判断することが、分数概念とともに文字式の運用において主要な背景的役割を果たしている
　　そして、これを文字式の形式にしたものを通して、
　　文字式の規約や表現、分数式の変形、因数分解の意味の理解に繋がる

とした。

［２］昭和５７年～現在（マークカード方式による判断の時期）

　コンピュータシステムの進展により、多量のデータ処理が可能となったことを受け、それまでの調査問題をマークカードによる診断テスト（７５問）を開発、この問題群をもとに、２５問からなる縮約総合判「診断テストＡ」を開発し実施した。
この診断テストＡにより、

　　治療を必要とする内容や理解の程度を素早く探ること
　　治療順序や治療方法の開発
　　治療用テキストの治療箇所の指示

などが可能となった。
　このデータをもとに、相関係数、点双列相関係数、クラスター解析を用い、要素間の系列を明確にした。これが、診断カードの系列図となった。
　マークカード以前の「ブロック系列図（つまずきポイントの系列図）」、及び各種診断テストが、このマークカード方式に取り入れた。その結果、クラスター解析によりクラスター系列が得られた。

　代数分野に目処がついた段階で、以下のように対象分野を拡張してきた。
　図形分野（昭和６２年～平成６年）
　場合の数･確率分野（平成３年～平成１３年）
　関数分野（平成１３年～平成１８年）
　整式および代数式の表現について（平成１８年～現在）
と研究領域を広め、総合的にＳＬ達の各分野での主要ポイントを探ってきた。
具体的には、各分野で必要とされる事項をもとに予備テストを作成、生徒の誤答を分析し、マークカードによる診断テストを作成し、できるだけ多くの生徒に実施し、その分野の核となる概念を数値解析をもとに解明してきた。また、このことをもとに治療教材を開発してきている。

【２】自信度の意味と解析手法

マークカードでの処理により素早く対処（治療）出来るようになるが、記述のようにその答えがしっかり理解したものか、当てものかは判定しずらい。そこで、各問に対して、その問に自信をもって解答したかを問うた。すなわち、当てものかどうか判断の一つの方法として、各問題について、どの程度の自信を持って解答しているかについて自信の度合い「自信度」を問うた。

その結果、簡単な問題で、正答率も高く、完全に理解しているものとして指導していた問題に、意外に多くの「自信なし」が出てきた。このことにより、不安定な要素が抽出できたものと考える。

例えば、下の問題３－１２）では。平均正答率が９２％であるが、「自信あり」での正答率は６９％と低い。正答しているが、自信を持っていない(「自信なし」、「自信？」）２１％の生徒は十分に理解しているとはいえない。（被験者１４９名※）

※）ここでのデータは全75問の基礎分野を網羅した診断テスト(詳細はｐ11)の結果による。

問題３－１２）

ａはａの（①）倍

－ａはａの（②）倍

ア．①０ ②－２ａ　イ．①０ ②マイナス　ウ．①１ ②－１　エ．①１ ②マイナス　オ．ア～エにはない。

この問題について自信度のレベルと各選択肢のクロス分布は以下のようになる。

		あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	①０②－２ａ	０	１	０	０	０	１
イ	①０②ﾏｲﾅｽ	１	１	０	０	０	２
ウ	①１②－１	１０４	２８	８	０	０	１４０
エ	①１②ﾏｲﾅｽ	２	１	０	０	０	３
オ	ｱ～ｴにはない	１	１	１	０	０	３
無答		０	０	０	０	０	０
計		１０８	３２	９	０	０	１４９

（表１）

このことを次の点双列相関係数で調べると、更に明らかとなる。

ここで点双列相関係数など解析手法で用いる解析量についてについて説明する。

【Φ係数（相関係数）】

Φ係数とは、各生徒についての２つの問題項目間の正誤の相関係数である。

生徒数をＮ（人）、問題数をｎとする。ｉ番目の生徒のｍ番目の問題に対する反応をx_{mi}とし、 $X_m=(x_{m1},\ x_{m2},\ \cdots x_{mN})$ とする。

このとき、問題ｊと問題ｋの相関係数ϕ_{jk}は、次のように定義される。

$$\phi_{jk} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\, x_{ki} - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ki}\right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^{2} - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\right)^{2}}\ \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ki}^{2} - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ki}\right)^{2}}}$$

ここで、ｉ番目の生徒のｊ番目の問題に対する解答が

$$x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{（正答）} \\ 0 & \text{（誤答及び無答）} \end{cases}$$ なので、

問題ｊと問題ｋの正答数、誤答数の個数が、次のようになっていたとき、

問題ｊ ＼ 問題ｋ	正答数	誤答数
正答数	a	b
誤答数	c	d

上の式は次のように簡単に計算できる。

$$\phi_{jk} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

また、ある問題の正答・誤答と全問題の正答数との相関係数である点双列相関係数は次のように定義される。

【点双列相関係数】

生徒数をＮ(人)、問題数をｎとする。ｉ番目の生徒のｊ番目の問題に対する反応をx_{ji}とし、この生徒の全問題の正答数をy_iとする。$y_i = \Sigma x_{ji}$（Σの添字は ｊ＝１から ｊ＝ｎ） このとき、問題ｊの点双列相関係数γ_jは、次のように定義される。

$$\gamma_j = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^{2} - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\right)^{2}}\ \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^{2} - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^{2}}}$$

ここで、ｉ番目の生徒のｊ番目の問題に対する解答が

$$x_{ji} = \begin{cases} 1 & (\text{正答}) \\ 0 & (\text{誤答及び無答}) \end{cases}$$

なので、

問題ｊの正答率ｐ、誤答率ｑ

問題ｊが正答の者の合計得点の平均点をm_p、

問題ｊが誤答の者の合計得点の平均点をm_q、

ｙの標準偏差をσ

とするとき、上の式は次のように計算できる。

$$\gamma_j = \frac{(m_p - m_q)\sqrt{pq}}{\sigma}$$

各問題項目は、各成分が０，１であるN次元ベクトル、得点は、各成分が各生徒の得点であるN次元ベクトル。それぞれの第ｉ成分が第ｉ番目の生徒に対応する問題の正･誤あるいは得点である。そして、各成分の和が０，分散が１になるように変換した後、２つずつの内積、２つのベクトルのなす角のコサインの値のことを相関係数とする。

もとにもどって、この式から、７頁の（表１）をもとに次の（表２）が作られる。

	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	※	－８	※	※	※	－８
イ	－１０	－１３	※	※	※	－１７
ウ	６８	－４７	－３３	※	※	$\boxed{２３}$
エ	※	－４	※	※	※	－２
オ	－１０	－８	－１２	※	※	－１８
無答	※	※	※	※	※	※
計	６６	－５１	－３６	※	※	

（表２）

※は該当者なしを表す。

具体的な数値で見ていくと、

表２の合計欄のウの場所の数字$\boxed{２３}$は、この問題で「正答」を選んだ生徒のグループと「誤答」を選んだグループの２つに分けたとき、「正」と「誤」各グループの全問題７５問の総得点の間の相関係数が０．２３であることを示している。

ここで、この数字は、自信度について考慮しない単なる正答の場合の値が０．２３であることを示しているが、同じようにみてみると、ウの「自信あり」の場所の数字６８は、この問題で、解答を「自信ありで正答のイ」を選んだか、それ以外のいずれにかに分けたとき、前者と後者の生徒について全問題７５問の総得点系列との関係から相関係数が０．６８

であることを示している。この問題に自信をもって正答することがそうでない場合と比べて、全問の総得点と極めて高い相関（０．６８）を示しているといえる。

このことは同じ正答であっても、自信度について考慮しない単なる正答の場合の値が０．２３であることを示している。そして、「自信？で正答」の場合も、そうでない場合と比べて－０．４７となっていることから、自信をもっていることが理解の度合いを顕著に表していると判断できる。

更に、我々の研究では、自信度について実践研究により以下のことが明らかとなってきている。

１）単なる正答ではかなりの数の不安な学習者がいる。

２）間違っても、自信を持っていると、簡単な指導で理解に導ける。

３）治療により、たとえ点数が上がらなくても、自信度が上がる。

そして、治療により　自信なし→自信？→自信あり　と変化していくにつれて得点も上がる。即ち、自信度は、理解の度合いのバロメーターと考えられる。そして生徒は、たとえ問題に正答できなくとも、自信を持って答えると満足が得られるようである。計算間違い等ケアレスミスがあったとしても大枠がわかっているので次は大丈夫、できそうなので「出来なかったが、わかったからいい」という効果がある。このような自信をもたせるような指導をねらっていくべきと思う。

【３】クラスター分析とクラスター系列図

【１】［２］で述べたように、それまでの診断問題を総括し、自信度を入れた７分野の「診断テスト」を作成した。各分野は１冊、計７分冊となり、各１５問の構成である。その内容は、

・診断テスト（１）；分数

　分数と数直線上の位置との対応、分数と小数、分数の加減乗除、分数で表現される割合・比（比の値）、倍概念など

・診断テスト（２）；数論的な考え

　積・和の形をした数と約数・倍数、分数の形をした数の約分・通分、負の数、数0の意味など

・診断テスト（３）；文字の基礎

　数から文字への抽象、文字表現における約数・倍数、式表記上の規約など

・診断テスト（４）；式表示・式の計算

　文字表現における割合・比（比の値）、倍概念、積・和の形の式、式の値、式の計算、因数分解など

・診断テスト（５）；方程式・不等式、関数

　等式・不等式、一次方程式、二次方程式、基本的な関数概念（表、グラフ及び式表示）、比例、反比例など

・診断テスト（６）；図形

　平行線と角、合同と相似、四角形、図形の論理、相似比、三角形の二辺の比、平行線と比、空間の認識など

・診断テスト（７）；数学に対する感覚・イメージ

　数学的な態度・構え、興味、数や文字に対する感覚・イメージなど

である。

そして、診断テスト（１）～（５）の７５問を通しで受験した生徒は１４９名、設問に対する解答は五肢選択となっており、自信度を合わせて記入させる。このデータをもとに各問題間の相関係数を距離とみなしたクラスター分析をおこなった。分析手順は次の通りである。

【クラスター分析】

一般的に、与えられた集団を、類似性あるいは差異性の計量（距離）によって、似たものどうしのグループに類別することをクラスター分析という。類別された集団をクラスターという。

ここでは以下のように設定した。

（１）相関係数（Φ係数）を距離と見なした問題項目間のクラスター分析による主要なグループを抽出する。

「自信あり」とした正解についてのみを正答と評価して処理をした。すなわち、正答を選択しかつ「自信あり」と答えた場合を’1’、他の場合を’0’としたときの２つの問題間の相関係数（Φ係数）を求めた。

（２）（１）の結果を用いた分析をした。

Φ係数を距離とし、除外基準（２つの問題が似通って言い難いほどの距離）0.4、抽出基準3（３つ以上の問題が集まればグループとして抽出）とし、７５問の問題項目をクラスター分析をすると、以下のようにグループが抽出できた。

最初に選ばれるグループは、グループＬと名付けた。
　問題３－１２）　ａはａの（①）倍、－ａはａの（②）倍
を核※) として
　問題３－７）　１箱２０個入りのリンゴをｎ箱買ったら、５個のおまけがあった。全部でリンゴは何個か
を含むものとなる。（Φ係数61）
グループL は「式の規約・意味がわかる。立式が出来る」という内容となっている。

※）お互いに相関の強い問で、正答率がより高い方を「核」とし、もう一方を「含むもの」とする。

第２番目に選ばれるグループは、グループＮと名付けた。
　問題５－１０）ｘとｙが比例し,対応表が与えられた時、ｘの増分1に対するｙの増分と $x=\frac{1}{3}$ のときのｙの値を求める。
を核として、
　問題５－５）ａ＞０、ｂ＜０　のとき、ａ－ｂとｂ－ａの正負
を含むものとなる。（Φ係数56）
グループN は「変数的な数量関係が読みとれる」という内容となっている。

以下、第３番目にに選ばれるグループは、グループＭと名付けた。
　問題１－８）Ａ：Ｂ＝３：４のとき、Ａ：Ｂ＝１：（　）
を核として
　問題１－１１）５０kgの $\frac{2}{3}$ は何kgか。
を含むものとなる。（Φ係数57）
グループM は「倍の考えが出来、割合、比がわかる」という内容となっている。

第４番目に選ばれるグループは、グループＫと名付けた。
　問題２－１３）$2-(-3)^2=$
を核として
　問題２－１２）次のａ，ｂの値はいくらか。
　　$-3-2=a$
　　$-3+2=b$
を含むものとなる。（Φ係数60）
グループK は「負の数の意味がわかり、計算が出来る」という内容となっている。

第５番目に選ばれるグループは、グループＳと名付けた。

問題５－１４）１次関数のグラフから、ｘの増分１に対するｙの増分、ｘ＝４のときのｙの値、ｙをｘの式で表す。

を核として、

問題５－２）次の方程式の解を求めよ。

① $\frac{2}{3}x = 3$　　② $-3x = \frac{1}{3}$

を含むものとなる。（Φ係数52）

グループS は「方程式が解ける。グラフから数量関係が読みとれる」という内容となっている。

第６番目に選ばれるグループは、グループＪと名付けた。

問題１－７）　$3 \div \frac{2}{5} =$

を核として、

問題１－４）0.25に等しい分数は、次のどれか。

を含むものとなる。（Φ係数45）

グループJ は「分数と小数の関連的理解と算法」という内容となっている。

第７番目に選ばれるグループは、グループＲと名付けた。

問題４－１０）　$a + b \times c$　と　$a \div b \times c$　に等しい式

を核として

問題４－１１）$\frac{x}{3} - \frac{2y-1}{2}$ の答えは、次のどれか。

を含むものとなる。（Φ係数45）

グループR は「文字計算の規約がわかる。因数分解や通分が出来る」という内容となっている。

第８番目に選ばれるグループは、グループＴと名付けた。

問題３－１４）次の①、②の式に等しい式は、どれか。

① $\frac{3x+2}{3}$　　② $\frac{1}{5}(5x+4)$

を核として、

問題３－８）　$a \times ab$はａの①倍　、$a + ab$はａの②倍

を含むものとなる。（Φ係数42）

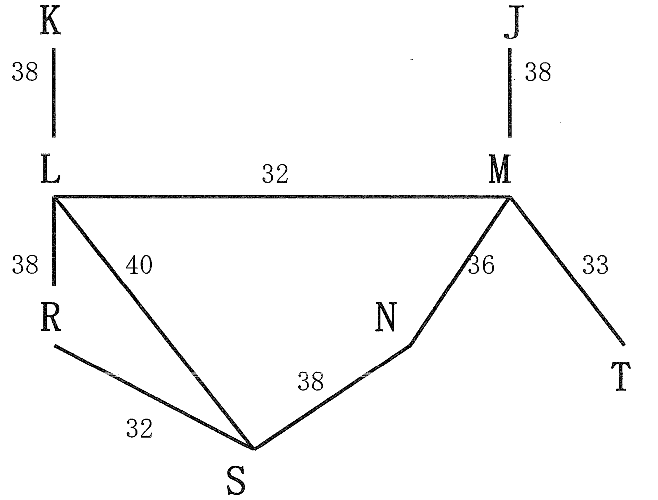
グループ Tは「いろいろな式が約束に従って活用できる」という内容となっている。

以上、結果として次の8つのグループに分けることができた。

グループＬ；式の規約・意味がわかる。立式が出来る
グループＮ；変数的な数量関係が読みとれる
グループＭ；倍の考えが出来、割合、比がわかる。
グループＫ；負の数の意味がわかり、計算が出来る。
グループＳ；方程式が解ける。グラフから数量関係が読みとれる。
グループＪ；分数と小数の関連的理解と算法
グループＲ；文字計算の規約がわかる。因数分解や通分が出来る。
グループＴ；いろいろな式が約束に従って活用できる。

各グループの核となる問題の平均正答率を、より低い方が生徒にとって難解であると見て、下方に書くことにした。次に、グループの核となる問どうしのΦ係数から、例えば、グループＬの核３－１２とグループＫの核５－１０とのΦ係数が０．３８であることより、グループＬとグループＫの相関を０．３８というようにし、書き並べると、下図の様なクラスター系列図ができる。

【文字（式）への抽象化の２系列】



数値は核の問題間の相関係数（Φ係数）を100倍したもの

高校数学学習上の最大の障壁箇所である、数から文字への抽象化についてこの系列から次のことが明らかになった。

①文字を変数ととらえるＪＭＮ系列と、文字を定数的にとらえるＫＬ系列がある。
②文字を変数的にとらえるＪＭＮ系列を分数および分数に表される諸概念が支え、文字を定数的にとらえるＫＬ系列を正負の数の発想が支える。

すなわち、

数から文字への抽象化の過程において、
ある特定の数（量）で考えていたことがらを文字で表すという「文字式での定数的側面」と、いくつかの数(量)をあてはめて考えていたことがらを文字で考えてみるという「文字式での変数的側面」の二つの側面が、異なるグループとして選び出された

ということである。

つまり、文字（式）への抽象化には、変数的側面と定数的側面の２系列があり、定数的側面は、文字を定数的なものとしてとらえ、代数的ルールに従って計算するものであり、変数的側面は、文字を量を伴ったものとして自由に変化させたり、変数的にとらえることによって、数としてのセンスを持った文字概念を持つことである。そして、定数的側面は、主として、整数(負数)の理解に支えられており、変数的側面は、分数に、また分数表現での割合・比（比の値）、倍概念の理解に支えられている。

更に、文字（式）の理解には、変数的側面と定数的側面の２系列が、統合、結合また再分離、再結合、再統合を繰り返しながら形成されていくということを解析的に明らかにできたわけである。

この２系列の、定数的側面と、変数的側面について次に更に詳しく検討する。

第２章　文字概念形成の二系列

【１】文字（式）の定数的側面

【概要】文字の定数的側面をみる。グループＬ（式の規約･意味がわかる。立式ができる）の核となるのは、全７５問のなかで最も相関が高い次の２問である。

問題３－７）「１箱２０個入りのリンゴをｎ箱買ったら、５個のおまけがあった。全部でリンゴは何個か」

問題３－１２）「ａはａの（　）倍、－ａはａの（　）倍」

この２問の相関がこのように高い理由をグループＬ（式の規約･意味がわかる。立式ができる）を支えるグループＫ（負の数の理解がわかり、計算ができる）との関連で探る。そして、立式を自信を持って答えられるためには、

・記号「＋」「－」が多義的に使われていることを認識すること

・数直線上に代数式ａ＋ｂが基準ａからｂだけ大きい数として位置づけられること

が重要であるととらえた。

先ず、文字の定数的側面をみる。クラスター解析において、グループＬ（式の規約･意味がわかる。立式ができる）は数から文字への抽象化の過程で、最初に抽出されたグループである。このグループは、クラスター系列からみると、グループＫ（負の数の意味がわかり、計算が出来る）に支えられている。

グループＬは、次の問題３－１２）が核となり、この問題３－１２）と相関が高く、強く結びつくのが問題３－７）である。この相関係数６１は、７５問どうしの相関係数の表の中で、最も大きい値となる。

問題３－１２）

$$\begin{cases} \text{ａはａの（①）倍} \\ \text{－ａはａの（②）倍} \end{cases}$$

ア．$\begin{cases} \text{①０} \\ \text{②－２ａ} \end{cases}$　イ．$\begin{cases} \text{①０} \\ \text{②マイナス} \end{cases}$　ウ．$\begin{cases} \text{①１} \\ \text{②－１} \end{cases}$　エ．$\begin{cases} \text{①１} \\ \text{②マイナス} \end{cases}$　オ．ア～エにはない。

問題３－７）

１箱２０個入りのリンゴをｎ箱買ったら、５個のおまけがあった。全部でリンゴは何個か。

ア．２５ｎ　イ．２０ｎ＋５　ウ．２０(ｎ＋５)　エ．２０＋ｎ＋５　オ．ア～エにはない。

問題３－１２）は、ａという文字がａの１倍、－ａはａの（－１）倍ととらえることができるかどうかを問うものであり、当初は規約だけの問題だと考えていたが、驚くべきことに最初に選ばれる問題グループとして抽出された。

この問題３－１２）は、点双列相関係数が６８と高く、基礎問題全体への影響は極めて

大きい。そして問題３－７）は立式を問い、文意が読み解け、「式のフォーム」として認識できるかがポイントとなる。
更に、問題３－７）に次いで問題３－１２）と相関の高いのは次の問題３－１３）など式の形、すなわち「式のフォーム」の成り立ちを問うものとなっている。

問題３－１３）次の①、②の式に等しい式はどれか。

①２＋３ｘ　②３（ｘ＋２）

ア．①ｘ×ｘ×ｘ＋２
　　②（ｘ＋２）（ｘ＋２）（ｘ＋２）

イ．①５ｘ
　　②（ｘ＋２）（ｘ＋２）（ｘ＋２）

ウ．①ｘ×３＋２
　　②（ｘ＋２）×３

エ．①ｘ×ｘ×ｘ＋２
　　②３ｘ＋２

オ．ア～エにはない

このように、このグループＬの核の問題３－１２）は立式や「式のフォーム」を決めることに深く関連することが判明する。なぜ、このように関連するかをみていく。

クラスター系列より、グループＬ（式の規約･意味がわかる。立式ができる）がグループＫ（負の数の意味がわかり、計算が出来る）をベースにしていることから、正・負の数について検討していく。

生徒にとって、正・負の数は、すぐ計算という意識が強く、ＳＬもすばやく計算ができ、出来もかなりよい。
例えば、次の問題２－１２）は平均正答率８５と高い、しかし点双列相関係数は３９と低く、全体への影響は低い。この問題ができても、基礎的な概念形成と関係があるとはあまりいえないことを示す。

問題２－１２）次のａ，ｂの値はいくらか。

－３－２＝ａ
－３＋２＝ｂ

ア．①ａ＝－１
　　②ｂ＝－５

イ．①ａ＝６
　　②ｂ＝－６

ウ．①ａ＝－５
　　②ｂ＝－１

エ．①ａ＝５
　　②ｂ＝－５

オ．ア～エにはない

計算の仕方を生徒に尋ね、また、生徒の反応を見ていると、次のような計算ルールを覚えてすばやく計算するケースが多い。
式の中の＋（－）と－（＋）なら「－」、－（－）なら「＋」と直し、
２数の符号が同じであれば、２数を「たし」共通の符号をつける
２数の符号が異なっておれば、（絶対値の）大きい数ひく小さい数の値を求め、（絶対値の）大きい方の数の符号をつける

例えば、－５－（－３）であれば、－５＋３として、－５と＋３という２数が異符号なので、５から３をひき、－５の方の符号「－」をつける。
ところが、このルールにより計算することは、－５と＋３という分離した２数の間の関係を考え、今までの「たす」「ひく」に複雑なルールが加わった感覚である。２数を用いたゲームをしているような状況である。負の数も混じった数の和・差という感覚が希薄な生徒が多い。
このことは、正・負の計算がスムーズにできる生徒でも「数ａより３大きい数は？」という問に、「ａ３」という式の答が出てくることからも窺われる。負の数の定義および計算ルールを説明を受けた後でも上のように'計算の定型化'をする故のマイナス面であろう。そして、そのことは定義に関わる次の問題２－１１）が極端に平均正答率が低く(１５)、誤答者が正答者の２倍以上となる。

問題２－１１）次の［　］にあてはまる数はどれか。
① ０より－３小さい数は［ ① ］
② －５より－３小さい数は［ ② ］

ア. ①－３ ②－８　イ. ①－３ ②－２　ウ. ①３ ②－８　エ. ①３ ②－２　オ. ア～エにはない。

		あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	① -3 ② −8	64	19	2	0	1	86
イ	① -3 ② -2	8	8	3	0	0	19
ウ	① 3 ② -8	2	3	0	0	0	5
エ	① 3 ②-2	22	13	1	0	0	36
オ	ｱ～ｴにはない	0	0	2	0	0	2
無答		0	0	0	1	0	1
計		96	43	8	1	1	149

そして、点双列相関係数、ある問題の正答・誤答と全正答数との間の相関係数では、

	あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	13	－39	－20	※	－7	－18
イ	－7	－19	－19	※	※	－26
ウ	9	－4	※	※	※	2
エ	42	6	9	※	※	41
オ	※	※	－1	※	※	－1
無答	※	※	※	2	※	2
計	44	－35	－20	2	－7	

※は該当者なしを表す。

正答のエ）よりも誤答のア）の方が選択者が多い。自信ありでは正答者２２人の約3倍の生徒が誤答を選んでいる。点双列相関係数でみると、正答であれば自信度にかかわらず正の値が出る。そして、自信ありのレベルでは、この問でも、誤答であっても１３となるが、正答であれば４２と大きく差がでる。このことは、この問題を正答することが基礎項目が出来るかどうかに大きく影響を与えるものと考えられる。そしてＳＬには、この負の数の定義が重要であるにもかかわらず浸透していないことを示すものである。すなわち、「－３小さい」の小さいという表現が、「小さい」という約束反転を意識せず、－３行ったところということ、もしくは、計算０＋（－３）で－３ととらえている。また、②については、－５から（－３）なので、計算－５＋（－３）で－８ととらえていると思われる。
この原因は「大きい」「小さい」という言葉に無頓着で注意を払わない。そして、０を基準として正の方向に、その逆に負の方向にという、負の数の定義に関わるところが、意識していない生徒が多いことがわかる。上述のように、ルールをもとに安易に計算ができる故であろう。

この負の数の定義が不安定なことは基準としての「０」のとらえ方にも大いに関係する。実際この問題２－１１）と相関が高いのが次の問題３－６）である。

問題３－６）次の数のなかで「一番小さい数」は何か

－０．６、０、－$\frac{2}{3}$、　$\frac{1}{3}$　、０．３

この問題で「０」を「何もないもの」ととらえ、「０は何もないからすべての中で一番小さい」として選ぶ生徒が多い。数直線の基準（位置）として０をとらえさせ、各数を数直線上にとらえさせる、０を「基準とする数」ということを明確にし、数として数直線に正しく位置づけることの重要性が浮かびあがる。

ここで、負の数の導入について振り返ってみる。負の数の定義は、身近な約束の逆で導入される場合が多い。
例えば、東に５km行くことを＋５kmと表すと、方向が逆の西に５km行くことは東へ－５kmと表す。というように、約束の逆転は記号「－」をつけ、負数表示として表し、数直線上では基準の０をはさんで対称な位置を表すことを確認させる。
このことから、例えば、逆転の逆転、「－」の「－」が「＋」となることが次のような図解などで説明される。

逆 { 東へｂｍ
↓
東へ－ｂｍ }　＝　西へｂｍ
↓
西へ－ｂｍ } 逆　＝　東へｂｍ

ところが、実際問題として、ＳＬ生徒には、このような論理を追うことはかなり難しい。それ故、（－）×（－）は（＋）などの結果だけ覚えるということになりがちである。論理を正確に読み取らせることにもかなり時間をかけることが必要がある。ところで、

東に対して西というように、お互いに逆のことを記号「－」を付けて表す。この記号「－」を付けた－ａがａの－１倍と「倍」で見れるのが問題３－１２）であった。
問題３－１２）で－ａがａを－１倍するというように、スカラー倍で動的に捉えられることは、逆の方向にａだけ移動していることを認識していることを示し、数直線上では原点をはさんで対称な位置に移すと明確にとらえられることと見られる。このことは、「２大きい」は「－２小さい」と同じ、「ａ大きいこと」は「－ａ小さいこと」と同じというように、－１倍すれば大小が逆となること、－１倍することによって大小逆転、大→小、小→大となることが正確に判断出来れるものと考えられる。

このように、問題３－１２）は記号「－」が、負の符号、ひくなどに加え、－１倍をも含み多義的にみれるや否やを示しているものと見られる。

問題２－１１）② については基準（－５）よりの大小を見たが、これは式の表現に通じる。このことを、更に次の問題２－１５）で考察する。
問題２－１５）は、グループＫ（負の数の意味がわかり、計算が出来る）のなかで、グループＬの核の問題３－１２）と相関が一番高い。この問題は正答率４５と低いが、点双列相関係数も６２と高く、基礎問題全体へ影響も大きい。

問題２－１５）

次の（例）で、②は①のＢの数値を基準として表したものである。この（例）にならってａ，ｂを求めると、次のどれになるか。

（例）	Ａ	Ｂ	Ｃ		Ａ	Ｂ	Ｃ
①	２７	３５	４８		－７	－３	ｂ
②	－８	０	１３		ａ	０	５

ア．ａ＝－１０、ｂ＝－２　イ．ａ＝４、ｂ＝－８　ウ．ａ＝－４、ｂ＝２
エ．ａ＝－４、ｂ＝－８オ．ア～エにはない。

		あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	①a=-10②b=-2	１	０	２	０	０	３
イ	①a=4　②b=-8	６	８	２	０	０	１６
ウ	①a=-4 ②b=2	６６	１５	１０	０	０	９１
エ	①a=-4 ②b=-8	４	３	５	０	０	１２
オ	ｱ～ｴにはない	６	１３	７	０	０	２６
無答		０	０	０	１	０	１
計		８３	３９	２６	１	０	１４９

（表）

そして、点双列相関係数は、

	あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	4	※	－6	※	※	－2
イ	－9	－16	－14	※	※	－23
ウ	62	－25	－27	※	※	34
エ	－8	※	－24	※	※	－20
オ	5	－9	－3	※	※	－6
無答	※	※	※	－14	※	－14
計	59	－31	－37	－14	※	

(表)

※は該当者なしを表す。

点双列相関係数から、この問題は自信をもって正答しないと基礎事項習得に、とりわけ文字式のとらえ方に支障をきたすものと考えられる。

この問題は、数直線をイメージさせ、基準からのずれを読み取らせるねらいがある。解への流れは、ａについては、

①列の　－７は－３よりいくら小さいかを考え、－７－（－３）で－４、従って、－４

または、－３は－７よりいくら大きいかを計算し、－３－（－７）で４、従って、ａは０より４だけ小さい数なので－４と求めていく。

ｂについては

５は０より５大きい数なので、ｂは－３より５だけ大きい数となり、－３＋５で２

このように数直線との対応を意識し、解答を進めていくことを狙っている。ところがＳＬは、上の考察から、

ａは計算－７－（－３）で－４、ｂは５大きいと言い換えなくて－３と５で－８としたと考えられる。－３＋５、－３－（－５）の計算間違いの可能性もあるが、－８が－３の右にあって違和感を感じないなど、いずれにしても数直線のイメージ（右ほど大きい）が描けていないことを示す。計算だけで答えているものと思われる。

次に、この問題を解く過程で表れる「～よりｂだけ大きい」「～よりｂだけ小さい」という表現に着目したい。これらの問題は、次のような形に文で表現し、それを式で表さねばならない。

表現★；ＡよりＢだけＣなる状況を問う

具体的に式表現では、Ａ、Ｂは記号「＋、－」付きの数、そしてＣには繋ぎの「大きい、小さい」が入る。Ａについては基準を表す符号付きの数が、ＢについてはＣと関連し、Ｂが正であればＣの状況（大きい、小さい）を変えないが、Ｂが負であれば約束の逆転の符号を含むものとなる。そしてＣは状況（大きい、小さい）を表す「＋、－」が入ることとなる。

東に対して西というように、お互いに逆のことを記号「－」を付けて表す。この記号「－」をつけた－ａがａの－１倍と倍で見ることができるかが問題３－１２）であった。約束の逆転とともに－１倍したものと結びつけられ、記号「－」が、負の符号、ひく、減るなどに加え、このような倍の意味でもとらえられる多義的なものとしてとらえられるかということになる。

この$\boxed{表現★}$で、記号「＋」「－」は「符号」「加える／引く」だけでなく、「大きい／小さい」「規約の逆転」そして「倍」などの様々な意味をもち、同じ記号でありながら様々に使い分ける必要がある。このように$\boxed{表現★}$を式化したものは、正負の計算そのものを問うており、立式の原型でもある。ここに、ｐ１６にある問題３－７）と問題３－１２）との結びつきがあると考える。すなわち、

記号の多義性を踏まえた正負の数の演算形式に立式の原型が現れているものとみる。

更に、基準ａに対して、ａよりｂだけ大きい数（量）をａ＋ｂと書き表されていることを意識している生徒と単に形式的な表現と理解している生徒では、以後の代数式の運用は異なるものと思われる。
このことをチェックする手段として、
「３－ａは３より（　　）大きい」、もしくは、「３－ａは３より（　　）小さい」や
「ｂ－ａはｂより（　　）大きい」、もしくは、「ｂ－ａはｂより（　　）小さい」
などの問いかけは有効であろう。

これらを踏まえ立式が自信をもって定着出来る生徒は、多くの問題練習により、また教科書などの前後をよく見ること等により体得するであろうと思われる。ところが、ＳＬは、式の成り立ちと整式の計算（展開など）を関連づけ、結びつけることなく、整式の計算を形式的に進めていき総合的な理解とならないものと考える。

グループＬ（式の規約・意味がわかる。立式が出来る）の中心となる問題３－１２）がいかに「式のフォーム」と結びつくかを探ってきた。３－１２）と２－１５）の関係から、記号「＋」「－」が単に演算記号としてのみでなく、符号、倍、そして、代数式ａ＋ｂが数直線上に「ａよりｂだけ大きい数」という表現で位置づけられること、このことが、安定して式の形をとらえることができていくものとみる。すなわち、文字式の安定した理解のためには正・負の数の演算形式が大いに関連すること、とりわけ、繋ぎの記号「＋」「－」が多義なものと認識出来ることがその鍵となることを見た。正・負の計算を、数直線での対応を踏まえて意味をわかりつつ理解することが代数式ａ＋ｂの理解には欠かせないということと考えられる。
従って、これらのことを定着させるためには、
・記号「＋」「－」の多義性を強調する。
・逆転の論理を使うことに慣れさせる。
・計算式をすぐに計算してしまうのではなく、計算　２－５も、２＋（－５）と和の形に変換させ、一旦眺めさせる練習が必要である。
・例えば、３より－５大きい数を式で表させる、もしくは、３＋（－５）を言葉で言わせるなどを通じて、文字式ａ＋ｂの形成の理解を深めるようにする。
・正負の数の計算において、数直線と対応して、基準との関わりで理解させていく。
などのことが必要と考えられる。

このようにして、２数の和、差の式が代数式ａ＋ｂのモデルとしてみれることが、代数式ａ＋ｂが「一つに見れる」に繋がると考える。一つにみることについては、第４章で扱う。次に文字（式）の変数的側面についてみる。

【２】文字（式）の変数的側面

【概要】文字概念形成上の変数的側面をみる。

文字概念形成上の変数的側面の中心となるのはグループＮ（変数的な数量関係が読みとれる）である。そして、このグループの核となるのは次の問題５－５）である。

問題５－５）ａ＞０、ｂ＜０のとき、次の①、②の式の値はどうなるか。

①ａ－ｂ　　　②ｂ－ａ

この問題を自信を持って正答とするためには、数値解析結果より、多様な数を想起でき数量関係を洞察できるであることが判明した。そして、このような数量関係の洞察ができるための考え方を、このグループＮを支えるグループＭ（倍の考えが出来、割合、比がわかる）およびグループＪ（分数と小数の関連的理解と算法）に探った。その結果、数量関係の洞察ができるためには、分数に表される「割合・比、倍概念」、とりわけ「倍概念」の理解が要であり、この倍概念理解のためには、グループＪの「分数が一つの数」として捉えられることであるとであるという結論にいたった。

定数的側面のグループＬ（式の規約･意味がわかる。立式ができる）では、ある数量の代わりに文字を用いて式に表現し、その表現された代数的側面が強調されているのに対し、このグループＭ、Ｎでは、文字式での変数的な側面が強調されている。
この系列の中心となるグループＮの核となるのは、次の問題５－５）である。
問題５－５）ａ＞０、ｂ＜０　のとき、次の①、②の式の値はどうなるか。
①　ａ－ｂ　②　ｂ－ａ

ア.｛①正の数 ②正の数　イ.｛①正の数 ②負の数　ウ.｛①負の数 ②正の数　エ.｛①負の数 ②負の数　オ．ア～エにはない。

解答の分布は、

	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア　①正　②正	０	２	１	０	０	３
イ　①正　②負	８４	３１	１３	０	０	１２８
ウ　①負　②正	１	２	２	０	０	５
エ　①負　②負	２	２	０	０	０	４
オ　ｱ～ｴにはない	３	４	２	０	０	９
無答	０	０	０	１	０	０
計	９０	４１	１８	０	０	１４９

点双列相関係数（総得点との相関係数）については次のようになる。

	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	※	－１６	－１４	※	※	－２２
イ	７０	－３８	－４０	※	※	２２
ウ	－１０	－９	－１２	※	※	－１８
エ	１	－９	※	※	※	－５
オ	４	－５	－３	※	※	－２
無答	※	※	※	※	※	※
計	７１	－４６	－４４	０	０	

この問題では、文字にいくつかの数を当てはめたり、また、文字からいくつかの数を引き出したりして、数量関係を洞察できるかどうかということが核心となっている。

ａ＞０のときといえば、数学に熟練した人であれば、正の数をあれやこれやと多く思い浮かべるであろう。また、ｂ＜０のときも同様であろう。そこで、ａ－ｂの符号はと問われれば、ａ，ｂの数値とａ－ｂの数値との数量関係から、どの組合せを考えても正の数になるにちがいないと考えるであろう。文字に多様な数を当てはめたり、文字から多様な数を引き出したりして数量関係が洞察できるというのは、このような状況をいっているのである。

ところが、文字の習熟のできていない者になると状況が異なってくる。ａ＞０といえば、ａ＝１だけでこれを代表させようとし、ｂ＜０といえば、ｂ＝－１だけとなる。その他の場合があるということを当初には思っていても、特定の数に固定化してしまい文字から多様な数を引き出して考えてみようとはしない。これまでの調査によれば、このような、ただ一例で短絡的に答を合わせる者に、正答であるとの自信が持てる者は極めて少ない。

問題のクロス集計表と点双列相関表からみると、ほとんどの生徒が正答イを選択しているにもかかわらず、その $\frac{1}{3}$ 以上の者が自信をもって答えていない。しかも、自信のあるなしによって、総得点との相関に著しい差が見られる。ここに、文字の変数的なとらえ方に習熟の差が現れているのではないかと考えられる。

次の問題も同じクラスターに属する問題であるが、前問と同様に、変数ｘに多様な数が入るという意識がないと正しく題意が把握できないであろう。

問題５－１５）ｘとｙが比例し、その対応が次の表のようであるとき、次の①、②の問いにあてはまる数値は、どれか。

x	…	－３	…	０	…	３
y	…	－２	…	０	…	２

①　ｘの値が１ずつ増すと、それに応じて、ｙの値はいくらずつ増すか。

②　$x=\frac{1}{3}$ の時のｙの値

ア. ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{9}$　イ. ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$　ウ. ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{9}$　エ. ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{2}{9}$　オ. ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$

このように、変数に多様な数を想起でき、数量関係を洞察できるためにはどのような考え方が必要であろうかを探っていく。

このグループＮ（変数的な数量関係が読みとれる）を支えるのはグループＭ（倍の考えが出来、割合、比がわかる）であり、次のような問題で構成されている。

問題１－８）Ａ：Ｂ＝３：４のとき、Ａ：Ｂ＝１：（ ）

ア．３　イ．２　ウ．1.3　エ．$\frac{4}{3}$　オ．$\frac{3}{4}$

問題１－１１）５０kgの$\frac{2}{3}$は何kgか。

ア$\frac{100}{3}$ kg　イ．２５kg　ウ．７５kg　エ．３３．３kg　オ．7.5kg

問題１－１４）同じ重さのコインがいくつかある。３個の重さが１０ｇであるとき、７個の重さは何ｇになるか。

ア．$\frac{70}{3}$ｇ　イ．$\frac{30}{7}$ｇ　ウ．２３ｇ　エ．２３．１ｇ　オ．２４ｇ

問題１－８）は比の値を、問題１－１１）は分数に表現される割合を、問題１－１４）は比の概念の活用を問うているが、正答率は順に５８，５９，４９　そして、点双列相関係数は、６４，６１，５９　といずれも高い値を取る。

このグループＭの中心となり、核となるのは問題１－８）であり、点双列相関係数も一番高く、全体への影響も大変大きい。この問題１－８）の解答分布および点双列相関係数は以下のようになる。

		あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	３	０	０	０	０	０	０
イ	２	３	６	４	０	０	１３
ウ	1.3	０	１	１	０	０	２
エ	$\frac{4}{3}$	８６	３１	４	０	０	１２１
オ	$\frac{3}{4}$	４	３	５	０	０	１２
無答		０	０	０	１	０	１
計		９３	４１	１４	１	０	１４９

点双列相関係数（総得点との相関係数）

	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	※	※	※	※	※	※
イ	－６	－２５	－２１	※	※	－３３
ウ	※	－１３	－１１	※	※	－１３
エ	６４	－３０	－１２	※	※	４５
オ	３	－２５	－１９	※	※	－２３
無答	※	※	※	２	※	２
計	６５	－４９	－３３	２	※	

この問題は正答であっても自信をもっていないと点双列相関係数がかなり低く出る。自信を持って解答することが極めて重要であることが読める。

次に、この問題が、問題１－１１）問題１－１４）という数量関係把握に重要な問題を含む系列の中で中心的な役割を果たしている。このことは、数量関係を把握したり洞察したりするときの中心となる考えがここにあることが判明する。

すなわち、

Ａの数量３を基準とみるとき、それを１と見なせるか　また、そのとき、比較すべき他の数量Ｂはいくらになるか

という考えが、２つの数量間における関係の把握や洞察を行うにあたっての核心であると、つきとめられたわけである。特に、任意の数量を基準とみて、それを１と見なす考えは極めて抽象度の高いものであるが、これが数量関係把握の根幹をなすものと云える。

一般的に、２量Ａ，Ｂについて、Ａ：Ｂ＝ａ：ｂ　は　Ａを基準にとれば、

$A : B = 1 : \frac{b}{a}$　となり、Ａを基準とすると、Ａの「１あたり」に対してＢの割合が$\frac{b}{a}$となることを示している。

この割合をもとに次に進めるには、

ＢはＡの $\frac{b}{a}$ 倍であり、Ａがある値のとき、その値を $\frac{b}{a}$ 倍すればＢが求まるというように、２量間の関係を乗法的にとらえる必要がある。基準量の何倍という視点である。この倍概念は、除法的な見方である割合・比に対して乗法的見方である。そして、このグループＭの問題１－８）、問題１－１１）、問題１－１４）の間の相関が高いことから、この倍概念という見方と、割合・比が表裏一体になり自由に行き来できることが極めて重要であることがわかる。

このことは、ａ；ｂの関係を $\frac{b}{a}$ 倍ととらえることにより、割合・比の「静的」に対して、動きが伴って「動的」にとらえることが可能となるということである。

この(基準量)×(比の値)で掛ける数（比の値）が整数であれば、その意味は累加の考えで解釈でき、理解できる。ところが、掛ける数（比の値）が分数となったときは「分数」を数として理解していないと意味がわからない。しばしば、分数を数としてとらえず、「いくつ分にわけたうちのいくつか分」という「もの」、または分割の操作として、もしくは極端な場合「２階建ての数」としかとらえられていない場合ではすんなりと受け入れられない。このように一般の積が構成されるためには、先ず分数倍が理解できることが要であり、そのうえで分数が数として把握される必要がある。ここにこのＭグループのベースとなっているのは分数理解を問うグループＪ（分数と小数の関連的理解と算法）となるゆえんであろう。数として把握できるかは、数直線上に正しく位置づけられるかである。これについて検討する。

分数については、しばしば分数計算の出来、不出来が取り上げられるが、分数計算を問う

問題１－５）$3-\frac{2}{9}=$

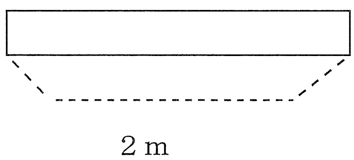
ア．$\frac{1}{9}$　　イ．$\frac{7}{9}$　　ウ．$\frac{25}{9}$　　エ．$\frac{2}{3}$　　オ．$2\frac{8}{9}$

については正答率８１と高いが、点双列相関係数３９となり、文字概念形成における全体への影響は低いことがわかる。計算問題は形式的な方法、例えば「分数を小数に直すならば（分子）÷（分母）」というような条件反射的な方法で身につけているかどうかが影響しているようだ。

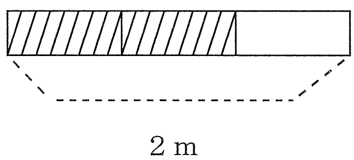
分数は量の操作を通じて、量から脱却し比（比の値）、数として認識せねばならない。その導入の分割分数の扱いについての問題点は、例えば、$\frac{2}{3}$ を「１を３つに分けた２つ分」とは読めるが、「２を３つに分けた１つ分」と読めないことである。このことは、次のような設問で、多くのＳＬ達が右の［図２］ように表示することに端的に表れる。

［問］左の［図１］２ｍのひもについて $\frac{2}{3}$ ｍを表示せよ。

［図１］

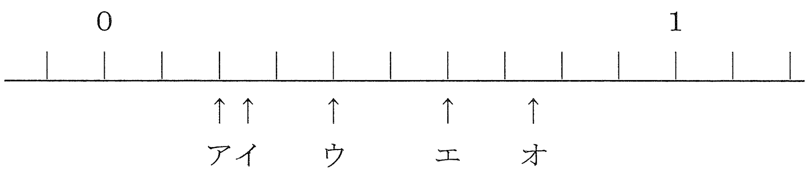


［図２］



グループＪの核となる次の問題１－１）と問題１－２）についてみる。

問題１－１）数直線上に、$\frac{1}{4}$ を矢印で示すと、次のどれか。



問題１－２）数直線上で、矢印のところは、次のどれか。

ア．0.14　　イ．0.29　　ウ．$\frac{1}{7}$　　エ．$\frac{1}{2}$　　オ．$\frac{2}{7}$

問題１－１）は、分数の数直線表示問題で、平均正答率８７（点双列相関係数３８）であり、ほとんどの生徒が自信をもって正答していることがみれる。ただ、数直線の数とは見ずに、分割分数（分割し４つのものの1つ分）もしくは量分数とみていても正答が可能である。そのことは、問題１－２）で、平均正答率３６（点双列相関係数５１）と極端に正答率が悪くなることから、分数を分割分数や量分数で理解し、数としての認識に至っていないものが多くいることがうかがえる。

問題１－２）では、（全体の２を意識せず）７つにわけた１つ分として $\frac{1}{7}$、もしくは量分数として $\frac{1}{7}$（m）の長さとみて $\frac{1}{7}$ と出している生徒が多い。

半数近くの46%（69名）が $\frac{1}{7}$ を選んでおり25%（38名）が自信をもって選んでいる。

これらの生徒は、全体を７つに分けた１つという分割操作にとらえていると考えられる。数として、数直線上に目盛りとしてとらえていないことを示す。

１－２）の解答分布

		あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	0．14	0	0	1	0	0	1
イ	0．29	0	3	1	0	0	4
ウ	$\frac{1}{7}$	３８	２７	4	0	0	６９
エ	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0	0	2
オ	$\frac{2}{7}$	５３	１８	2	0	0	７３
無答		0	0	0	1	0	0
計		９１	４９	9	0	0	１４９

点双列相関係数（総得点との相関係数）については次のようになる。

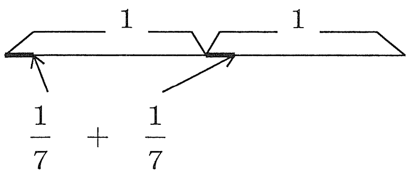
	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	※	※	－４	※	※	－４
イ	※	５	－１１	※	※	－１
ウ	４	－３６	－１３	※	※	－２８
エ	※	－１０	－１４	※	※	－１８
オ	５１	－２１	－５	※	※	３３
無答	※	※	※	※	※	※
計	５４	－４４	－２２	0	0	

$\frac{2}{7}$ を「１を７つに分けた２つ分」とは読めるが、「２を７つに分けた１つ分」と読めないことが問題である。

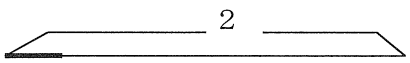
$\frac{2}{7}$ は $\frac{1}{7}$ ＋ $\frac{1}{7}$ のように $\frac{1}{7}$ が２個、$\frac{1}{7}$×２ とみられるとともに、２の $\frac{1}{7}$（倍）と

全体を２としたときの$2\times\frac{1}{3}$の分数倍表現と一致する。このことを次の（例）などで丁寧に説明し、このことにより、累加の延長として分数倍、そして倍概念による乗法の構築につなげていけるようにする必要がある。

（例）



⇔　１の $\frac{1}{7}$ が２個で $\frac{2}{7}$　　$\frac{1}{7}\times 2$



⇔　２の $\frac{1}{7}$ 倍 で $\frac{2}{7}$　　$2\times\frac{1}{7}$

このように$\frac{2}{7}$が$2\times\frac{1}{7}$というように分数倍として解釈でき、掛ける数が分数となっても理解できることとなるが、分数倍が納得できるからといって実数倍が理解できるとは限らない。掛ける数、分数が数として認識できるためには、この分数倍を踏まえ、数直線上に正確に位置づけられる必要がある。

量から数への脱皮を諮り、数として定着させるためには数直線に目盛りとして位置づける必要がある。数直線は、例えば $\frac{1}{3}$ のように無限小数なども正確に表示でき、一つの数という認識が持たせられ得る。ところが、分割分数からすぐに数直線でとなると分割と混乱する生徒がいる。分割分数及び量分数は、幅を持つ間隔というイメージが強く、数としては目盛り付きの定規の位置（目盛り）という感覚が要る。
そのため、変わらない比率としての数としての分数をイメージさせておく必要がある。
そこで例えば、スケジュールで自由時間の $\frac{1}{3}$ をゲームをしようとしたとき、１時間が倍の２時間になったとき、ゲームに充てる時間も連動して２倍に変化する。ここで、ゲームに当てる時間比率 $\frac{1}{3}$ は共通なことと捉え、「全体が変化した」とき、「変わらない比率」、比の値としての分数が浮かびあがり体得できるようにしておきたい。そのうえで数直線上に分数を目盛りとして位置づけたい。

ここまで分数を数として把握し、倍概念をもとにした乗法形成がなされ、そのことをもとに多様な数が算出に繋がることをみてきた。

なお、問題１－２）でイ.0.29($\frac{2}{7}$ =0.2857‥)と小数値で解答したもの(4人)は、小数で

ないと数でないという生徒である可能性が大であり、注意が必要である。ちなみに点双列相関係数では、その数値が－１と極めて低い。このことは全体への影響力が少ないことを示す。分数と小数の対応は重要であるが、分数についての理解が「小数表示しないと数でない」かのようなとらえ方よりも、「それ自身、一つの数として把握できるようになることが文字への抽象の重要なポイント」になっていることにも配慮したい。

ここまで、高校で数学を学ぶ上での最大の難関、文字式へのアプローチの仕組み、そこから派生する関数、及び関数的考え方を定着させる方途を数値解析的解析をもとに探ってきた。

文字への抽象化への過程は二つの系列、定数的側面と変数的側面があり、それぞれの特徴がある。さらに、定数的側面は式の形が認識できること、変数的側面は倍概念を伴ってその理解に至ることを明らかにしてきた。

このことを治療に活すための方策を探る。ここで、視点を変え、言語学との関連を考察する。

第３章　言語学からの知見

【概要】ヘレン・ケラーの言語獲得の過程を通じて、言葉の分節機能を取り上げた後、コノテーション、メタ言語についても触れる。

次に、語と語との関係で、言語学者のソシュールによると、いろいろな言語活動（会話、作文等々）で用いられる語の結びつける方法に連合軸と統合軸の２つあり、更に、

失語症の研究を通じて、ヤコブソンは比喩との関係づけて「統合軸」を「換喩的」色彩の強いものとして、「連合軸」を「隠喩的」色彩の強いものとして位置づけている。そして、連合軸の改善策としてメタ言語が、統合軸の改善策として、繋ぎ記号、代名詞と認識を深めていくこと（コノテートの力をつける）が重要であることなどを論じている。（[16]）

また、漱石、芥川の文より、筋道と語の例をあげた後、数学における、文字への抽象化の２系列のうち、「定数的側面」は「統合軸」、「変数的側面」は「連合軸」と見られることを述べる。

言語のもつ力、すばらしさを「新しい視力」という言葉で表現したのはヘレン・ケラーである。ヘレン・ケラーの自伝によると、

家庭教師のサリバンは“water”と手に書くことで流れる冷たいものを「waterなるもの」として教える。ヘレンはそのことで、“water”によって流れる冷たいものとそれ以外のものと区別できるということとともに、ものには名前があり、その名前を使うことによって世界が秩序化されること、言葉が織りなす言語空間に参加出来ること、他人と共通の認識がもてるというすばらしさを予見した。その驚きを

「あらゆるものには名前がついており、そのどの名前も新しい思考を生み出すものであった。二人が家に帰ったとき、私の手に触れるものはすべて生命に打ち震えているように思われた。これは、私に訪れてきた不思議な新しい視力によって、すべてのものを見たからであった。」と表現している。

この言語の秩序化、言語の織りなす言語空間の秩序化は、言葉の分節機能による。

「動くもの」と「動かないもの」、「water」と「non-water」、「やわらかいもの」と「やわらかくないもの」のように差異化による文節機能によって類別が行われる。

ある言葉の分節によって、言葉の類別、カテゴリーにわけられ秩序化がなされ、そのことにより言語で作られた文化、言語文化という世界が形成される。このカテゴリーが織りなす言語空間に各語、句は位置づけられる。また、このカテゴリーの重なりから、語、句の含意（コノテーション）ということも生じる。

言葉にはデノテーションとコノテーションがあり、他の語へ換言できる、いわゆる辞書的意味、これをデノテーションという、これに対して、比喩等により結びつけられる含意を持つ語が多く、これをコノテーションという。

例えば、「海」という語について考えてみる。「海」のデノテーションは地球上の陸でない部分で水で構成されている所となる。一方、「海」という語の意味に母性というものもある。すなわち、様々な生物の命をはぐくみ、誕生させている、その意味で象徴的な意味で「母性」という意味、コノテーションとしての意味をもつ。

コノテーションは、広く記号とその意味との関係でみると、ひとつの語（記号）が多くの意味をもつということである。それに対して、同じ意味をもつものが、様々な語（記号）をもち、言い換えられるとき、メタ言語をもつという。同値なもので言い換えられるとき、例えば、犬に対して、dog、Hundなどはメタ言語である。一つの表現で多くの意味をもつのがコノテーション、一つの意味に多くの表現（表し方）をもつのがメタ言語といえよう。

次に、これら分節機能を持つ語彙と語彙との結ばれ方についてみる。

言語学者のソシュールによると、いろいろな言語活動（会話、作文等々）で用いられる語の結びつけ方法には２つあり、この２つの方法が様々な言語活動を支えるという。その１つが連合軸、もう１つが統合軸と称せられている結び付け方である。

第１の連合軸による結びつけ方とは、何らかの共通性（類似あるいは相反）によって語を結びつける仕方である。したがって、ある語にはその語と連合関係にある語の集合すなわち語群を考えることができる。まとまりをもった言説を作るとき選択される一つ一つの語は、それぞれの背後にそれと連合関係のもとにある語群が存在するといえよう。

第２の統合軸のある結びつけ方とは、言葉の流れ（文脈、話線）に沿ってどのように、一語、一語と語を前後に配列するかということを指す。一つの語はそれぞれの前にある語、後にくる語との前後関係によって結びつきをもちつつ、言葉は流れていくものといえよう。

文章に表れる語は、文の流れの中での語であり、語群の内の語でもある。語群に該当するのが「連合軸」といい、文の流れ、文脈、話の筋道に該当するのが「統合軸」、統合軸は文の流れのなかから適語を選び、連合軸は語群から関連する適語を抽出することとなる。

例でみると、

「ちょうどそのころ、この二つの国は、何かの利益問題から、戦争を始めました。そうしますと、これまで毎日、仲むつまじく、暮らしていた二人は、敵、味方の間柄となったのです。それがいかにも、不思議なことに思われました。」

（「２０」小川未明「野ばら」）

における「不思議な」という言葉は、文の前後関係から、二人の間柄の微妙な関係を指し示す適語として選ばれ、統合軸を保っている。また、一方、この語「不思議な」は「奇妙な」「ありえない」「ミステリアス」などという意味を持つ語群で連合軸をもっている。

更に、日常言語活動からこれらのことを見てみよう。

文を作るには筋道と語がいる。語をつなぐ筋にあたるのが統合軸で、語を言い換えるのが連合軸。いずれかが欠ければ適切な文が構成されない。

わかりやすい、的確な文を作るには、筋道と言葉がいるとも言えるであろう。手紙の例文集のような豊富な筋の流れをもっていること、そして、その筋を構成する適した的確な語を選ぶ。手紙を書く、連絡文を作るのも、伝えるべき内容を筋道を立て、的確な言葉を選び作っていく。また、文章を読み、その意味を理解できるのも、各語の意味がわかること、そして話の全体の流れがわかり、文全体の意味がわかる。このように、文を書くにも読むにも、文脈と語彙が組み合わされ、すなわち統合軸と連合軸が組み合わされて、文をそれらが支えている。

例えば、夏目漱石の「坊ちゃん」に、坊ちゃんと山嵐の会話がある。
（坊ちゃんは、山嵐の演説に感心をするとともに、要望を次のように云う。）
「美しい顔をして人を陥れるようなハイカラ野郎は延岡にはいないから・・・と君は云ったろう」「うん」「ハイカラ野郎だけでは不足だよ」「じゃ何と云うんだ」「ハイカラ野郎の、ペテン師の、イカサマ師の、猫被りの、香具師の、モモンガーの、岡っ引きの、わんわん鳴けば犬も同然な奴とでも云うがいい」
（このことを受け山嵐が、次のように云う。）
「おれには、そう舌は廻らない。君は能弁だ。第一単語を大変沢山知っている。それで演説が出来ないのは不思議だ」「なにこれは喧嘩のときに使おうと思って、用心の為に取って置く言葉さ。演説となっちゃ、こうは出ない」「そうかな、然しぺらぺら出るぜ。もう一遍やってみ給え」「何遍でもやるさいいか。一ハイカラ野郎の、ペテン師の、イカサマ師の・・・・」
ここで、演説が能弁に出来ることと、単語を大変沢山知っていることを分離していることに注目したい。

演説が詰まりなくスラスラ出るのは、統合軸がしっかりしており、単語を大変沢山知って使えるのは、連合軸が豊かであるということであろう。

同じような例に、谷崎潤一郎と芥川龍之介の「小説において最も大切な要素は何か」の論争がある。
谷崎潤一郎は、「饒舌禄」において、「筋のおもしろさ。構造的美観が最も大切で、これを除外すれば、小説という形式が持つ特徴を捨ててしまう」と論じ、これに対して、
芥川龍之介は、「文芸的な、余りに文芸的な（「改造」）」において、「詩的精神を大切にするべきであり、話らしい話のない小説が通俗的要素の少ない純粋な小説」と反論している。谷崎は「筋を重視」ということで「統合軸」を、芥川は「詩的精神重視」ということで「連合軸」をそれぞれ重視しているとみれる。

文を書く、手紙を書くにも、例文集をもとにフォームを作り、例えば季節に合わせ語を変化させていく。時候の挨拶を求めるのは、連合の中からである。

この連合軸、統合軸を失語症研究と結びつけ、広く文化の中で位置づけようとしたのがヤコブソンである。

ヤコブソンは失語症研究を通して、この２つの軸の関係を、比喩の次元に移し、人間の言語を中心とする人間活動をモデル化している。ヤコブソンによれば、失語症には、語が次から次へと出てくるがそれらの語を順よくつなぐことができないタイプと、逆に「これをああして、それを～」のように話の筋を次々と作っていくが「これをああして、それを～」のような代名詞でなく名詞など具体的語が出てこないタイプの２つがある。
このことをベースとして考察を深めていく。

ヤコブソンの「言語の二つの面と失語症の二つのタイプ」（［16］）では、その主要なる主張は次の３点があると考える。（ヤコブソンは、相似性”similarity”、隣接性”contiguity”という表現をしているが、本報告では、相似性を連合軸、隣接性を統合軸と言い表す。）

① ソシュールの言語の二系列との関連
② 各軸の特性（各軸の退行する能力）
③ ２つの軸の比喩との連関

①については、「結合、選択、これらの２つの操作が言語の中で果たす基本的な役割はソシュールによってはっきり領得された」（［16］ p26）とあるように、ソシュールが明確にした言語の二つの機能を受けて、言語には結合と選択があることを明確にする。そして、失語症の二つの傾向のうち、選択の欠如が連合軸の異常に対応し、結合の欠如が、統合軸の異常に対応することを述べる。

②については、連合軸および統合軸の異常で退行する機能、能力を明らかにする。
先ず、連合軸だけの異常は選択力の欠如態であり、脈絡（統合軸）が残存する。これが進行すると接続詞や助動詞のように脈絡を構成するために役立つ語は生き残るが、他は退化する。更に、重症の場合、枠組み、伝達のつなぎ目だけが残される。すなわち、統合軸が残った失語症患者にとっては、言葉として生き残るのは「あれがそうして、そしてこうなる」のように
「繋ぎ」「接続詞」「代名詞」や「助動詞」ということである。そして、この「繋ぎ」「接続詞」「代名詞」（この逆順で崩壊する）の各々は階層（ヒエラルキー）をもつと言われている。階層は、例えば、「代名詞」であれば、単語を代名詞で指すレベルから、複文など複雑なものを代名詞で指し示すレベルへといったレベル差を表すものと考える。
このことと、失語症的退行は小児の言語音声の習得の鏡像をなすこと、つまり小児発達の逆の順序で示すということと考え合わせ、習得の初期段階で「繋ぎ」（links）、「代名詞」、により統合力をつけさせることは重要であることがわかる。そして、統合の形成には、まず「繋ぎ」が、次いで「代名詞」や「助動詞」という順でなされる。
他方、統合軸の異常は結合力の欠如態であり、次々と語を生み出すためには「メタ言語的操作（metalinguistic operations）」（ここでは、語や文を類義語、迂言法やパラフレーズによって解釈をすること）が必要である。

③については、比喩と２つの軸（連合軸、統合軸）との対応で、これも学習、習得していくうえでのヒントを与えてくれるものと思われる。連合軸は比喩論での隠喩的傾向が強く、換喩的傾向が弱い。逆に、統合軸は換喩的傾向が強く、隠喩的傾向が弱い。従って、連合軸に問題がある場合、隠喩的傾向が弱く、逆に、統合軸に問題がある場合、換喩的傾向が弱い、それぞれの傾向をもつ者への対処方法が役立つとみる。また、広く人間活動との関係において、言語を介する隠喩的のものとして、抒情詩、象徴的な芸術作品、それに対して換喩的なものとして、叙事詩、写実的な芸術作品というように対応するということも述べている。

ところで、数学における、文字への抽象化の２系列のうち、文字を定数的にとらえ代数式を構成していく「定数的側面」は、文の流れを繋ぎによって構成していく「統合軸」に対応し、そして文字を自由に変化させ数量関係を探る「変数的側面」は、言葉を次々と繰り出す「連合軸」に対応しているとみられるであろう。

このようにみると、上のヤコブソンの論説から、「定数的側面」に自信の持てないSL達には結合力の欠如として「統合軸」の補強が有効であり、言語学における「繋ぎ」、「代名詞」、「助動詞」に相当するものを数学においては何かをつきとめ、糸口とするべきと考える。また、「変数的側面」に自信の持てない生徒には選択力の欠如として「連合軸」の補強が必要であり、言語学における次々と語を生み出すためには「メタ言語的操作」であるということを数学的にどのように見るかを調べることが役立つと思われる。

更に、③を受け、本研究の治療にこれら比喩が有効に活用できるように整備することも課題である。

次章では、言語学における語のコノテーション、メタ言語的操作、語と語を結びつける方法としての連合軸、統合軸そしてヤコブソンの結果を受けて、統合軸を定数的側面、連合軸を変数的側面とみて、数から文字への抽象化の過程を見ていきたい。

第４章　言語学的知見を加味した治療についての提言

【１】連合軸　文字概念形成上の変数的側面

【概要】文字形成上の変数的側面を言語との関連で調べる。

言語学における連合軸は、次から次へと言葉が出てくることであったが、これが数学における文字概念形成上の変数的側面に相当する。実際、クラスター系列図に示すようにこの変数的側面のグループＮ（変数的な数量関係が読みとれる）の核となる次の問題５－５）などは、多様な数を背景として解答しないと自信を持った正答が得られない。

問題５－５）ａ＞０、ｂ＜０のとき、次の①、②の式の値はどうなるか。

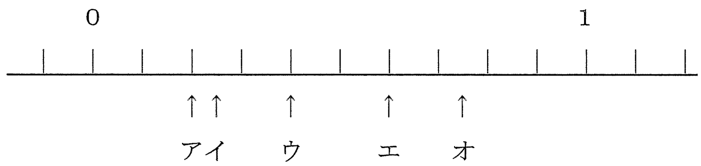
①ａ－ｂ　　　②ｂ－ａ

自信をもたせるための治療策として、ヤコブソンの失語症治療のために提示されている「メタ言語的操作」に相当するものは何かを探求する。

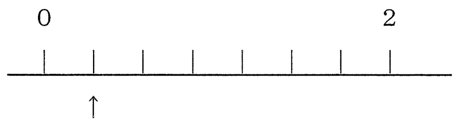
第２章の検討を受け、このグループＮがグループＪ（分数と小数の関連的理解と算法）に荷なわれていること、そして、調査問題１）の分割分数での理解から、分数が自然数などと同列の数として数直線上に認識できるためには調査問題２）での基準量を意識した理解が必要であること、そして、そのためにはグループＭ（倍の考えが出来、割合、比がわかる）での比の値を倍で理解することが鍵となること述べる。

このことから、「メタ言語的操作」は分数に表される「倍概念」を自由に使いこなせることであることを述べる。更に、多様な数値を文字に代入するに際して、文字表現ａｂがａとｂとの積を表していること認識を徹底させる必要であることにも言及する。

調査問題１）数直線上に、$\frac{1}{4}$ を矢印で示すと、次のどれか。



調査問題２）数直線上、矢印のところはどれか。　ア．0.14　イ．0.29　ウ．$\frac{1}{7}$　エ．$\frac{1}{2}$　オ．$\frac{2}{7}$



言語学における、連合軸、次から次へと言葉が出てくることは、数学でいえば、次から次へと数が出てくることに相当する。文字の変数的扱いに相当する。文字式の各文字に対して、次々と数を思い浮かべるのが、変数としての文字の扱いである。

文字式への代入がスムーズに出来ること、次々と置き換えていくことができることは、抽象と具象を自由につなげる橋渡しができていることとなり、式の表すものが具体的なものとの関連において認識できているものと考えられる。

ヤコブソンによれば、失語症のうち、話の筋は出るが言葉が次々と出ないタイプ、これを「連合軸の異常」としている。そして、次々と語を生み出すためには「メタ言語的操作（ metalinguistic operations）」（ここでは、語や文を類義語、迂言法やパラフレーズによって解釈をすること）が必要とある。また、

> メタ言語に頼ることは、言語の習得のためにも、言語の正常な機能のためにも、必要である。（[16]）

ともある。
上のように次々と数が出てこない状況を是正する、言語学での「メタ言語的操作」に相当するのは数学では何であろうか。

第２章でみてきたように、変数的側面の中心（核）となる問いは、次の問題５－５）である。

問題５－５） ａ＞０、ｂ＜０　のとき、次の①、②の式の値はどうなるか。
①　ａ－ｂ　②　ｂ－ａ

ア．$\begin{cases}\text{①正の数}\\\text{②正の数}\end{cases}$　イ．$\begin{cases}\text{①正の数}\\\text{②負の数}\end{cases}$　ウ．$\begin{cases}\text{①負の数}\\\text{②正の数}\end{cases}$　エ．$\begin{cases}\text{①負の数}\\\text{②負の数}\end{cases}$　オ．ア～エにはない。

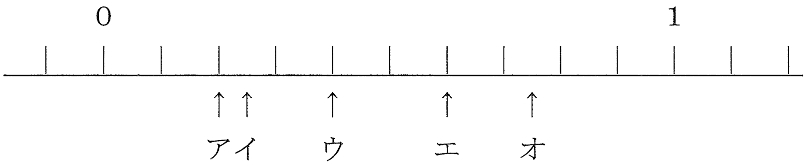
この問題を誤答する生徒の傾向としては、前述のように、数が固定的で次から次へと想起できないことであった。ａ＞０なら、ａ＝１だけ、ｂ＜０ならｂ＝－１だけというように代入する数が限られる傾向をもつことであった。この問題を自信をもって解答するためには、多様な数を背景として判断をしなければならないということであった。

第２章【２】では、このような多様な数を背景として様々な数が想起できるための要因を、この問題５－５）が属するグループＮ（変数的な数量関係が読みとれる）からグループＭ（倍の考えが出来、割合、比がわかる）そしてグループＪ（分数と小数の関連的理解と算法）へと文字への抽象化の系列を逆にたどって調べた。その結果、

> 様々な数を想起するためには’分数が数’として認識できること、そして、分数に表される割合、比、倍概念などの諸概念、とりわけ倍概念の理解が欠かせないことが明らかとなった。分数を分割分数、量分数だけではなく基準を意識し、数量関係を割合や、比を倍で捉えるものであるという認識が重要である。

ことが判明した。このことを踏まえ、この仕組みを更に詳しく見てみる。

問題１－１）数直線上に、$\frac{1}{4}$　を矢印で示すと、次のどれか。



問題１－２）数直線上で、矢印のところは、次のどれか。

ア．0.14　　イ．0.29　　ウ．$\frac{1}{7}$　　エ．$\frac{1}{2}$　　オ．$\frac{2}{7}$

グループＪの問題１－１）の数直線上に分数を表示することは、分数が数として捉えられてなくても、分割分数で考えることが可能であり、正答率は87と高い。ところが問題1－２）では、「基準量２を７つに分けた２つ分」そして、$\frac{1}{7}$ を数とみて、$\frac{2}{7}$ は２の $\frac{1}{7}$倍と読めることが必要となる。（問題１－２）の正答率は36と低くなる）

線分上の分割分数「いくつに分けたいくつ分」から出てきた分数を基準量（ここでは’２’）を意識した「基準量をいくつかに分けたいくつ分」というようにもつていくことが鍵となり、このことが分数を数として認識させることに繋がることと考えられる。

基準量との関連が洞察されるには、２量間の関連、とりわけ次の問題１－８）の比の問題が大きなウエイトを占めることが判明した。ところが、この問題１－８）でも形式的に解に至る可能性（後項÷前項）があるが、同じ設定で比の値を倍で捉えさせる問題１－１０）になると基準の分数倍が意識されねばならず、ＳＬ達には難解なものとなっている。（実際、問題１－８）の平均正答率は57.7であるが、問題１－１０）の平均正答率は32.6となり大きな差が出ている）更に、問題１－１０）は上の問題１－１）より問題１－２）との相関係数の値が高く、問題５－５）とも相関係数が高い。

問題１－８）Ａ：Ｂ＝３：４　のとき、Ａ：Ｂ＝１：（　）。

ア．３　　イ．２　　ウ．1.3　　エ．$\frac{4}{3}$　　オ．$\frac{3}{4}$

問題１－１０）Ａ：Ｂ＝３：４　のとき、ＡはＢの何倍か。

ア．３倍　　イ．$\frac{1}{2}$倍　　ウ．$\frac{3}{4}$倍　　エ．$\frac{4}{3}$倍　　オ．ア～エにはない

このことは、基準量を意識した分数表示ができるかどうかは２量間の関係が基準の倍で捉えられるかどうかにかかっているといえる。

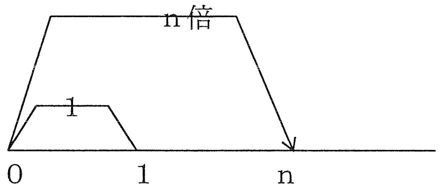
ここで、分数の数直線上への表示の道筋を振り返る。

例えば、$\frac{2}{3}$を ３つに分けた１つ分が２つ、$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{3}\times 2$とみる累加のレベル、（ＳＬ達もほとんど理解できる）、これをＡレベルとする。次に、$2\times\frac{1}{3}$ と、２の$\frac{1}{3}$（倍）と、分数倍で解釈できるレベル、これは前述の１－２）が自信をもって解答できるレベルこれをＢレベルする。そして、「２の$\frac{1}{3}$」 の２が基準量「１」と見ることができ、$1\times\frac{2}{3}$というように、１の$\frac{2}{3}$（倍）と、基準量「１」の$\frac{2}{3}$と、スカラーとして数直線の位置への対応ができるレベル、これをＣレベルとする。意識する、しないにかかわらずこのように同じ数をＡレベルからＢレベルそしてＣレベルへと到達することによって、分数が多面的に見ることができるようになり、数としての認識が高まっていくものと考える。

そして、このＣレベルでは、数ｎが、1×ｎとなること、「基準量の何倍」なる表現になっていることに注目する。

数として数直線上に表示できるのは、数（ｎ）が、１×ｎとして、基準量１のｎ倍として認識できることによる。その意味で、$\frac{2}{3}$ が $1\times\frac{2}{3}$ となることが鍵となる。

数直線上に数ｎを目盛ることは、基準を１としたとき、数ｎは基準量（1）のｎ倍となる。「基準の何倍」と捉えられることは、このように分数を含めた数が数直線上に表示でき、それゆえそれらが数と見なされえる。



基準量のｎ倍という形で、数が数直線上に動きを伴って捉えることは、分数倍を含めた一般の乗法が捉えられることとなる。

このことにより、割合、比などの諸概念が、一般の乗法を背景として、捉えられることにもなる。分数が数とみられることにより、分数に表される２量間の関係、割合や比がより明確なものとなり、これらが相互に補いながら理解が深まっていくものと考えられる。

このことは、例えば、

問題１－１２）$\frac{2}{7}$メートルは、２メートルの何倍か。

ア．　$\frac{1}{7}$　倍　イ．　$\frac{2}{7}$　倍　ウ．　$\frac{8}{14}$　倍　エ．３倍　オ．0.25倍

と

問題１－１４）同じ重さのコインがいくつかある。３個の重さが１０ｇであるとき、７個の重さは何ｇになるか。

ア．$\frac{70}{3}$ g　　イ　$\frac{30}{7}$ g　　ウ．２３ｇ　エ．23.1ｇ　オ．２４ｇ

との相関係数が44と高い。すなわち、問題１－１２）のように倍数 $\frac{1}{7}$ が数として認識できることは問題１－１４）比の応用に活かせることを示しているとみられる。２量間の関係（比）が分数を数と認識することによって、一般の乗法（分数倍）で捉えられ、解答が自信を持ったものとなると思われる。

このように、「倍」という操作によって分数が数として認識できるとともに、２量間を結ぶ関係が明確になること、このことから文字の変数的扱いにおける「メタ認知的操作」は「倍」による操作と考え得る。

ここまで変数的側面を補強する策を探ってきた。その結果、「基準の何倍」で読み替える力を育成することが肝要であるとの結論に至った。この「基準の倍」で読み替えることが、言語学での言葉を言い換え、言葉を増やし幅を広げる手段、メタ認知の働きになるということである。

更に、上で検討したＡ、Ｂ、Ｃの各レベルで見たように、同じ数が、倍を介して様々な表現をもつこと、同じ一つの数が様々な姿を持つこと、別表現を併せもつことを認識することが必要であることがわかる。同じ分数が、比の値として、割合としてと、倍を介して捉えられる。このことが、同じものの異なった表現でというメタ言語的発想であると考える。

実際、ヤコブソンがメタ言語操作が出来ない状況を次のようにいう、

> 類義の記号のうちの一つが現在していれば（たとえばbachelorという語、あるいは鉛筆を指し示す身振り）、他の記号（unmarried man　という句、あるいは　pencil という語）は、余剰的となり、したがって余計なものとなる。（[１６]　p30）
>
> ある語からその類義語や迂言法の切り換えも、その語の異音語heteronym すなわち他の言語での等価表現への切り換えもできない。（[１６]　p32）

このようにメタ認知操作ができないと、同じ意味の言葉に言い換えることをいやがり、同じ意味で異なった言葉を余剰物（redundant）とみなし、「言葉を換えてこうとも云え

る」、「すなわち、・・・」等が出来ない状況として解釈できる。

数の例では、$\frac{1}{2}$と半分を別のものとして、言い換えが効かない状況を表すものであろう。おなじものとして認識できるとは、$\frac{2}{3}$ を $2\times\frac{1}{3}$ などと言い換えることでもある。このように、分数が数、スカラーとして把握されることが、思い浮かべる数を豊富にするものと考える。特に、倍という表現を使うことにより分数を数としての理解を確かなものとし、変数についての理解を促進するものと思われる。

生徒に数を次々と思い浮かべさせると、１，２，３・・という自然数、－１，－２，・・・という負の数、あるいは２，４，６，８・・・と自然数の２倍などであり、分数、無理数はなかなか出てこない。数学学習上で、数を作り出すにはこのように、「何倍する」といいかえる操作を通じて次々と生み出すこと、このことから基準となる量をもとに算出される分数が、数として自然に思い浮かび出てくることが極めて重要であることがわかる。このことが変数として様々な数を想起できるものと考えられる。

関連するもの、意味が真逆のものなどと説明するために他の語を生み出す「メタ言語的操作」によって次々と言葉が出てくる。同じように、数学で分数に表される割合、比などの量間の関係を、「倍」で解釈し、理解しやすくする、これが丁度、メタ言語的操作に相当するものと考えられるということである。

つながりは作るが言葉が浮かばない、その対処法として、言葉を豊にする手段は様々ある。しりとりゲームや外国語学習における単語を増やす語源学習法、接頭語活用、類似語辞典などがあるが、数学においても、数を順に出す規則として、２量間の関係を倍で捉えさせる練習をより多く与えたい。このようなことが文字の変数的側面を鍛えるものと思われる。

ところで、次々と置き換えることは代入操作において顕著であるが、この代入操作にＳＬは、特に数式の表記法において難点をもつ。
この問題５－５）に最も相関が強い（４９）問題として問題５－６）を考えてみる。

問題５－６） ｘの方程式　ａｘ＋３＝５　の解が－２であるとき、ａの値はどれか。
　ア．２　　イ．４　　ウ．６　　エ．１　　オ．－１

		あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	２	１	３	３	０	０	７
イ	４	４	３	２	０	０	１４
ウ	６	０	１	１	０	０	２
エ	１	９	４	２	０	０	１５
オ	－１	８６	１８	７	０	０	１１１
無答		０	０	０	０	０	０
計		１００	３４	１５	０	０	１４９

自信ありで正答した生徒が８６名、正答率57.7である。
　解答としてイの４を選んでいる生徒に着目すると、この４は
　ｘが－２ゆえ、ａ－２＋３＝５となり、
ａ＝５＋２－３＝４　としている。ところが、
　数であれば和と積の区別は明確に区別できるが、文字になると混乱を起こす生徒が出てくる。例えば、
７×３－３　を　７＋３－３
とする生徒はいないが、文字式になると、
　７ｘ－ｘ＝７＋ｘ－ｘ＝７
　２ｘ＋３＝２＋ｘ＋３＝５ｘ
という誤答は多く出る。これらは、文字が入ることにより、積の認識が弱く、和で捉えようとすることによるものと考えられる。
　式が、ｚ＝３ｘｙ　であり、ｘ、ｙの値が　ｘ＝－２、ｙ＝－１であるとき
　ｚ＝３（－２）（－１）＝３－２－１＝０
となり、まさか、ｚ＝３×ｘ×ｙ　とは思わない生徒がいる。
また、学習が進んで、ｉを虚数単位としたとき、$２ｉ^2$＝２（－１）＝２－１＝１
ともなる。
　これらは、文字を並べた文字式は、間に「・」、「×」が入り、かけ算、積であるということが不安定、それゆえ自信が持てないことによるものである。
このこと、積を和と混同するのは、ひとえに、「かけ算の記号×は省略する」というルールによる。この「省略」は、頻繁に出現する煩雑を避けるために工夫されてきたものであり、必要なものであるが、その必然性が理解されていないからであろう。
　概ね、文字の場合（文字と数の場合）×の記号が略せるが、数のみの場合は書かねばならい。逆に、＋の記号は数のとき略せる場合（帯分数や位取り表記）もあるが文字のとき

は略せない。
また、指数法則にかかわって、例えば　a^3　も
　a^3　＝ａａａ（３個）だからａ＋ａ＋ａ＝３ａ
となる。
また、極端な場合であるが、
　ａｂｃという文字列があったとき、ａ＝２、ｂ＝３、ｃ＝５　と置き換えると（代入すると）、２３５（二百三十五）となってしまう。そのまま置き換えると、このようになる。これもａｂｃを積とみていない。（逆に、百の位がａ、十の位がｂ、一の位がｃとなる整数を表現させるとａｂｃとなる生徒はかなりの数に上る）
まことに、「かけ算の記号×は省略する」は引っかかることが多い。
早く慣れさせることも大切であり、慣れきるまで例えば、以下のようなａ×ｂの表現を繰り返し挿入することは必要である。
　ｘが－２、ｙが－１のとき、式３ｘｙの値は、丁寧すぎるが、
　３ｘｙ＝３×ｘ×ｙ＝３×（－２）×（－１）＝３×（－１）×２×（－１）×１
とする必要がある。
　ここまで積の形式的な略記が代入を阻害していることを述べたが、このことがしっかり認識できるためには、そのベースとして、乗法の意味が倍概念で一般化されているということが前提である。

　初学者、ＳＬに、代入がスムースになされるためには、教授者は策として、「記号（特に、演算記号）の規約」と「分数に表される倍概念を把握する」を徹底することが大切である。そして、積が倍概念で捉えられることとを前提に、ａｂが出るとそのたびごとにａ×ｂを強調する必要がある。

【２】統合軸　文字概念形成上の定数的側面

【概要】文字の定数的側面を理解させるための問題点を探る。

先ず、言語論の語・記号のコノテーションというように、記号「＋」「－」が場面に合わせ多義に使われていることを理解することが和の式ａ＋ｂをとらえるためには重要であることととらえる。そして、それが安定してとらえられるためには数との関連においても適応できることが必要である。これらのことを次の問題で検討する。

Q2）４ａ、４ａ＋３，３ａ＋４，４ａ＋８，４（ａ＋３）のうちで、
　　つねに、「４の倍数」となつているものを選ぶ

Q1）４×７７７７，４×７７７７＋３，３×７７７７＋４，４×７７７７＋８、
　　４×（７７７７＋３）のうちで「４の倍数」となっているものを選ぶ

次いで、ヤコブソンの失語症に関する論究より、統合軸は「繋ぎ」「代名詞」「前置詞」がベースを占めており、その各々がそれぞれのなかで階層（ヒエラルキー）をもつことを述べている。「繋ぎ」については記号「＋」のコノテーション、「代名詞」についいては「指示語」の理解がつながることを検討する。具体的に指示語を見つける問題にも触れ、指示語を意識した文章問題の指導を提言する。

文字概念形成上の定数的側面の鍵を握るのが立式であった。そして、「立式問題（問題３－７）と「ａはａの（　）倍、－ａはａの（　）の問題（問題３－１２）」との相関がきわめて高い、このことの原因を探った。その結果、ａをａの１倍、－ａはａの－１倍ととらえられることは、記号「－」が引き算の記号や符号としてばかりではなく、文字の－１倍ととらえることが出来るのだということをみた。このように様々な使い方をもつ記号「＋」、「－」を所与の場面に合わせ適切に選ぶこと、このことが立式の形、とりわけ式の和ａ＋ｂを確かなものとしてくれると考える。

このこと、記号「＋」がいろいろな意味をもつことは、言葉が「含み」をもつこと、語のコノテーションを納得することによって、丁度「海」や「赤いカーネーション」が多義性（もとの意味に加え母性や愛情など）をもつことから文意の理解が深まることと同じであろう。

熟した言葉は含みがあり、その含みを文脈からよみ腑に落ちる、といわれる。

記号「＋」はいつもたし算記号、記号「－」はいつもひき算というレベルから、文字ａと文字ｂの繋ぎの記号として書き表すこともあると納得できるレベルへ上がることが重要となる。これは、英語学習で capital という英単語を「首都」、interest を「興味」とのみ覚えてこんでいる生徒は capital and interest や capital and labour に戸惑うことに通じるものと考える。

意識的にせよ、無意識的にせよ「＋」「－」が多義（演算と符号、更に＋１倍、－１倍など）をもつことを納得し、これを使い分ける、判断をすることが、式使用の生徒の心理的安定に繋がるものと考える。

このように場面によって、記号「＋、－」を意識して使い分けることによってａ＋ｂが一般化した和として、意味をもって扱えるものと思われる。

和の式ａ＋ｂが心理的に不安定な生徒が少なからずいる。その原因のひとつには、数は何よりも計算の対象であるとする感覚が根強く残っていることである。このことは特に数

値のみの場合に顕著である。
例えば、
Q1）次の数のうちで「4の倍数」となつているものを、すべて○で囲め。
　4×7777，4×7777＋3，3×7777＋4，4×7777＋8、
　4×（7777＋3）
この問題で7777を適当な文字で置き換えると、
Q2）次の数のうちで、つねに、「4の倍数」となつているものを、すべて○で囲め。
　ただし、aは正の整数である。
　　4a、4a＋3，3a＋4，4a＋8，4（a＋3）
についてみる。（Q1、Q2 は、それぞれ「第二次調査問」の4番と9番）
Q1)では横に計算をしている答案はしばしば見られる。ところが、この問題で7777を適当な文字で置き換えた Q2）であれば、7777という数をaに置き換えただけであるが、前者 Q1）が後者 Q2）よりも、平均正答率において20％も低くなる。数を文字で置き換えることが案外難しいことが、そして、記号「＋」を演算とのみ見る傾向が顕著に表れる。
　Q1）の場合に、例えば、4×7777＋8では、4×（7777＋2）として表れる7777＋2の記号「＋」が算法和のみで解釈出来るのでなく、前述の記号「＋」、「－」の多義性が意識出来ることが大変重要となる。
　多くのSLにとって、小学校以来の数の式では、計算をすることが答えを出すことであり、このことは結果的に演算記号をなくすこととなる。それゆえ、すぐに、ひたすら計算してしまう。そして、その結果、答えの中には、演算記号があってはいけないものとも思う。従って、答えが例えば 7A＋2 の形であれば、演算記号が残っていることに違和感をもつ。「答らしくない」となる。Q2）で形式的に解答できる生徒も、和の形a＋bが安定してとらえることができないと思われる所以である。
　確かに、7777を一つのかたまりとして文字のようにとらえ、4×7777＋8を4の倍数とみること、記号「＋」を単項式と単項式を結ぶ和ととらえ判断すること、そのようにみることは、式全体を見る意識があり、文字と数を行き来しないと難しい。たすで処理をし、「もと返り」をするのであろう。

　空気のように式a＋bを扱っている指導者とa＋bという表現に違和感をもっている生徒、このギャップは大きい。
　文字の使用によって、整数の性質や、関数の変化の状況などを調べることができ、文字を説明や証明に大いに活用出来る。文字式はこれらに、大いなる力を発揮する。ただ、具体的な整数の性質や関係の成り立ち例を十分に説明しておかないと、抽象化した式は形式的運用ができるがゆえ、意味を考えず形式的に次々進め、初学者に、詰め込み、強制、すなわち意味なく詰め込まれるという感を与え、これらの操作に無味乾燥感を与えてしまう。更に、次（方程式運用など）へ繋がらない。このことには充分に留意する必要がある。

　ところで、ここで考える各場面で使われる記号「＋」「－」は、まさに文の前後関係から適切な言葉、整合性をもつ言葉を選ぶことであり、前述の言葉で「統合軸」の繋ぎ言葉

である。すなわち、各場面で使われる記号「＋」「－」は、その理解、適応のためには統合的思考が必要である。

本章【１】で検討した語が次から次へと出てくる言語学上の連合軸が文字式の変数的側面とすれば、それに対応する統合軸は式の形成に関わり文字の定数的側面であるといえる。そしてその第一ステップとして、記号「＋」、「－」がどのように使われているかを意識させることが重要であることがここで判明した。

そこで、上で取り上げた

Ｑ１）次の数のうちで「４の倍数」となつているものを、すべて○で囲め。

４×７７７７，４×７７７７＋３，３×７７７７＋４，４×７７７７＋８、

４×（７７７７＋３）

などは各生徒がどのレベルかを識別する問題として有効である。更に、

・「－３より－２だけ大きい数は？」「－３より－２だけ小さい数は？」

・次の □ に「＋」、「－」の記号を入れよ。

－７□２＝－５

３□（－５）＝８

・先生が「５－３も代数ではａ＋ｂと書ける」といわれました。Ａ君があなたに「ａが５で、ｂが３なのに、「＋」はおかしいな」と聞いてきました。あなたはＡ君にどのように答えますか。

なども、識別問題として適しているといえる。

数学など、公式さえ覚えれば、代入さえすれば簡単さ、使える公式を探せばよいというように、置き換えで、代置でなんとかなるという、このような態度、ある意味メタ認知的見方ですべてみようとすることが数学をわかりにくくしているのではなかろうか。これでは文字のもつ「連合軸」は理解できても、「統合軸」には至らないと考えられる。このことが、数学は出来るが意味がわからないということに通じるように思われる。

これらの生徒に、例えば、整数に関する

・「奇数、偶数が末位の数で判断できる」このことを説明しなさい。

２桁の数を、十の位の数をａ、一の位の数をｂとして書き表しなさい。

与えられた文字を操作することは出来るが、文字を設定し、式の形に書き表すことは極めて不得手である。文字を用いて説明する習慣が身についていない。

・「各位の数をたし３の倍数であればその数は３の倍数」このことを説明しなさい。

・「奇数の平方から１を引くと８の倍数」このことを説明しなさい。

などの説明を要する問題が、「式（公式）を出すことは大切だ」と反省を迫るために必要と思われる。

ヤコブソンによれば、統合軸が残った失語症患者は、「あれがそうして、そしてこうなる」のように連合軸の退行が進行することによって言葉として生き残るのは「繋ぎ」「接続詞」「代名詞」や「助動詞」などということである。そして、繋ぎ、接続詞、代名詞、（この逆順で崩壊する）の各々が階層（ヒエラルキー）をもつとする。

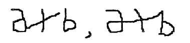
そして連合軸異常は進行すると、最後に、一語または一音素にいってしまう。（［１６］）

この二重の ― 音素的及び語彙的 ― 不具化が更に進行すると、発話の最後の残滓は一音素、一単語、一文の発話である。患者は、幼児の言語発達の最初の段階、あるいは更に小児の言語以前の段階に、逆戻りする。言葉を用いたり了解したりする能力の完全な喪失である普遍的失語症に直面する。

そのため、統合軸の修復にはまず、「語の繋ぎ」が必要である。ここで、この「語の繋ぎ」は、数学における式に適用すると、「繋ぎ」は式を繋ぐ記号「＋」であろう。そしてこの「レベル」での式の結びつき方、構成の仕方がスムーズにできないことは、例えば記号「＋」「－」がたす、ひくのレベル、若しくはたす、ひくと正負の数の符号のレベルにとどまっている状況を示していると考えられる。従って、「語の繋ぎ」は記号「＋」の数の演算記号「たす」のレベルでのみ考えることに対応するものとみる。

このことから、前述の識別問題をもとにした指導・治療が重要な意味をもつと思われる。

次に、ヤコブソンによれば、連合軸の退行の逆順をたどると、「繋ぎ」に次いで、代名詞、代名副詞などへと続く。数式について代名詞的扱いはまとまったものを「ひとつのもの」と見ることであろう。確かに繋ぎの符号付きの形で式と見ることができても「ひとつのもの」として考えることは差がある。そのことは、記号「＋」「－」を使った式のフォームをひとかたまりととらえること、すなわち数および式を一つの単項式と見なして、置き換えることの難しさに対応しているものと思われる。

「ａ＋ｂ、  」

これらは、３文字の楷書体を順に変化させ１文字の筆記体とし、何とかａ＋ｂをひとつと見せたい工夫である。が、なかなか定着しないのが現実である。一つにみる、とりわけ記号「＋」入りの式をそのままで認識することができることがポイントとなる。

統合軸は、文の前後関係から選ばれる言葉群であった。そして、語を繋ぎ、次々と文脈を構成する言葉として使われている指示代名詞（これ、それ、あれ等）はまさにこの言葉群である。文を簡潔にわかりやすく作るためにも、指示語や指示代名詞、指示文の役割は大きい。それゆえ、国語などの「下線部の「これ」は何を指し示すか」という問は、話の筋を正確に取れ得ているかどうかを問うこととなり、指示語を追うことは、全体を鳥瞰することになり、筋道をたどれることとなる。

例えば、次のような文章で問１～問５を課すことにより、文章の理解度が測れる。

デカルトは、数学を学んでみて、この貴重な学問が、何故死んでいるかを看破した。それは、この①学問が、常識に結合していないからなのだ。数学の仕事の背後では、目に見えぬ、極度に純化された常識が働いているはずなのだが、これに②目をつけないから、数学は、悪く専門化し、幾何学者は、図形を追い、代数学者は符号に屈従し、実効のない、徒らに複雑な技術と化している。デカルトは、（ ③ ）を計算の技術と見る眼から、（④ ）を「精神を陶冶する学問」と解する大きな精神の眼に飛び移る。そして、これを⑤実地にあたって、陶冶してみる。すると古代の幾何学は近代の代数学に結合してしまった。

小林秀雄「常識について」より

問１　下線①の「この」は何を指すか文中の言葉で答えよ。（　　　　　　　）
問２　下線②の「これに」は何を指すか文中の言葉で答えよ。（　　　　　　　）
問３　（③）に適する言葉を文中から選び答えよ。（　　　　　　　）
問４　（④）に適する言葉を文中から選び答えよ。（　　　　　　　）
問５　下線⑤のこのは何を指すか文中の言葉で答えよ。（　　　　　　　）

問を解くこと、「この」「これ」を追うことにより、全体の文意が明確になる。
「あれ」、「それ」は、そのもとの語、語群、文をひとかたまりのものとして、ひとつと見なしたものである。この一つに見る操作がひとかたまりの式を一つのものとしてみることと同じと見る。

数や式をひとかたまりのものとし、一つと扱えるようにさせる手立てとして、文章構成で、指示語を追うことに対応させた指導は有効なものと思う。文章における「これ」を問うことと同じように、意識的にその「もと」を常に問うということが重要である。
そのような視点で立式の文章題をとらえさせる必要があるものと思われる。

勿論、単一のものとだけ見れるだけではなく、それが同時に分解できることができる状態でなければならない。式ａ＋ｂが一つとのみ見られただけでａとｂに分解できなければ、含みをもたないものとなる。このことは、ヤコブソンの

連合軸は残るが、統合軸が欠損している場合、語根と派生接尾語との結合、二語からなる複合語（compound of two words）、例えば thanksgiving さえも、分解不可能なものとなる。

という状況になるであろう。二語のもつそれぞれのコノテーションにより一つになった語の意味を推し計る力がいることになる。

立式での正・負の記号を連合軸における最初の段階の「繋ぎ」としてとらえ、次の段階の「代名詞」を一つに置き換えるものとしてとらえれることができることをみた。
そのことにより、

正・負の数の記号「＋」、「－」が符号、演算などと多義性をもつこと、場面場面によって判断し使い分けるということを認識させること、そして、単項式の和ａ＋ｂを代名詞的に「一つのもの」としてみるということが治療のポイントとして確認できる。

次にこの一つと見たもの（定数的なるもの）をその一部として含む式の扱いを次節で考える。

【３】括弧（　）の意味（括弧を一つの文字とみること）　統合軸の連合軸

【概要】文字の定数的側面をみる。

次の問題３－７）の解答が不安定となる理由を、問題３－９）に探る。

問題３－７）１箱２０個入りのリンゴをｎ箱買ったら、５個のおまけがあった。全部でリンゴは何個か。

問題３－９）次の①，②の問いにあてはまる式をそれぞれ求めよ。

① ｘをａ倍したものを、さらにｂ倍したら、ｘを何倍したものになるか。

② ｘをｃ倍したものに、さらにｘをｄ倍したものを加えたら、ｘを何倍したものになるか。

その結果、括弧の使い方に因をみる。すなわち、立式において括弧（　）の意味が大きいことを述べる。立式の文章の区切り方から、まとまり方、そして所謂「穴埋め問題」との連関をみる。また、括弧はこれをを付ければ連合、外せば統合の構造をもつひとつの文字ととらえられることができることを見る。更に、人類学者の木村大治が著書「括弧の意味論」で論じている「意味論的括弧」との関連についても検討する。

文字への抽象化の過程で、文字の定数的側面は代数式を一つに見ることができること、文字の変数的側面は代入における積の理解が変数把握の鍵を握ることを見てきた。また、定数的側面は言語学の統合関係に、変数的側面は連合関係に対応することも検討した。

平素見慣れている文は、文の流れ統合関係、語の集まりが連合関係とみれば、この二つの軸が交叉しつつ、この二つの軸によって構成されているものと考えられる。

数学における式も、例えば、２次式　ax^2+bx+c　のように、定数的側面の文字、変数的側面の文字が交叉し、構成されている。

ここからは、定数的側面の統合関係と変数的側面の連合関係が関連する式の構成について、括弧（　）の使用を含めて考察する。

式を構成すること、立式は、文章で表された数量間の関係を主に演算記号で構成的に組み立てていく。更に複雑な関係には、他の意味にとらえられないように、括弧（　）を使う。立式において括弧（　）が深く関係することは、立式の問題３－７）が、括弧の問題３－９）と高い相関（４９）をもつことからも伺える。

問題３－７）１箱２０個入りのリンゴをｎ箱買ったら、５個のおまけがあった。全部でリンゴは何個か。

ア．２５ｎ　イ．２０ｎ＋５　ウ．２０（ｎ＋５）　エ．２０＋ｎ＋５　オ．ア～エにはない。

問題３－９）次の①，②の問いにあてはまる式をそれぞれ求めよ。

① ｘをａ倍したものを、さらにｂ倍したら、ｘを何倍したものになるか。

② ｘをｃ倍したものに、さらにｘをｄ倍したものを加えたら、ｘを何倍したものになるか。

ア．$\begin{cases} ①\ a+b \\ ②\ c+d \end{cases}$　イ．$\begin{cases} ①\ a+b \\ ②\ cd \end{cases}$　ウ．$\begin{cases} ①\ ab \\ ②\ cd \end{cases}$　エ．$\begin{cases} ①\ ab \\ ②\ c+d \end{cases}$　オ．ア～エにはない。

３－９分布

	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア ①ａ＋ｂ②ｃ＋ｄ	２	１	０	０	０	３
イ ①ａ＋ｂ②ｃｄ	０	０	０	０	０	０
ウ ①ａｂ②ｃｄ	２１	１５	６	０	０	４２
エ ①ａｂ②ｃ＋ｄ	６６	２６	９	０	０	１０１
オ ア～エにはない	０	１	１	０	０	２
無答	０	０	１	０	０	１
計	８９	４３	１７	０	０	１４９

３－９点双	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア ①ａ＋ｂ②ｃ＋ｄ	７	－５	０	０	０	
イ ①ａ＋ｂ②ｃｄ	０	０	０	０	０	０
ウ ①ａｂ②ｃｄ	２	－２９	－２９	０	０	－
エ ①ａｂ②ｃ＋ｄ	６０	－２４	－２０	０	０	
オ ア～エにはない	０	－５	－１５	０	０	－
無答	０	０	－７	０	０	－７
計	６５	－４２	－３９	０	０	

②において、ｃｘ＋ｄｘからｃ＋ｄを括弧でくくり、ひとかたまりとして「自信を持って」正答できる生徒は44.2と低い。括弧を付けた式を表すことは、SL達にとって、かなり難解である。更に、

「ｘを２倍してｙを加えた値を３倍した式」をｘ、ｙで表せ。

という問題では、文字を使い、しかも和と積で迷わないように「・・を加えた値」と設定しても答えが、

２ｘ＋３ｙ

となるＳＬ生徒が多く出る。

「ｘを２倍してｙを加えた値」をというところまでを一つのかたまりとみ、構造上の一区切りとみて、括弧（　　）でくくるという発想が出てこない生徒がいる。

しかし、「２ｘ＋ｙを３倍した式」をｘ、ｙで表せ。

となると、逆にかなりの生徒が括弧を付け表現できるようになる。

かたまりをかたまりとして明示すれば、括弧（　）を付けて表せる。しかし、文からかたまりを読み出すことに困難を伴う。文のまとまりをまとまりとして捉えることができることが必要である。

文章における括弧（　）の役割については、いわゆる「穴埋めの問題」における括弧を観察することによりその意味が明確になる。

例えば、次の様な問題がある。
　次の（　）を適語でうめよ。
　太陽王ともよばれたルイ14世の治下にフランス王制が栄えたのは、17世紀後半から18世紀の初頭にかけてのことであった。17世紀は数学、自然科学が飛躍的に発達した世紀である。デカルト、フェルマー、（ア）が活躍したのは、この世紀の前半から中期であったが、後期にはニュートンや（イ）によって微積分法が発見された。（イ）は数学、哲学そのほか多くのことに携わったドイツの学者であるが、1672年外交的使命を帯びてルイ14世の宮廷を訪ね、（ウ）から来ていたホイエンスに会い、（ア）の業績について聞いたことが後の発見のためのヒントとなった。
　　　（彌永昌吉「ガロアの時代　ガロアの数学」ｼｭﾌﾟﾘﾝｶﾞｰ・ﾌｪｱﾗｰｸ東京株式会社　より）

（イ）の人名はニュートンと並んでいるので記憶倉からすぐに検討がつくが、（ウ）の国名は、フランス、ドイツ、・・・と記憶の倉からいろいろな語（国名）を想起させるという意味で語の連合としての面をもつ。とともに、想起した語群の中で前後関係から適した語、17世紀、自然科学の学者をはぐくんだ国という文章に適合する語を選ぶ、文脈に合う適語を選ぶという語の統合面を合わせもつことがわかる。（ア）についても適語を求めるため連合なる語を想起させ、その中で統合となる適語を選ぶという構造をもっていることがわかる。

　このように、括弧自体はいろいろな語が入るという「連合的」な面をもつているが、括弧の中に入るのは、前後関係から適当なものという意味で統合語である。即ち、括弧は外せば統合の語、付ければ連合の語となる「統合の連合」の働きをもつ。問題を作るときは要となる語（前後から統合軸）に括弧を付けることによっていろいろな語が選べる連合軸とする。逆に、問題を解くときには連合軸の語群から前後で統合軸となる適語を選ぶ構造になっている。

　数学の「文章を式へ」でも、文章上のまとまりを式で表し、それを一つと見て括弧で括る。括ったものは、連合的な見方が出来る。（２ａ＋ｂ）は、２ａ＋ｂというひとかたまりの式の、例えば、１倍というように、倍で捉えられ、全体で一つの文字に見れる。
　括弧を「一つの文字」ととらえると、文字の規約で括弧がとらえられることとなり、生徒には納得させやすい。
　括弧は、あたかも、一つの文字、中が空である一つの変数的文字とみれる。
「一つの文字」ととらえると、括弧は括弧の１倍ととらえられ、掛けるものとしてもとらえられる。すなわち、
　（ａ＋ｂ）は一つの文字で捉えるとともに、その１倍と倍で捉えられることとなる。
因数分解を問う
Ａ１６　ａ（１－ｙ）＋１－ｙ　を因数分解せよ。
は、１－ｙを一つのかたまりと見、括弧（　）をつけ
　ａ（１－ｙ）＋１×（１－ｙ）

１－ｙで束ねることにより正答に至ると考えられる。

括弧を一つの文字ととらえる、このように意味のある括弧については人類学者の木村大治が著書「括弧の意味論」（［１８］）で「意味論的括弧」として論じられている。

木村は括弧を「統語的括弧」と「意味論的括弧」の２形態に分けている。（木村［18］ｐ13～ｐ27の要約）

「統語的括弧」とは、文の内外における要素どうしの関係を明示するために使われる括弧であり、言語の引用や言葉を補ったり、説明するための括弧で、その例としては

機内に持ち込める液体はビニール袋（20×20の大きさまで）に入れて下さい。

のような括弧である。それに対し、

「意味論的括弧」は、文の要素と何らかの“意味関係”をもつ括弧（わけありの括弧）で週刊誌の見出し、会話、メールなど様々な場所に表れるものである。そして、その「意味論的括弧」の核心は

山田君が言ったこと　と「山田君」が言ったこと

のように括弧を付けることによって“あの山田君”というように書き手が相手に同意、誘い、一緒に考えることを求めるメッセージであり、優れてコミュニケーションの具であるということである。

更に、

「意味論的括弧」は、括弧を付けて表すことにより、何か「あるぞ」と謎かけの存在を表示（暗示）する。「わけありの括弧がある」という「ある」のレベル、この「ある」レベルでは様々な意味のある括弧の役割を果たしきれない。括弧の働きは、発信者とその受け手との間で何らかの関係（共犯関係）があること、行為関係を持つことによって完結するものと述べられている。この行為関係を持つということ（関係する、同意する）を「する」とし、上の「ある」に対応させている。この「ある」、「する」はお互いに関連し、次のように解釈されている。

> 「ある」という語が基本的には静的・共時的な含みをもつに対し、「する」の方は、未来に向かう動きを含み、通時的であると言える。また、記号論的に言うと、「ある」は共時的関係性のなかで意味が確定していくことにあたるので「連合軸」に、「する」は　時系列に沿って語を発し、他者と関わっていくことにあたるので「統合軸」に対応すると考えてよいだろう。このように、時間的にも論理的にも、両者は直交的な関係にあると言える。（木村［１８］ｐ212）

括弧の働きは、連合関係と統合関係が相まって意味をもつものになっているものと捉えられる。先に検討した穴埋め問題では、括弧があるということで、語群（連合関係）を探し、適する語（統合関係をみたす語）を前後関係から入れるという行為により完結する。数学でも、括弧があるということに気づき、「何かあるぞ」と気づき、その括弧は、文字（例えばＡ）でそっくり置き換えるとわかるように、一つの文字ととらえられるものであり、括弧内は、一つのものと確定したものと「する」統合的な面をもつものと考えられる。この場合、統合関係は、括弧の中が数値計算であれば先に計算、代数式であればそれを一

つにみるということとなる。

　このことは、括弧が一つの文字（連合関係）と見、「１×」若しくは「×」が略されているものと解釈でき、括弧内に連合関係をみたす「ひとかたまりのもの」があると捉えられるところまで含意を読み取らせる必要がある。そして、それにもまして、括弧（　）をみたら、「何かあるぞ」と言う感覚、そしてこれらの括弧の意義を丁寧にフォローすることは重要であると考える。

　言語と同じように、数学における括弧も統合の連合としてとらえると、指導において、一つのまとまったかたまりを抽出させることの重要さが確認できる。
文章題で、まとまりのあるかたまりを見つけさせることを、言語と同じようにする必要がある。そのことを通じ、上述のような括弧の意味を理解させるようにしたい。
英語の文法では「関係代名詞」が学習項目の一つになっていることを考えれば、数学でも括弧についての学齢進行ごとの注釈が必要であろう。
例えば、因数分解の導入に有効な、563×17－563×7 のタイプの問題を様々な場面で取り上げることも重要であろう。

　以上のように、括弧が一つの文字であり、統合語に括弧を付ければ連合語にという関係、いわば統合の連合という構造をもっているとすれば、次に、連合の統合関係という構造も重要な視点となる。

　例えば、次のような挨拶文の例文のように括弧を使う表現がある。

（ア　　）の候、皆々様益々ご清栄のことと存じます。

・・・・・

（ア　　）とはいえ（イ　　　　）、お体大切にお過ごしください。

　この（ア　）には、その季節に合わせて語を入れるる必要がある。また、（イ　）は（ア　）に連動して選ばれる。例えば、（ア）が「春」であれば（イ）は「まだまだ寒さが続きます」などが選ばれねばならない。このような括弧はお互いにつながり、括弧の連合語が統合軸で結ばれているとみる。連合語の統合関係、数学の式表現では、丁度、変数を含む式全体を見るということと考える。これについては次節で検討する。

【４】全体を連動して見ること　連合軸の統合軸

【概要】ＳＬにとっては式全体を見ることが難しいことを見る。その問題点として、変数が式全体に、しかも連動して作用することの認識があることを次の問題４－１４）でみる。

問題４－１４）　ｘを２倍したものに、３を加えた式がある。いま、ｘがｔのときの式を①、ｘがｔ＋１のときの式　を②とするとき、①，②の式は、次のどれか。

ア ① ｔ＋５　② ｔ＋６
イ ① ｔ＋５　② ２ｔ＋４
ウ ① ２ｔ＋３　② ｔ＋６
エ ① ２ｔ＋３　② ２ｔ＋５
オ ① ２ｔ＋３　② ２ｔ＋４

ＳＬの中には第１項にのみ代入し、全体を見ない者も多い。それが最初からコツコツというＳＬ生の問題解決傾向に起因していることを検討する。

次に、この問題４－１１）の正答に至るためには「一つに見る」と「全体を見渡す」という２段階の操作が必要であることを確認する。そして、かたまりを一つと見て全体を見なければならない例を、２次関数の平行移動について調べる。そのことにより、全体を見るということが合成関数と深く関係することを見る。

おわりに、文字形成上で到達項目となる因数分解について述べる。共通なものでくくることが難しい生徒に対して、全体を見させるために図を入れること、そして、一般の因数分解の場合も図を入れることの提言をする。

【３】にみてきたように、括弧（　）は外見は連合、内は統合というようにひとかたまりの単項式と考えられる。平素、生徒たちが見かけるのはそれらの和の形であり、多項式の形である。この多項式の扱いは、文字への抽象化の系列では、到達レベルのグループＴ「いろいろな式が規約に従って活用できる」に位置づけられる。

この多項式については、各項に含まれる変数が連動して変化していくことが認識されていない生徒にしばしば遭遇する。多項式で $f(x)=ax^2+bx+c$ で x が $a+h$ のとき値 $f(a+h)$ を計算させると最初の項 ax^2 にのみ $a+h$ を代入するという場合である。このことは例えば、

問題４－１４）

ｘを２倍したものに、３を加えた式がある。いま、

ｘがｔのときの式を①

ｘがｔ＋１のときの式を②　とするとき、①，②の式は、次のどれか。

ア ① ｔ＋５　② ｔ＋６
イ ① ｔ＋５　② ２ｔ＋４
ウ ① ２ｔ＋３　② ｔ＋６
エ ① ２ｔ＋３　② ２ｔ＋５
オ ① ２ｔ＋３　② ２ｔ＋４

この問題についての解答の分布は、

		あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	①t＋5　②t＋6	0	0	0	0	0	0
イ	①t＋5　②2t＋4	0	0	1	0	0	1
ウ	①2t＋3　②t＋6	0	0	0	0	0	0
エ	①2t＋3　②2t＋5	９０	２６	3	0	3	１２２
オ	①2t＋3　②2t＋4	２０	１０	4	0	0	３４
無答		0	0	0	0	0	0
計		１１０	３６	8	0	3	１５７

自信をもって正解しているのは５７％、そして２２％　の生徒が、２（ｔ＋１）＋３を２ｔ＋４とし、２をｔのみに掛けている。
ｔ＋１をすべての項に同時に代入することの難しさが浮かび上がっている。

単項式では代入し式の値は求められるが、多項式になると、第１項にだけ代入している生徒が見受けられる。

このことは、ＳＬの解答傾向に大いに関係するものと思われる。

ＳＬ達の態度傾向として、最初から真面目にこつこつと解いていく傾向をもつ。そしてこのような態度の生徒は基本問題について成績が良い。
実際、次のような設問で、診断テストの成績を調べると、以下のようになる。

態度調査７－２
いくつかの問題を解くとき、あなたはどのような順序で解きますか。

ア）１番から順に解く、できないのが出てくるとそれにこだわってしまう	60
イ）１番から順に解く、できないのはとばす	48
ウ）やさしそうなものから解く	45
エ）難しそうなものから解く	0
オ）ア～エ以外	60

※　右の数値は各態度を選んだ生徒の自信ありでの診断テストの平均正答率

ア）を選んだ生徒は、自信アリでの得点が一番高い。コツコツと取り組むことが学習到達度が高い。

ところが、例えば、次の様な問題で前から順番に計算していくと大変である。

３×５×７×２÷７＝　　、８×７×６×５×４×３×２×１×０＝

式全体を見、的確に判断することは、ＳＬ達に、特に前から順に解答していくタイプの生徒には、このように全体を鳥瞰的に見、判断することは難解である。
全体を見、ｔ＋１をこのままでひとつに見る視点が必要となる。そして、高みに立つと見晴らしが良いように、鳥瞰して、式全体を見ると見えてくることに気づかせることが重要である。

このことを次のような身近でわかりやすい例で説明することは効果的である。

「かたまりを一つにみる」そして「全体に及ぶ」ことは、商品のセットメニューや、伝票などのコンピューターによる印刷において、同じ内容を数カ所に印字したいときに、同じ内容（例えば、住所、名前など）を一つの記号をつけて印字したいところに割り当てる。結果、容易に個人ごとの伝票ができる。このように同じことを繰り返すような場合、割り当てたい場所に同じ記号をつけ実現できる。この同じ記号の所が変数である。

このように、定形様式などで多く使われるが、同じ記号は同じ内容を持たせ得るという原則は文学、詩でも多く使われる。例えば、

太郎を眠らせ、太郎の屋根に雪降りつむ。

次郎を眠らせ、次郎の屋根に雪降りつむ。「雪」（三好達治「測量船」）

におけるように、「太郎」「次郎」を入れ込むもの場所を決めれば同じものが入る。
このような修辞法の技術にも相当するであろう。

このように式全体を見るということが出来るか否かが問題４－１４）の解答の鍵となった。この問題４－１４）を実際ＳＬ達はどのような見方でとらえているかを探る。

そのためこの問題と強く結びつく問題群をもとに見る。問題４－１４）との相関係数が高いのは、相関係数４９の問題５－２）、相関係数がともに４３の問題４－１１）および問題５－１３）であり、正答率を考慮すると、問題５－２）（正答率50）をベースとして、問題４－１１）（正答率35）および問題５－１３）（正答率40）が支えているようになっている。順に見ていく。

問題５－２）次の方程式の解は　次のどれか。

① $\frac{2}{3}x=3$　　② $-3x=\frac{1}{3}$

ア. $\left\{\begin{array}{l} ①\ 2 \\ ②\ 1 \end{array}\right.$　イ. $\left\{\begin{array}{l} ①\ \frac{1}{2} \\ ②\ \frac{1}{9} \end{array}\right.$　ウ. $\left\{\begin{array}{l} ①\ \frac{9}{2} \\ ②\ -\frac{1}{9} \end{array}\right.$　エ. $\left\{\begin{array}{l} ①\ -\frac{9}{2} \\ ②\ \frac{1}{9} \end{array}\right.$　オ．ア～エにはない。

このベースとなる問題５－２）は、逆数を用いて一次方程式の解を求める問題である。両辺に逆数を掛けるという技術によって、形式的に出来るゆえか正答率は５０と高い。
ｐ５４の問題４－１４）が、形式的な運用の面が支えていることがわかる。
次に問題４－１１）についてみると、

問題４－１１）$\frac{x}{3} - \frac{2y-1}{2}$ の答えは、次のどれか。

ア．$2x-6y+3$　イ．$\frac{2x-6y-3}{6}$　ウ．$\frac{2x-6y+3}{6}$　エ．$\frac{x-2y+1}{1}$

オ．ア～エにはない。

この問題についての解答の分布は、

		あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	２ｘ－６ｙ＋３	１	３	２	０	０	６
イ	$\frac{2x-6y-3}{6}$	２９	１１	５	０	０	４５
ウ	$\frac{2x-6y+3}{6}$	５１	２２	８	０	０	８１
エ	$\frac{x-2y+1}{1}$	１	３	１	０	０	５
オ	ア～エにはない	２	５	５	０	０	１２
無答		０	０	０	０	０	０
計		８４	４４	２１	０	０	１４９

誤答のイ）を約 $\frac{1}{3}$ （４５名）の生徒が選んでいる。誤答となるのは、通分は出来るが代数式２ｙ－１がひとつのかたまりとして見て括弧で括るなどの操作ができない故であろう。解答の推移としては、

Ａ）２ｙ－１がかたまりと見られること。

Ｂ）$\frac{x}{3} - \frac{Y}{2}$ を計算する。（２ｙ－１をYとする）

Ｃ）分子を整える

であるが、Ａ）のひとつに見れないこと、またはＣ）の括弧の処理が原因と考える。
そして、代数式２ｙ－１をひとつに見、異なる分母をもつ分数の通分の運用、そして分子の式を整えるという一連の流れで、「一つに見、置き換え（連合）」、「全体を見て操作する（統合）」という２つの操作の合成が起こっていることに注意したい。

次に問題４－１１）と同じ相関係数４３をもつ問題５－１３）についてみる。
問題５－１３）

関数ｙ＝３ｘについて、次の①、②の問いにあてはまるものはどれか。

① ｘの値が２だけ増すと、ｙの値はいくら増すか。

② ｘの値が２倍になると、ｙの値は何倍になるか。

ア．$\begin{cases} ①5 \\ ②6倍 \end{cases}$　イ．$\begin{cases} ①6 \\ ②2倍 \end{cases}$　ウ．$\begin{cases} ①5 \\ ②2倍 \end{cases}$　エ．$\begin{cases} ①6 \\ ②3倍 \end{cases}$　オ．ア～エにはない。

この問題、①では、ｙ＝３ｘという式に対して、ｘの値が２だけ増したときのｙをｙ’とすれば、ｙ’＝３（ｘ＋２）＝３ｘ＋６　で、もとの式（かたまり）ｙ＝３ｘでこの式を置きかえると、ｙ’＝ｙ＋６となり判断できる。②についても、ｘの値が２倍になったときのｙをｙ’とすると、ｙ’＝３（２ｘ）から、ｙ’＝３ｙ　となり判断できる。ここでも、もとの式（ｙ＝３ｘ）を一つと見て（連合）置きかえる、全体を見て（統合）判断するという、操作の合成となる。

問題４－１１）、問題５－１３）において、かたまりを一つとみて、連動して全体の変化をみるということが、問題４－１４）を支えている。

かたまりを一つとみて、連動して変化させるということは、合成関数的扱いである。

問題４－１４）のｘをｔ＋１と置き換えることは、合成関数を考えることであり、この考えができないと、ｔ＋１のひとかたまりの式を代入するということに違和感をもつこととなる。かたまりを一つに見ること、そして全体に及ぶことは、様々な領域で出現するが、例えば、次のような問の解答に必要であろう。

$2x+3=t$　のとき、$(2x+3)^2+4x+6$　をｔで表しなさい。

$x^2+x=3$のとき、x^2+x+5の値はいくらか。

これらの問は、全体に連動するということと、各項が合成となっているという認識が求められる。

問題４－１４）のかたまりを一つと見ることと全体を見るということは合成関数的な見方が必要であることが出てきた。

このことは先にあげた伝票、成績表などをコンピューターで印字する例でみると、各データ（変数）に対して、学生番号、氏名、生年月日、成績　などの名付け（名前のラベル貼り）の対応があり、これがかたまりを一つに見ることに、そして、印字面全体を見渡し、各項をどこにどう配置するかの対応がある。この２段階が丁度合成関数と見なしえる。

具体的に操作の合成の扱いについて、数学１の指導上の難所である２次関数の平行移動についてみる。２次関数、例えば、$y=a(x-2)^2+3$　などの平行移動の理解については、そのグラフを、変化表を用いて、その移動を理解させるが、

移動の正負と式の形の正負が逆になることが、そして、

定義域のすべての数について移動しているということが

生徒の理解を困難にしている。

上述のように、式を一つに見ることが困難な生徒にとっては

$$y=f(x-p)$$

の表現は、式$x-p$を一つに見れないと、極めて難解であろう。逆に、式$x-p$を一つのかたまりとして見れる生徒については、これをＸと置くことにより、$y=aX^2$　これは原点に頂点のある放物線を表す式の形であり、

$x-p=X$であるので、$x=X+p$

$y=f(x-p)$上の点は

そのｘ座標が、原点を頂点とする放物線よりｐだけｘ軸方向に移動していることが理解できるであろう。

ここで改めて、平行移動の関数式の構成についてみてみる。

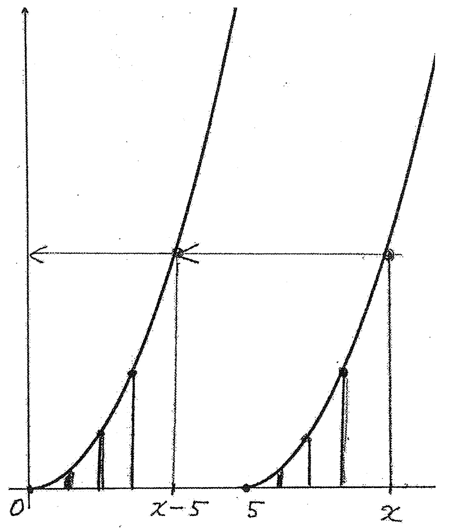
もとの関数$y=aX^2$のグラフ上の点のｘ座標Ｘをｘ軸方向にｐだけ平行移動させた点のｘ座標が　$X+p$　と書き表せ、そしてこの点のｘ座標をｘとすれば、$x=X+p$

Ｘはもとの関数のグラフ上の点なので　$X=x-p$を$y=aX^2$の式に代入し、求める関数の式$y=a(x-p)^2$を得る。

ここで、ｘ軸方向にｐだけ大きい数を$X+p$と書き表すことの困難さは、前述したとおりである。更に、Ｘを関係式が定義されているもとの式に代入するということの困難さが

ある。（このことは、高校数学にしばしばでてくる軌跡などで使われる基本操作であるが）これらに留意すれば、ＳＬにとっては点の代入がすっきりするようである。
　ただ、変数の使い分けや代数式の使用に余りなじんでいない生徒には、例えば次のような具体的な例の提示が必要であろう。

　１点の儲けポイントに対してその１倍、２点に対してその４倍、３点に対してその９倍・・がもらえるゲームがある。今、持ちポイントが５点をもっているとする。獲得ポイント（x）に対して、儲けポイントは「獲得ポイント－持ちポイント」‘$x-5$’なので、得る倍率は「獲得ポイント－持ちポイント」に対応して得られる。このことを図に表すと次のようになる。



← $(x-5)^2$

x；獲得ポイント
５；持ちポイント
$x-5$；儲けポイント

　獲得ポイントxに対して、そのときの倍率は、儲けポイント $x-5$なので$(x-5)^2$となる。
このとき、xに対して$(x-5)^2$ を対応させる対応を関数Ｆとすると、関数表現
$F(x)=(x-5)^2$ が得られ、そのグラフが上図の右となる。　　　　（例終わり）

　このように基準（持ちポイントp）が変化したとき、関数gを獲得ポイントxに対して平行移動した$x-p$を対応させる関数（ $g(x)=x-p$ ）、xにx^2 を対応させる関数を$f(x)=x^2$ とすると、このfによって、$x-p$が$(x-p)^2$に対応することとなる。これを図式に表すと、

$$x \xrightarrow{g} x-p \xrightarrow{f} (x-p)^2$$

となる。
$f\cdot g$ をＦとおけば、$F:\ x \rightarrow (x-p)^2$ となり、合成の状況が明確になる。
　このように、放物線の点の動きを通じて合成関数的視点が育成されていくものと思う。

全体を鳥瞰的に見ることの難しさは合成的思考に依るところが大きいことが判明する。【３】でみた「２ｘ＋ｙを３倍した式」の表示はできても「ｘを２倍してｙを加えた値を３倍した式」は出来ないＳＬ生もこの合成の思考に困難を感じるものと考える。
操作の合成という視点が全体を見る力を育成するものと思われる。

これまでの視点をもとにここで因数分解について検討する。
因数分解において、式全体を見て、適する因数（式）の組を探すことと、文脈から適語を探すのとは同じであろう。

◎　因数分解への適応
因数分解は、内容的には、素因数分解、正負の数の計算、置き換え等の様々なものが含まれ、各種学習系列図において到達項目に位置する。
因数分解の基本は、全体を見て共通因子を探すことである。
前節では、共通因数を探しそれを括弧で括ることについては、括弧が内は統合、外は連合となるひとつの文字として扱えること、また因数分解された式が倍で認識させるべきことを述べた。ここでは、
因数分解される式全体を見ること、また因数分解された式も含めて見るという広く全体でという視点で検討したい。
７５問のうちで、因数分解の問題を取り上げると、

問題４－１５）ａ（１－ｙ）＋１－ｙを因数分解すると、次のどれか。
　ア．因数分解できない　イ．（ａ＋１)（１－ｙ）　ウ．ａ（２－２ｙ）
　エ．（ａ＋１)（１－ｙ)^2　オ．ア～エにはない。

まず全体を見て　式１－ｙが浮かび上がって、これを括弧で括り、その括弧を一文字とみ、同時に前項の１－ｙも一文字とみなし
　ａ×（１－ｙ）＋１×（１－ｙ）
共通の１－ｙで括りだし・・・ということが要求される。
ところが、括弧の意味を踏まえない、ａ＋１－ｙ＋１－ｙ　などの誤答が起こりうることには注意したい。
ここで、因数分解を表す等式　ａ（１－ｙ)＋１－ｙ＝(ａ＋１)（１－ｙ）
を改めて見ると、左辺は積と和の式で、式の統合的面、これに対して、右辺は積の式で、式の連合的面をもつ。形が別だけでなく、構造が異なっている。
左の式、和表現で表された式と右の積、倍で表された式、これらを繋ぎ記号の等号でつなぐ場を考えねばならないという困難さである。
ＳＬにとっては、本来理解が別のものが、等号でつながれていることが認識されていないようである。それ故、困難に感じると思われる。

この問題の分布は、

		あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	因数分解不可能	３	８	５	０	０	１６
イ	$(a+1)(1-y)$	５８	２６	１６	０	０	１００
ウ	$a(2-2y)$	２	４	１	０	０	７
エ	$(a+1)(1-y)^2$	３	２	５	０	０	１０
オ	ｱ～ｴ以外	２	４	７	０	０	１３
無答		０	０	０	３	０	３
計		６８	４４	３４	３	０	

点双列相関係数を調べると、次のようになる。

	あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	１４	－１５	－１３	※	※	－１２
イ	４８	－１７	－２８	※	※	１６
ウ	３	－７	５	※	※	－１
エ	０	４	－１７	※	※	－９
オ	４	０	－９	※	※	－５
無答	※	※	※	３	※	
計	５３	－２４	－３８	３	※	

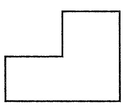
この点双列相関係数の分布から、

誤答であっても自信を持って解答している生徒は高い値が出、逆に正答であっても自信をもっていない生徒は低くなっている。そして、自信あり→自信？→自信なしとなるにつれて、点双列相関係数の値が低くなっている。

このことから、この問題に自信を持って解答することが、基礎問題全体に影響を与えると読み取れる。これは、$1-y$が一つに見れるということに起因しているものと考えられる。

このように共通なもので括るということは、文章の修辞法として、繰り返しを述べる方法に該当する。

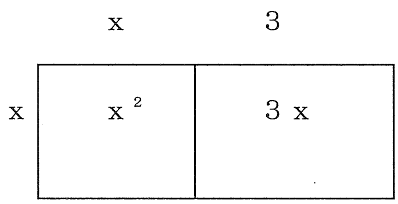
「激しく、雨と風が吹く」は「激しく雨が降り、激しく風が吹く」を表現しており、このような表現上の方法と共通するという認識も必要であろう。文の中で共通の句を探す。その他、下の図の中から共通の形を探す、その形で分けるなども同じ思考であろう。



この図を相似な４つのかたちに分ける方法

x^2+3xの形が積$x\times(x+3)$というように共通因数の積の形に表現できることができれば、因数分解が理解できると見てよいが、次のステップ、因数分解を活用し方程式、不等式などへつながることのためには、x^2+5x+6　のように式（多項式）全体を見て

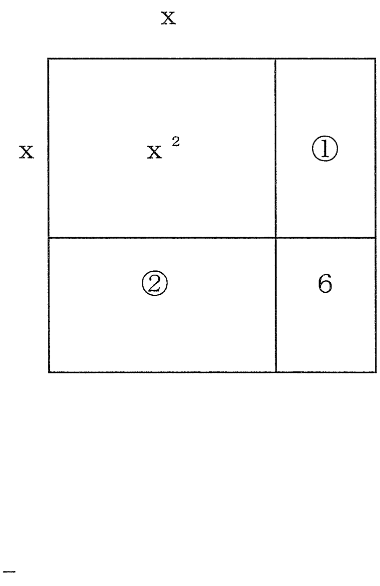
すぐに共通因数が見つけられない場合の因数分解についても必要である。そのため、因数分解された式の積は連合軸であることに着眼したい。ヤコブソン［１６］の研究により、連合軸は空間に沿った共時的なものにかかわるということと考えあわせると、因数の積は、空間的に考えること、例えば面積で解釈することは自然と思われる。
その意味で、面積を意識した次のような方法で確認しておくことも重要である。
例えば、$x^2+3x=x(x+3)$　を



のような図で、面積から各辺を求める発想も重要である。
そして、両辺が意味を持ってつながることが肝要であると考える。

　x^2+5x+6　のように、一目で共通因数が見つからないとき、指導として、
乗法公式　$x^2+ax+bx+ab=(x+a)(x+b)$
と照らし合わせ、$a=2$，$b=3$を求めさせ、更に、機械的に、たして5，掛けて6なる二数を探し$(x+2)(x+3)$とすればよいと進められる場合が多い。
　そのことによって、式の形式的な運用が背景をあまり深く考えずに機械的に出来るメリットはあり、生徒をわかった気にさせるものである。ところが、データから見る限り、ＳＬ達は形式的ではなく、立式、代入などの基本操作を踏まえ、その延長として因数分解をとらえている状況が出てきている。

　ところで、右辺の積の分解は
　　一般的に、２つないし３つの要素を分解して調べる場合、構造的に、２つ若しくは３つの軸に分け空間的に調べるという方法にも通じるものと考えられる。
　　一つの要素を横軸に、他の要素を縦軸に表示すると、各個物は平面に表示される。
　そこで、例えば、$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$　を
　上述の延長として、面積を意識した次のように提示することも有効である。



①、②は加えると５ｘ、右隅の面積６の各辺をいくつにすればよいか。
右端の面積が６の長方形の縦と横の長さを求め、①、②の面積の和が５ｘとなるように調整するという問題に帰着させる。このように、納得できる説明方法を確保しておきたい。

様々な数から、式全体（文脈）に適する組を選ぶ、という、統合的な考察により因数分解の仕組みが理解されるべきものと考える。連合の統合という観点であろう。
積は様々な試行錯誤（適する語を選ぶと同じ、連合軸を使って）決めていき、左の和と整合性をもたせる（統合軸）という構造をもつ。
左右のバランスを取るという「場」が必要であると思われる。
ここまで、文字概念形成上のＳＬ指導上の問題点として、統合軸では「繋ぎ記号としての＋、－」連合軸では「倍概念での言い換え」が大きな役割を担うことを指摘してきた。この問題点を顕在化するのが因数分解と云える。

因数分解は、左右および全体とバランスが要求される。試行錯誤して目的に達するという過程を踏む。また、推理問題にあるような試行錯誤も要求される。これらのことが、因数分解が、データにおいても、基礎的な内容の総まとめとして位置づけられる所以であろう。

このように、文字概念が形成されていくことによって代数式が理解できるようになる。そして、代数式が理解できることは、次の「変化をどう捉えるか」を考えさせる関数の重要なステップとなる。

第５章　関数指導への波及と関数のグラフ

【概要】【１】では、文字（式）への抽象化についての理解が深まると関数概念についての理解もすすむことをみる。

【２】では、関数のグラフに自信をもっていることが図形分野の理解に関連することをみる。

図形分野で自信をもっている生徒は、関数のグラフについても高い得点をとる。このことから、関数のグラフについては図形分野の理解が大きい影響を与えていることを確認する。

ここで考える図形分野では、この分野の理解構造を探るためにわれわれが開発した「図形の診断テスト」を用い、その実施結果より、相似比、対称移動および念頭操作という３つの要素が中心（核）となっていることが判明している。そして、とりわけ、念頭操作が操作学習によって解答に自信をもたせ得ることを述べる。

【１】関数指導への波及

関数についての的確な理解は、我々が想定しているスローラーナー達にとっては、到達目標であり、関数概念が抵抗なく理解が得られるようになれば、ほぼ問題なく高等学校における数学が習得されていくであろうと考えられる。そして、我々の

　分数の治療教材が関数概念を問う問題にも有効に働く

　図形認識も関数概念の形成に有効に働く

という解析結果は関数指導についての大きい成果といえる。

関数を広義に解釈して「２つの数量間の対応関係」とみると、自然数を学習する際の「ものの個数」と「数（自然数）」の対応から始まって、生徒達にごく自然に発想されると思われる。更に、この対応関係は様々な学習過程を経て育成されていくものと考える。この自然な対応関係を活かし、分数を数として把握させるため、数を数直線上の点と対応させて把握させることは大変重要である。即ち、実数の性質を直線の図的性質によって表している数直線は、分数が自然数と同時に表れ、存在することから分数を数として実感させ得るものと思われる。

そして、分数も数の仲間ということをとを踏まえ、分数の治療教材、分数で表された割合・比、倍概念の理解促進をねらった教材によって、関数の「対応関係」を構築するのに有効に働くということが確認されている。

このように関数関係を対応関係がつくことと捉えることにより、ここでのアプローチの観点とどのように関連するかを見ていく。

次の問題３－２）は、数の間の対応を問うものであり、関数概念を問うものである。

問題３－２）次の(①)、(②)にあてはまるものはどれか。

１番目	２番目	３番目	・・・	ｎ番目	（ｎ＋１）番目
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	・・・	$\frac{①}{□}$	$\frac{□}{②}$

ア．①７　②９　　イ．①ｎ－１　②２ｎ－１　　ウ．①ｎ　②２ｎ　　エ．①ｎ　②ｎ＋２　　オ．ア～エにはない。

			あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	①7	②9	2	0	4	0	0	6
イ	①n-1	②2n-1	4	2	2	0	0	8
ウ	①n	②2n	2	4	8	0	0	1 4
エ	①n	②n+2	5 0	2 8	1 7	0	0	9 5
オ	ｱ～ｴ以外		7	9	8	0	0	2 4
無答			1	0	0	1	0	2
計			6 6	4 3	3 9	1	0	1 4 9

この問題は、数の並びにおいて、始めからの項数と分子、分母との対応関係を把握することにより、相互間の一般的な対応関係を見つけ出し、それを文字、文字式で表現出来るか否かを問うものである。そして、具体的な形で求める場合は、例えば５番目であればほとんどの生徒が正答するが、思考の飛躍が要求されるｎ番目、ｎ＋１番目になると不安定になり、特にｎ＋１番目にはこの傾向が顕著に表れる。実際、①は順にみれば容易に正答出来るが、②は数ｎ＋１より１だけ大きい数の表現が要求される。このことは、前章で検討したように文字式ｎ＋１を一つの数として安定して把握出来るか否かということに関わってくる。

このように関数概念を形成していくためには、具体的な個々の対応から対応の規則性を読み取り、これを抽象化することができることが大切である。その際、ｎ＋１のような代数式が一つのものとして理解できることが重要となる。

次に、関数概念を問う問題のなかで、点双列相関係数が64と高く全体への影響の大きい次の問題５－１３）で検討する。

問題５－１３）関数ｙ＝３ｘについて、次の①、②の問いにあてはまるものはどれか。

① ｘの値が２だけ増すと、ｙの値はいくら増すか。

② ｘの値が２倍になると、ｙの値は何倍になるか。

ア{①５ ②６倍}　イ{①６ ②２倍}　ウ{①５ ②２倍}　エ{①６ ②３倍}　オ．ア～エにはない。

			あり	?	なし	できない	無答	合計
ア	①5	②6倍	2	5	2	0	0	9
イ	①6	②2倍	6 0	2 5	1 3	0	0	9 8
ウ	①5	②2倍	3	5	4	0	0	1 2
エ	①6	②3倍	8	1 1	2	0	0	2 1
オ	ｱ ～ ｴ以外		0	5	4	0	0	9
無答			0	0	0	0	0	0
計			7 3	5 1	2 5	0	0	1 4 9

点双列相関係数を調べると、次のようになる。

	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	－３	－１７	－１１	※	※	－２０
イ	６４	－２９	－２３	※	※	２９
ウ	７	－８	－１６	※	※	－１１
エ	６	－１５	－１１	※	※	－１１
オ	※	－１	－１１	※	※	－３
無答	※	※	※	３	※	
計	６７	－４２	－３６	※	※	

この問題は、正比例の関数を、対応関係を通して理解しているかどうかを見る問題である。ｘの値を２倍するものと２増すのとの違いが、対応関係を通して関数概念としてわかるか否かをみたものである。①では、
「ｘの値が２だけ増す」ということがｘ＋２ととらえられ、正比例の関係式ｙ＝３ｘより、

| | ＜ｘの対応＞ ＜ｙの対応＞
ｙ＝３（ｘ＋２）＝３ｘ＋６、 | ｙ＝３ｘ　ｘ　ｙ
となることから、 | ↓　↓
| ｙ’＝３ｘ＋６　ｘ＋２　ｙ’＝ｙ＋６

変化したｙをｙ’とおくと、ｙ’はｙ＋６　となるので、６だけ増えると読み出す。

また、②では | ＜ｘの対応＞ ＜ｙの対応＞
| ｙ＝３ｘ　ｘ　ｙ
ｙ＝３（２ｘ）＝２（３ｘ）となり、| ↓　↓
＜ここもＳＬに難＞ | ｙ’＝２（３ｘ）　２ｘ　ｙ’＝２ｙ

変化したｙをｙ’とおくと、ｙ’は２ｙ　となり、２倍になると読み出す。

「ｘの値が２だけ増す」を式ｘ＋２で表せること、「ｘの値が２倍になる」ことを２ｘと表せることが前提になり、式変形の結果ｙ＋６、２ｙを読み取れることが要となる。
更に、この解答過程を①の場合で詳細に見てみると、（②も同様※）

・「ｘの値が２だけ増す」ということがｘ＋２ととらえられること
・ｘ＋２という代数式が一つと見れて関係式ｙ＝３ｘのｘに置き換えること
・括弧表現がかけ算として計算（展開）出来ること
・３ｘをｙとみてｙ’＝３ｘ＋６がｙ’＝ｙ＋６となること
・ｙと変化したｙ’との対応関係が読めること

となる。これまで検討した視点、すなわち、和・積の安定性、代数式を一つのもの（単項式）として見ることができる、合成の考え方、倍の表現、代入操作、括弧の活用ということが活かせるか否かが要点となることがわかる。これらをあわせ考えることにより、この関数の対応関係を問う問題の正答に至るものと考えられる。

※）②で見ると、

・「ｘの２倍」が２ｘととらえられること

・２ｘという代数式が一つと見て関係式ｙ＝３ｘのｘと置き換わること

・ｙ’＝３・２ｘ、そしてｙ’＝２×３ｘと出来ること

・３ｘをｙとみてｙ’＝２ｙとなること

・ｙと変化したｙ’との対応関係が読めること

となる。

これらの問題が出来るようになると、変量的な数量関係の把握や洞察が出来るようになり、関数概念が一層深められていくものと思われる。

更に、関数の意味を正確に理解するためには、そのグラフについて、そして図形認識が大きな役割を担うことを次にみる。

【２】関数のグラフと図形のセンス

関数のグラフはその形が表示される座標平面（空間）の理解、平面全体を見る視点が欠かせない。座標平面上の点等の動きについては図形に対する認識が必要である。実際、図形問題に関する研究において「数学診断テストＡ」および「図形の診断テスト」を共に受けた329名の受験者のうち、「図形の診断テスト」で上位者70名（全15問中10問以上を自信ありで正答している生徒）について調べると、次の表のようになる。上段（A）が、全生徒329名の「診断テストA」について自信ありでの平均正答率、下段（B）が、「図形の診断テスト」の上位者70名の自信ありでの平均正答率である。

問題番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	57	74	49	58	41	63	55	46	31	38	39	32	28
B	80	83	66	77	54	76	81	69	54	63	67	57	57

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
45	22	33	55	50	45	17	22	16	42	24	26
71	44	54	69	59	64	44	36	31	51	40	43

図形分野で自信をもっている生徒は代数分野を中心とする診断テストAでも高得点である。そして、図形に長けている生徒は診断テストＡのどの問題がよくできるかを調べる。

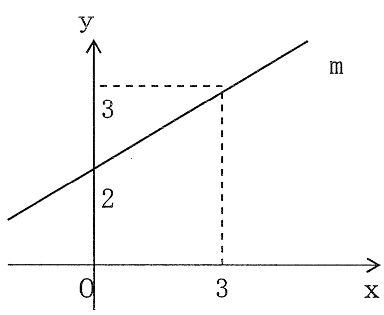
（A）と（B）、その差が著しいのは、17㌽の正答率と44㌽の正答率の差がある２０番の問題である。２０番の問題は次のような「関数」に関する問題である。図形教材の理解が進んでいる生徒については、関数に関する２０番の問題がより理解しやすいものと考える。すなわち、図形についての理解が関数の理解を支えているといえる。

Ａ－２０）

ｙはｘの関数で、そのグラフは右の直線ｍである。次の ①, ② の問いにあてはまる数値はどれか。

① ｘの値が１増えると、ｙの値はいくら増えるか。

② ｘ＝４のときのｙの値。



ア ① 1　② 4

イ ① $\frac{1}{3}$　② $3\frac{1}{3}$

ウ ① 3　② 4

エ ① $\frac{1}{2}$　② $3\frac{1}{2}$

オ　ア～エにはない

この問題の分布は、

	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア　①１　②４	５４	５８	５０	０	２	１６４
イ　①$\frac{1}{3}$　②$3\frac{1}{3}$	６７	４３	５４	０	０	１６４
ウ　①３　②４	１０	１０	２９	１	１	５１
エ　①$\frac{1}{2}$　②$3\frac{1}{2}$	８	１３	３３	１	１	５６
オ　ｱ～ｴにはない	１２	２２	４１	２	４	８１
無答	０	０	０	２４	５	２９
計				２８	１３	５４５

点双列相関係数を調べると、次のようになる。

	あり	？	なし	できない	無答	合計
ア	－３	－１７	－１４	※	－６	
イ	５０	３	－１	※	※	
ウ	１	－９	－７	－４	－５	
エ	４	－４	－８	－４	－５	
オ	１８	３	－６	※	－８	
無答	※	※	※	－１０	※	

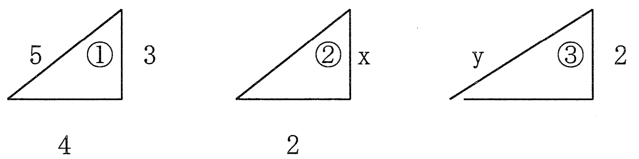
この関数に関する問題２０番と、図形の問題のどの部分と結びつくかを調べるために、図形の診断テストの各問題との相関を見ると、以下のようである。

＜図形の診断テストとの相関＞

問題番号	１	２	３	４	５	６	７	８	９	１０	１１	１２	１３	１４	１５
A	１８	３０	３７	２４	２５	２４	３２	２２	３９	２２	２８	３６	３４	２９	２４

関数の問題と相関が高い図形の診断テストの問題を相関の高い問より順に並べると、次のようになる。

図９）　下の３つの三角形は相似である。ｘ、ｙの長さを求めよ。



ア $\begin{cases} ①\ x=1 \\ ②\ y=4 \end{cases}$　　イ $\begin{cases} ①\ x=\frac{3}{2} \\ ②\ y=4 \end{cases}$　　ウ $\begin{cases} ①\ x=1 \\ ②\ y=\frac{10}{3} \end{cases}$

エ $\begin{cases} ①\ x=\frac{3}{2} \\ ②\ y=\frac{10}{3} \end{cases}$　　オ　ア～エにはない

図３）線分ＡＢをまず直線 *l* を軸として対称移動させ、さらに直線 *m* を軸として
対称移動させた図形はア～オのどれか。

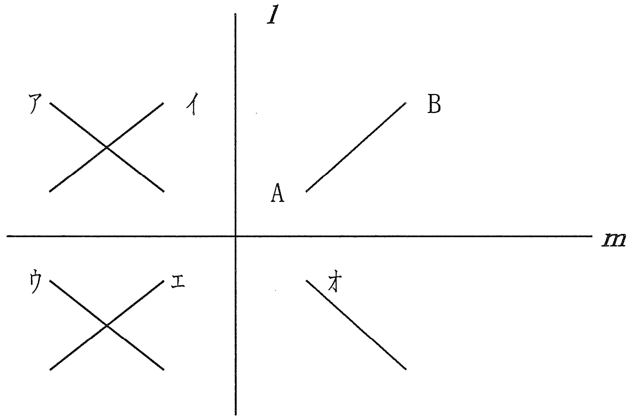


図１２）平面上で１つの決まった点からの距離が一定である点の集合は、どのような図形
になりますか。
ア　点　　イ　平行な直線　　ウ　垂線　　エ　円　　　オ　ア～エにない

図形についての理解のうち、相似比に関する比例関係、対称に移動させる、そして軌跡の考えが関数概念形成に関与していることを示している。

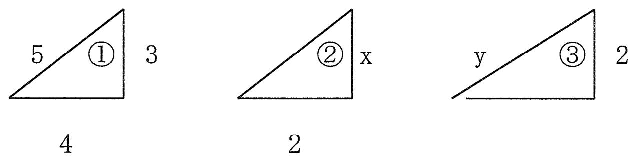
また、図形教材の研究（［３］）では、次のような結果が得られている。

図形理解のうえで核になっているのは、「相似比に代表される２量の間の対応関係が把握できる」こと、「対称性に代表される平面上の位置関係が把握できる」こと、そしてそれらを支える形で「念頭操作ができる」こと、これらが相伴い図形に対する総合的な把握ができるようになる。即ち、図形教材を理解させるための三要素として、「相似比の理解」「対称性の理解」「念頭操作ができること」があげられる。

そして、上述の関数概念形成に関与している主要な問題はこの結果と符合する。つまり、関数概念形成には図形指導上のポイントが大いに関与すると判断出来る。そこで、本アプローチでの言語学の軸（連合軸、統合軸）を考慮し、図形上のポイントを詳しく見ていく。

相似比およびその活用については、比の値を変化させ動かす、このことは各要素を変化させ次々値を出すということで、メタ言語的思考、あるいは連合軸と見なしうる。それに対して、その活用、相似比を活用するということは、他の図形に対し、特定の比の値を適応し調和を保つてということで、連合に対する統合と考え得る。従って、相似比の活用は、「連合の統合」というように考えることができる。相似比の核となる問題図９）で検討すると、

図９　下の３つの三角形は相似である。ｘ、ｙの長さを求めよ。



ア　① $x=1$
　　② $y=4$

イ　① $x=\frac{3}{2}$
　　② $y=4$

ウ　① $x=1$
　　② $y=\frac{10}{3}$

エ　① $x=\frac{3}{2}$
　　② $y=\frac{10}{3}$

オ　ア～エにはない

①の三角形より、縦は横の $\frac{3}{4}$ 倍となっている。三角形②に適応し、②は①と相似なので、縦と横の比が $\frac{3}{4}$、横が２なので、縦＝$2\times\frac{3}{4}$ として算出する。この比の値 $\frac{3}{4}$ を出す過程を連合、②に適応する過程は、筋道を経て、結論に至るという意味で統合と見られる。即ち、「連合の統合」により解に至ると考える。

SLにとって図形と計量（三角比）がすぐに理解しづらいのはこの統合の部分（比の値は、辺の値（連合）によらず角度（統合）のみに依存）が納得できない所以と思われる。前述の言葉で言えば、この思考過程は2つの三角形を鳥瞰的に見て適応できるか否かにつながるものと考えられる。

次に、対称の扱いについては、

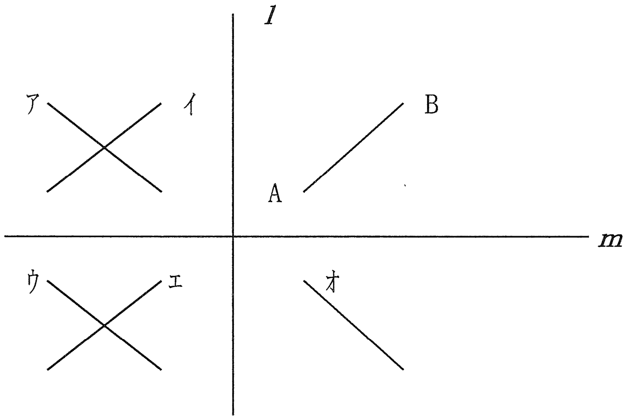
図形をひとかたまりととらえ、その図形全体を動かすという対称移動は生徒達には比較的理解しやすい。

移動させる図形は、その図形全体という意味で、文章がまとまっていると同じように「統合」ととらえれる。その移動にあたる対称移動はまとまった図形をつぎつぎと動かすという意味で連合ととらえられる。このように考え、対称移動は「統合の連合」と見ることができる。

ここでの、動かす図形を一つに見るという観点はほとんどの生徒が了解するが、問題は図形を動かす場面で生じる。

次の図３）でみると、

図３）線分ＡＢをまず直線 l を軸として対称移動させ、さらに直線 m を軸として対称移動させた図形はア～オのどれか。



この問題、答が正答（エ）となっていても、l を軸とし対称移動した図形がイ、m を軸とし対称移動した図形がエとなる生徒が出る可能性がある。
このことは、

対称の治療過程で、例えば、
「あ」という文字を直線 m に関して対称に移動するかという問題で、右のような誤答が多く出てくることから確認できる。

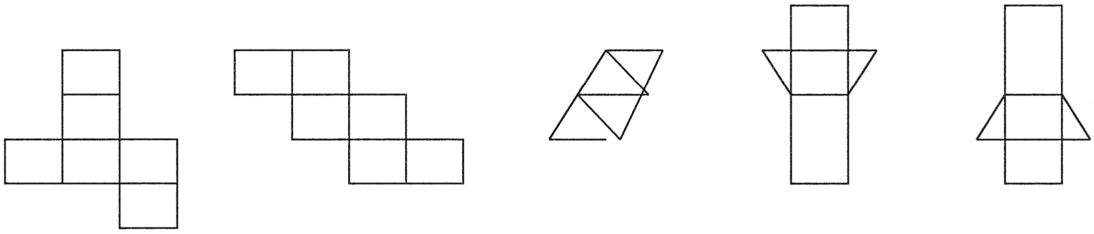
	m	
あ	｜	
	↓	
	m	
あ	｜	あ

すなわち、一つのかたまりと見れるが、対称軸に関して変化させる意味がわかりにくく、平行移動とみる生徒が出てくる。この対応は各点毎に対応する点をきめるという意味で、連合的である。統合された、一つと見たものを連合で動かす意識が必要である。
対称性は、統合の連合として指導が要ると考えられる。

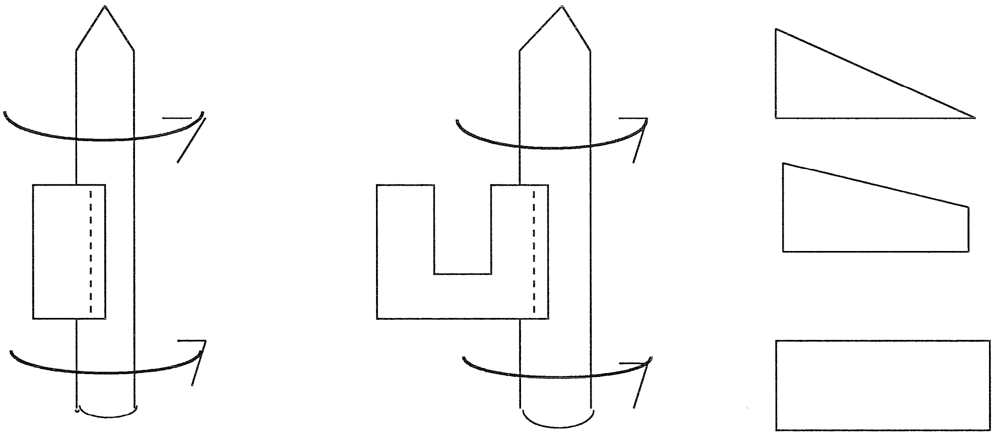
「相似比の理解」「対称性の理解」と検討してきたが、図形教材を理解させるための三要素の三番目の「念頭操作ができること」を検討する。
この「念頭操作」は「対称性」「相似比」を系統的に支える形となっている。更に、この「念頭操作」は、以下のことから操作的学習によって育まれていると考えられる。
実際、図形の治療において、
操作的な内容の治療教材の試行により、念頭操作をともなう問題が治療されていくというがわかってきた。
Ａ高校で、「図形の診断テスト」で、６点以下の１０名について、作業を主とした治療教材「ExpressⅥ」を課した。（［３］）

この治療教材は、例えば次のような内容の作業をさせる教材である。

【課題例１】下のような図形を組み立てよ。（厚紙用紙を切り抜き組み立てさせる）



更に、次のような課題もある。
【課題例２】
右の図形を切り抜いて鉛筆などにはり付け、回転させよう。どのような立体に見えるか、描いてみよう。



この治療によって、自信度を考慮しない平均正答率はある程度上昇するが、それにもまして、自信アリでの平均正答率は大きく上昇する。
操作学習を中心とした治療教材は、自信度に変化をもたらし、自信の度合いを上げるものと考えられる。

特に、空間図形の「組み立て」を熱心に取り組んだＣ君は、「図形の診断テスト」において次のように変化している。(ア～エは選択肢を○は正解を表す)

問題番号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12	14	15	計
	自信有	○															1
前	自信？		ウ	オ	○	○	エ	○	イ	オ	イ	○	ア	イ	イ	○	5
	自信無																
	自信有	○		○				○		○	○	○	○			○	8
後	自信？		ウ		○	○	エ		イ					イ	イ		2
	自信無																

図形を組み立てる、図形を動かす、グラフをずらす、補助線を引くという操作、活動性をともなう学習は図形理解の要である。この活動性によって、念頭操作は育成されると考えられる。

図形の活用として、無理数について不安定な生徒に対して $\sqrt{a}$ が「面積ａの正方形の一辺」で徹底すると、そして、紙を折って半分の面積の正方形を作らせるなどの操作で親しませると、無理数について「 $\sqrt{2}$ は？」の問がほぼなくなり、抵抗が少なくなる。

操作学習は視覚、聴覚ばかりではなく触覚（手作業）を働かせることとなる。

「手が覚える」「手で覚える」という言葉でも表れているように、手作業というものは、視覚、聴力、触覚の総合によって全体が見えて来、理解に結びつくものと考えられる。

様々な部品が、手という場で、一つの形に結実することを示す。このことが念頭操作を誘発するものと考えられる。

手作業によって、念頭でイメージでき、操作できるようになるものと思われる。

また、解析幾何の指導においても、方程式とその方程式の表す図形の意味がわかりにくいことに通じる。その場合、図形を「式でつなぐ」、「式で切る」、「式で分ける」など、定規で線を引く、コンパスで線を分ける、コンパスで円を描くというように動作を伴う表現で、あたかも操作をしている感覚で捉えさせる必要がある。

関数のグラフについては、その一般的指導として、

> 変化表を作り、その変化表からｘ座標、ｙ座標の組を座標として平面に明示し、それらをトレースしグラフの形を浮かびあがらせる。そしてその形の特長を調べ、その後は形の特長をとらえ描いていく。

という流れである。このことにより、生徒達は形の特長を覚え形式的にグラフがかけるようになるが、グラフとその関数の意味との関係を難解にしているものと考えられる。

点をプロットしグラフを作っていくことと、式の形から特徴（頂点、傾き、極、変曲点、・・・）を捉え描いていくこと、この２つの操作が結びついていないことが問題である。

例えば、次の問題５－１５）では、正答率40と低い。

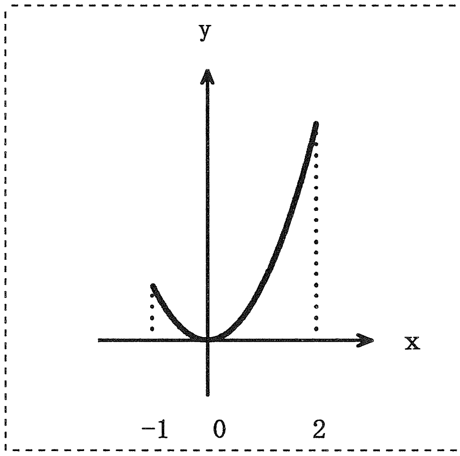
５－１５）右の$y=x^2$のグラフで、ｙのとる値の

① 最も大きい値

② 最も小さい値　は、次のどれか。

ア. { ①４ ②１ }　イ. { ①２ ②－１ }　ウ. { ①４ ②０ }　エ. { ①２ ②０ }

オ．ア～エにはない。



両端の値で判断する答のア）が誤答として多いことは、関数値の認識が不十分なＳＬが多く存在することを示す。

変化表の作成においてｘ座標の数値をもとにｙ座標の数値を順に決めていくことは、前述の言葉で「連合的」である。一方、形の特長をとらえグラフを描くというのは、フォームを一つととらえ動かすという意味で「統合的」である。従って、関数のグラフ指導は、連合の統合を想定する必要がある。

代数の式では、「連合の統合」は連動して全体を見れるかどうかがポイントであった。その意味で、関数のグラフの指導は、解析幾何的見方となるが、次のように進めることがＳＬ達には馴染むように思われる。

座標平面上にｘ座標とｙ座標の点の組（ａ，ｆ（ａ））を多く求めさせ、それをもとにグラフを作成させる。

出来あがったグラフをもとに改まって関数的見方（ｘの値に対するｙの値の変化を読む）を説明する。

例えば、２次関数の場合のｘ軸方向への移動も、$y=x^2$ のグラフで、座標平面で原点をはじめ数点をプロットさせ、同じように$y=(x-2)^2$のグラフ上の点も数点描かせることによってその変化を確認させる。その後、関数のグラフとしての意味付けをした方が関数の値の意味などとらえさせやすい。

自信をもって問題に正答している生徒をその問題を理解している学習者として考えてきた。そして、学習者が理解していることは、その学習内容を自分なりの言葉で表現できている生徒である。その意味で、自信をつけさせるためには、学習者が自分の言葉で内容を表現出来ること、言語化出来ることであると考えられる。言語化させる手立てとして、内容について筋道を立てること、語彙をもつことが必要であろう。

これまで考えてきた、数から文字への抽象化の把握およびその延長の関数概念の習得には、言語活動での筋道を立てることや、語彙を増やす操作学習が文章を書く力や、読む力を付けさせると同じように、数をいろいろ変えて、その数が文字となり式の形が立ちあら

われるように、数が次々と操作できるメタ認知をもつこと、記号のコノテート、ひとかたまりのものをひとつにみる、これらをトレーニングすることにより念頭操作を高めていくことが必要と考える。

第６章　終わりに

「出来なくても仕組みがわかったから満足」「（ケアレスで）答が合わなくても、わかったから大丈夫」という状態が出来ればと思う。わかったという成就感がもてれば、自信が得られ、理解できたものとみたい。

丁度、自転車に乗れるようになると、別に曲芸が出来なくても乗れるから大丈夫、という状態になる、あるいは、水泳である程度泳げるようになると、別に遠泳ができなくとも、泳げるという状態になれればと思う。

そのため、ＴＶ画面による旅行と実際の旅行との違いのように、全身で受け止めたものと、単に視覚、聴覚だけでは受け止め方が異なるのと同じで、様々な方法で調べてみることにより、自信度が向上するものと考えられる。すなわち一面的に見るだけではなく、多角的に見れるようになること、視覚だけではなく、触覚も誘発すること、手など、ある意味全身を使い、臨場感があり、その場に数学が出現するというようになることが必要である。そのようにして、「わかったから出来なくても満足」ということが実感できるようになり、すすんで取り組んでいこうという状態になると考える。

このアプローチは、大阪でのＳＬ研究の成果をベースとしている。そこでは、高校で生徒達が数学を学ぶ際の最大の難関である「数から文字（式）への抽象化」の仕組みを探ってきた。数学の学習に困難を感じる生徒の多くは文字使用への抵抗感が大変強い。「わかった」状態にするには文字に抵抗をなくすることと考え、数値解析による分析を進めてきた。

その結果、問題間の相関係数や点双列相関係数等を用いて、

数から文字への抽象化の過程において、文字の定数的側面と変数的側面の問題が異なるグループとして選び出されることを確認できた。文字を定数ととらえる定数的側面と、いろいろ数を変化させ、当てはめる（代入する）ものとしての役目をもつ変数的側面が別のグループとして抽出された。

すなわち、文字（式）の初期の理解には、変数的側面と定数的側面の２系列があり、この２系列が統合、結合また再分離、再結合、再統合を繰り返しながら文字概念が形成されていくということが数値解析的に裏付けられたわけである。更に、定数的側面は、主として、正・負の数の理解に支えられており、変数的側面は、有理数、実数特に分数に支えられ、また分数表現での割合・比（比の値）、倍概念の理解に支えられている。この２系列の、定数的側面と、変数的側面について次に更に詳しく検討した。

文字の定数的扱いは、式の成り立ちと関連し、式が安定して捉えられるや否やに帰結できる。この式の構成を左右するのは記号「＋」「－」であることが判明した。立式において記号「＋」「－」の多義性が理解できるか否かであった。代数式ａ＋ｂの「＋」を１＋２の「＋」と同じにみていないかである。

記号「＋」「－」を使うとき、含意として、記号が足し算（引き算）や「～だけ多い（少ない）」という表現としても使うことを理解できていることが大きい意味をもつ。

記号「＋」「－」のもつ主な３つの使い分け（演算の「たす」と「ひく」、「正の数であること」と「負の数であること」、「（＋１）×」と「（－１）×」という倍数的とらえ方の３つ）が出来ることが代数式が安定してとらえられるために必要であることが判明した。

次に、文字の変数的扱いは、文字を数で置き換えていくこと、変数を次から次へと繰り出し、基本的に代入操作である。この代入を阻害している大きな要因としては思い浮かぶ数が限られていることであった。

多くの変数を想起できる出来ないの鍵を握るのは分数であり、分数が割合、比などの諸概念の理解を通じて、数（比の値）としてとらえられることであった。そして、そのベースとして、分数に表されるこれら諸概念が倍で捉えられることが肝要であった。例えば、問題「Ａ：Ｂ＝３：４のとき、

Ａ：Ｂ＝１：（　）」では（ $\frac{4}{3}$ ）となるだけでなく、ＢはＡの（ $\frac{4}{3}$ ）倍と

読めることが必要であった。基準との関係から倍でとらえられ、倍率としての分数倍がとらえられるかどうかが重要であった。２量間が基準をもとにした「倍」でとらえられることにより、分数が数として、比の値として捉えられ次々と数が出てくるものと考えられる。

言語生活における抽象性、論理性、情緒性は、数学の学習においても深い関係があるものと思い、言語生活においてこれらを獲得する術、この知見が、数学の文字への抽象化の指導にも活かせるものと考える。

言語学では、日常の言語活動において、一つの語と他の語を結びつける方法に２つあるという。

一つには、話の筋道を構成する統合軸、

一つには、語を選択するという連合軸

この二つが組み合わさって我々の言語活動を支えるといわれている。

文がうまく作れることは、話の筋、流れが明晰になることと、語が豊富で精緻になることによる。話を運ぶ筋と、適した語を選ぶということが必須である。このように考えると、文構成のためには、話の筋を見る統合軸と、言葉の豊富さの連合軸が鍵を握っていることが納得できる。

話の筋道を追うこと、論の流れを調べること、言葉を豊富に多様にすること、これらは数学における文字への抽象化に影響を与え、これらを鍛えることにより、数学の理解を増進させるものと考える。

数から文字（式）への抽象化の過程における変数的側面が、言葉の豊富さをもたらす言語学での連合軸に対応し、定数的側面が話の筋を辿る言語学の統合軸に対応している。つまり、数学において、連合軸は活用できる数の豊富さに、そして、統合軸は式の構成に対応させえることとなる。

そして、

定数的側面については、つなぎ記号「＋」「－」が、ヤコブソンの失語症研究で統合軸の「繋ぎ言葉」が丁度符合する。更に統合軸形成の過程、「繋ぎ文字」、接続詞、代名詞、

指示代名詞へという流れから、「繋ぎ言葉」の次に代名詞が問題となる。指示語（文）等が、指示されるものを一つに見て、置き換えられ、次々と推移していく。これと同じように、数（または式）は一つとみて、かたまりとして置き換えられることがポイントとなる。

このことは先ずａ＋ｂなる式を構成する「＋」記号を繋ぎ文字として理解し、次にこのａ＋ｂが一つのものとしてみられるという過程を経て文字（式）の定数的側面の基礎が出来るものと考える。

一方、文字の変数的側面への対応としては、「倍」で考えさせることが重要であることをみた。分数が「比の値」を表していることを強調することとなり、数のもつ「積」的な面を重視することとなる。

「 $\frac{2}{3}$ ｍは２ｍの（　）」などの問に表れるように、分数（「比の値」）は、基準（量）を変えれば、一つの数が無限に多くの表現をもち、それらを同一化してみる抽象化の考えがベースにある。分数に表される割合、比を通じてこのことを認識させていく必要がある。

言語学との関連では、変数的側面は連合軸に対応する。ヤコブソンに依れば連合軸の欠損は、「同じものを異なった表現で」というメタ言語的操作と関与している。
すなわち、”関連するもの、反対のものを想定し次々と言葉が繰り出される。同一、異化により次々と言葉が出る。”というメタ認知的操作が関係する。数学での変数的側面に関しては、このメタ認知の働きをするのが「倍」と捉えた。基準を変えると様々な姿を変える比の値、分数を、基準をもとに倍で捉えることによって数直線上の数として位置づけ、想起する数を豊富にするものとみた。

２量を比較する際、基準量を意識し、倍での言い換えを通じて分数がとらえられ、それが数として出てくるシステムが身についているかがポイントとなる。

続いて、いわば統合軸の連合軸ともいえる“括弧（　）”の果たす役割が大きいこと、括弧（　）は、“内”は定数的に見たひとかたまりとし、“外”は一つの変数とする、あたかも一つの文字であるということをみた。更に、連合軸の統合軸ともいえる合成操作を意識させること、まとまった部分などに目を付け、式全体との関連を見通すことが必要であることも検討した。
これらのことをベースとして文字概念の構成がなされていくものと考えた。

記号のコノテーション、メタ言語で言い換えること、括弧の意味を踏まえること、全体を見渡すこと、これらの表現する操作により、文字式についての理解が深まり、自信を持った文字使用となると考えられる。とりわけ、ＳＬの障壁の大きな要因として、繋ぎ記号（特に＋、－）についてコノテートする力、倍概念を経由して分数が次々と算出できることが大きなポイントとなることが判明してきた。初期段階においてこれらを克服することによってかなり学習が進むものと思われる。
以上のことをもとに対応策として、次のようなことが考えられる。

・文字式を記号「＋」「－」を意識して作らせること。

まず、正負の数の計算の式を、表している式がどのような操作をしているかを振り返らせることは重要である。例えば、－５－（－２）は、－５より－２だけ小さい数を求めるのだから２だけ大きい数を求めることになる。など、式の成り立ちを認識させる大きな要因であるから、このような振り返りはぜひ必要である。そして、出来上がった式を一つのまとまったものと見られるようにする。例えば、「数ａより３だけ大きい数は何ですか」などの問題が出来ない生徒も多い。簡単なように思えるが、ａ＋３が「＋」の意味を含め一つとして認識に至っていることを調べることが肝要と考える。

・倍概念をもとに考えさせる習慣をつけさせる。

分数が「比の値」の面をもつことを意識させ、分数を含めた多様な数を想定できるように図る。「２ｍの$\frac{2}{3}$ｍの図示」や「Ａ：Ｂ＝３：４のとき、Ａ：Ｂ＝１：（　）」などは識別問題となる。

なお、文字の変数的側面が問われる代入操作については、ａｂなる表現がａ×ｂであることは確認しておきたい。

・括弧の使い方に慣れさせる。

文章を読み解くことにより、括弧を使った式をつくらせること、このことを通じて括弧の意味を理解させる。括弧のもつ意味から括弧・括弧（(　)(　)）は積を表していることも徹底しておきたい。

学年進行で括弧の使い方を、何度も指導に入れる。

・式全体を見る練習をさせること。式全体をまとまりなどを意識させ合成操作をもとに考える習慣を付けさせること。

そして、具体的に各項目が定着しているか否かを問うことは極めて重要であり、わずかな時間で各生徒の問題点を的確に探るための識別問題や治療教材は必要である。識別問題は（附）にまとめた。

これら「記号の使い分け」，「演算表記法」などは規約的、定義・約束的であるがゆえ自然に身につくものとみなされ、それ故、練習量の少ない生徒には定着しづらい面をもつ。最初に説明し、それ以降理解しているものと考え、余り意識的に触れないものと思われる。形式的に式変形が出来たとしても、自信をもって理解していくことが出来ない原因はこのあたりにあるものと思われる。識別問題の実施時など様々な場面で補っていく必要がある。

最後の第５章では、以上のことを受け、文字概念形成の到着点と考えられる関数概念について調べた。関数、数と数との対応関係には、和・積の表現、多項式等を一つの項として見れる、代入操作、括弧の活用などこれまでの核となる概念の理解が合流していること、そしてその全体像をイメージとしてつかむためには関数のグラフの理解が欠かせないことを検討した。更に、関数のグラフの理解のためには、図形理解が必要であること、対称性

の認識および相似比などの計量を伴った認識、そしてこれらを支える念頭操作が必要であることをみた。
この念頭操作はどのようにして形成されるか。見解では、操作学習により育成されると考察した。すなわち

動作をともなう操作学習によって、念頭操作ができるようになり、図形のもつ模式図的な性質、計量を含んだ性質についての理解が深まり、文字式についての認識と相まって関数の理解が醸成されているものと考えられる。

このことおよび前述のことを踏まえ、自信をもたせるためには、操作活動が必要であり、文字概念形成のためにも、図形概念の形成のためにも、コノテートできること、メタ言語で言い換えられること、括弧の意味を踏まえること、全体を見渡すこと、念頭操作ができることなど、これらが操作活動を通じてできるようになることが重要と考える。

水泳、自転車も同じであるが、治療、広い意味のわかる授業展開も、上述のことを踏まえ、視覚だけではなく、触覚、聴覚という総合的に五感を使う場を設定するべきであろう。このようなことが、スロラーナーから抜け出せる手立てと考える。

（附）識別問題群（このアプローチを踏まえた識別問題）

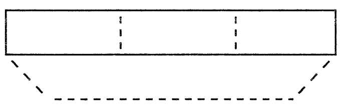
各分野を指導するに当たって、以下のような問題のうちから各分野の指導内容、生徒のレベルに合わせ、数個を選び、組み合わせることによって短時間で解答できる「調査問題」を作り、実施し、的確に各生徒の問題点を捉えておきたい。そのことにより、答案マップなどの活用により、指導内容をより生徒に密着できるものと考える。

★　線分ＡＢを３：４に分ける点をＰとする。
①　ＰＢはＡＰの何倍か。　②　ＡＰはＡＢの何倍か。
【ねらい】数量関係を洞察するために２量の関連を［倍］で捉えられるかを問う
①はＡＰ（３）を１とみなし、ＰＢ（４）を［倍］でとらえられるか。
②は全体（ＡＢ）を７等分ととらえ、７等分した基準の３つ分を［倍］で正しく表現できるか。

★　ａより３だけ大きい数を表せ。ａより－３だけ小さい数を表せ。
【ねらい】統合軸の初期段階、繋ぎ記号「＋」が単項式の和として表すとともに、それ以上変形できないかたまりとして一つにとらえることができるか。

★　次の□に「＋」、「－」の記号を入れよ。
①　－７□２＝－５　②　３□（－５）＝８
【ねらい】多様な使い方のできる記号「＋」「－」、ここでは計算の仕組みを踏まえているかを見る。

★　下の図で２ｍのひもについて２／３ｍを斜線で表示せよ。



２ｍ

【ねらい】２／３ｍは１／３×２ｍととらえられるかどうかを問う。全体の意識がないと、４／３ｍの場所を表示しがちである。

★　Ａ：Ｂ＝３：４のとき、Ａ：Ｂ＝１：（　）
【ねらい】単なる規約の問題でなく、これを自信をもって正答できるかどうかは、２量間の関係を把握できるかどうかにかかわってくる。比および倍概念が定着しているかどうかを判断できる重要な問である。

★　$2a+3=A$としたとき、次のおのおのをAで表せ。

1）$2a+5$　2）$4a+6$　3）$2a$

4）$3a$　5）$4a+7$　6）$2a^2+3a$

7）$4a^2+10a$　8）$4a^2+12a+9$

【ねらい】$2a+3$を一つのものとして処理できるかどうかを問う。$2a+3$を念頭に置き、例えば、1）では$2a+5=2a+2+3$なる目的をもった処理ができるかどうか、また、繋ぎの記号「＋」「－」が含みをもってみれるかどうかを見る。

★

二次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（解の公式）。

この公式を利用して、次の二次方程式を解きなさい。

①　$2x^2-3x-1=0$　　②　$-x^2-x+1=0$

【ねらい】二次方程式の係数の意味がわかるか、記号「－」が－1倍ととらえられ計算できるか。

★　nを整数　$n(n+1)$が2の倍数のとき、nとn＋1のどちらが偶数ですか。

【ねらい】様々な可能性のあるとき、場合に分けて検証するという認識があるか否かを問う。

★　次の計算をしなさい。これ以上計算できない場合は、もとの式を書きなさい。

①$2a+5a$　②$a+2b$　③$5-(-3)$　④$2+5a$　⑤$a^2-3a+2a+3$

【ねらい】同類項でない項はそのままで表すことに抵抗はないかどうかを問う。

★　xを2倍したものに、3を加えた式がある。xがt＋1のときの式を書きなさい。

【ねらい】括弧を用いた運用ができるかどうかを問う。

★　x^2+x　は$x+1$の何倍ですか。

【ねらい】因数分解は積分解の意識があるかどうかを見る。

★　$\dfrac{4a+2}{2}$　を簡単にしなさい。

【ねらい】約分が積の分解で理解しているか。$4a+2$が一つのものと認識しているか。また、積分解ができるかを問う。

★　$a=3$、$b=-1$のとき、abの値はいくらか。

【ねらい】abが積としてとらえられているかどうかを問う。

★　ある先生が「この円$x^2+y^2=9$をこの直線$y=2x+1$で切る」と云われました。どういう意味かを答えて下さい。

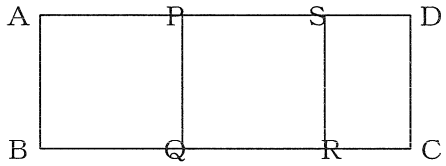
【ねらい】解析幾何的発想ができているか。式表現が図形表現と結びつけられてイメージできるかを問う。

★　先生が「５－３も代数ではａ＋ｂと書ける」といわれました。Ａ君が「ａが５で、ｂが３なのに、「＋」はおかしいな」と聞いてきました。あなたはＡ君にどのように答えますか。

【ねらい】記号「＋」「－」の使い分けができるかどうかを問う。

★

図のように長方形ＡＢＣＤと正方形ＰＱＲＳが辺を共有してある。ＡＳ＝１２、ＣＱ＝９　であるとき、長方形ＡＢＣＤの周の長さを求めよ。



【ねらい】文字を使うよさ。

【整数関連】

★「奇数、偶数が末位の数で判断できる」このことを説明しなさい。

★（１）十の位の数をａ、一の位の数をｂとして２桁の数を書き表しなさい。

（２）（１）を利用し、「数が奇数であるか、偶数であるかは一の位の数で判断できる」ことを説明しなさい。

★「４の倍数は下２桁の数が４の倍数のとき」このことを説明しなさい。

★「５の倍数は末位の数が０または５のとき」このことを説明しなさい。

★「各位の数をたし３の倍数であればその数は３の倍数」このことを説明しなさい。

★「奇数の平方から１を引くと８の倍数」このことを説明しなさい。

★ある正の整数ｎの末位の数字だけを１２倍した数と、ｎの末位の数字を除いた数との和が１７の倍数ならば、ｎは１７の倍数であることを示しなさい。

【図形関連】

★三角形の内角の和は180°

★任意の円の中心を求めよ。

★面積が同じで形を変化させる。

<参考文献>

１）デーヴィス「数学理解における認知科学」佐伯胖訳　国土社（1987年）
２）大阪数学教育研究会「分数・文字式を教えること」明治図書（1987年）
３）図形分野の理解構造の解明と治療実践　日本数学教育会誌　第７６巻　第３号（1994年）
４）「場合の数・確率」指導上の問題点を踏まえた治療の実際　大阪数学教育研究会「研究セミナー」第２５号（1997年）
５）高校数学科におけるSlow-Learner　の指導に関する総合的研究　数学教育研究第６号　大阪教育大学数学教室（1976年）
６）高校数学科におけるSlow-Learner　の指導に関する総合的研究（２）　数学教育研究第７号　大阪教育大学数学教室　（1977年）
７）高校数学科におけるSlow-Learner　の指導に関する総合的研究（３）　数学教育研究第８号　大阪教育大学数学教室（1978年）
８）高校数学科におけるSlow-Learner　の指導に関する総合的研究（４）　数学教育研究第９号　大阪教育大学数学教室（1979年）
９）高校数学科におけるSlow-Learner　の指導に関する総合的研究（５）　数学教育研究第１０号　大阪教育大学数学教室（1980年）
１０）高校数学科におけるSlow-Learner　の指導に関する総合的研究（６）　数学教育研究第１１号　大阪教育大学数学教室　（1981年）
１１）高校数学科におけるSlow-Learner　の指導に関する総合的研究（７）　数学教育研究第１２号　大阪教育大学数学教室（1982年）
１２）北川如矢,他11名「高校数学科におけるスローラーナーの診断と治療(1)、(2)、(3)」大阪府科学教育センター研究報告(1979年)(1981年)(1983年)
１３）高校数学科におけるSlow-Learner　の指導に関する総合的研究（第２７年次）「関数」分野の診断テストの開発と実践結果　大阪高等学校数学教育会「研究セミナー」　（2003年）
１４）疋田直樹　　関数概念の獲得について－１８年前のデータと比較して－　The Prospect for Mathematics Education in the 21st Century （2000年）
１５）F・ソシュール「一般言語学講義」小林英夫訳　岩波書店（1972年）
１６）言語の二つの面と失語症の二つのタイプ　ロマーン・ヤコブソン「一般言語学」川本茂雄他訳　みすず書房　(1973年)
１７）平林一栄「数学教育の活動主義的展開」東洋館出版社（1987年）
１８）木村大治「括弧の意味論」NTT出版（2011年）
１９）高辻正基「記号とはなにか」講談社（1985年）
２０）小川未明　「野ばら」　小川未明童話集　新潮文庫
２１）中村雄二郎「共通感覚論」岩波書店（1979年）
２２）北川如矢「高校数学科における Slow Learner の学習上の障害箇所とその背景」全国教育研究所連盟研究発表大会資料（1979年）

「共同研究に参画された先生方」

長年に亘る研究故、参考文献［２］～［１３］に掲載されている名前をもとに以下に挙げさせていただきました。（敬称略）

池口 義雄／石川 甲／馬越 洋一／奥田 義和／尾崎 進／浅野 由起子／岡谷 仁／
柿本 美矩／上山 望／河手 正一／北 秀和／北川 如矢／木下 秀次／行徳 康一／
高曽 章／真田 秀俊／神通 真佐博／瀬谷 春美／神通 真佐博／末永 勝彦／田宮 伸三／
田池 留吉／竹之内 修／土田 秀雄／冨山 敏郎／高浦 昭／堂之本 篤弘／楢崎 哲也／
西沢 資郎／野村 公信／波多野 善隆／林 一皓／平井 直／藤井 悦雄／藤岡 興道／
不破 一／橋本 是浩／松浦 宏／松永 強／松宮 達也／三輪 辰郎／三浦 文男／
森田 丈三／宮西 信義／山本 芳男／山本 潔／和田 義朗