いつもとは違うアプローチで問題を考える

北海道室蘭東翔高等学校　平間順宏

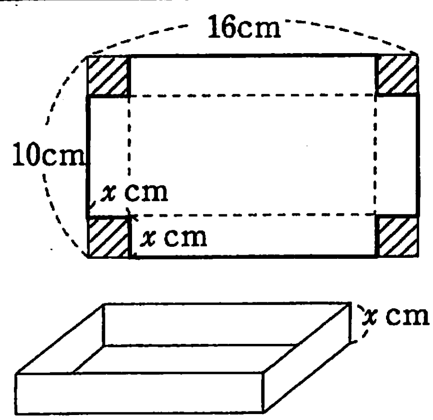
1．はじめに

私は今年で教員生活25年目（現任校で4校目）を迎えている。最近は，数研出版のStudyaidや東京書籍のT−Gaussといったデータベースソフトが普及してきており，自分で問題を「作る」ことをせずに，豊富なデータベースから問題を「選ぶ」機会が多くなっている。本稿ではその善し悪しを論ずるのではなく，私が経験したこと，考えてきたことを発表して，ご意見ご感想をいただければと思う。

2．数学Ⅱ【微分法】〜最大値の問題についての考察〜

教員になって間もない頃，北海道地区数学教育協議会（数教協）高校サークルの例会で次のような問題を扱ったことがある。

縦10 cm，横16 cmの厚紙がある。この四隅から1辺が x cmの正方形を切りとって，図のような直方体の箱を作る。この箱の容積が最大になるときの x の値を求めよ。



問題としては数学Ⅱ「微分法」に出てくる一般的な応用問題であり，この問題の解法について議論を交わしたということではない。

会に出席した先生から「この問題で，厚紙の縦，横の長さを変えて出題したいが，答えがきれいな値で出るようにするにはどうしたらよいだろうか」との問題が提起された。当時の勤務校は分数に過敏に反応を示す（自分に自信がないので，答えが分数になると不安になる）生徒も多く，解答が整数値になるような問題を作成するよう心がけていたので，私は早速飛びついた。

教科書や問題集に掲載されている類題では正方形の場合が多いが，正方形はすべて相似だからといって1辺の長さを自由に決めると，容積が最大になるときの x の値が整数とはならない。後述と同様に考察すれば，x を整数にするには1辺の長さを6の倍数にすればよいことがわかる。いわんや長方形をや，である。

この考察の過程で予想外の分野との関連を見いだすことができたので，紹介したい。変数の変域等について，細かい吟味は省くのでご了承願いたい。

$a\times b$ の長方形において考える。

四隅から $x\times x$ の正方形を切り取って箱をつくると，箱の底面は $(a-2x)\times(b-2x)$ の長方形である。

このとき，箱の容積を y とすると，

$$y=x(a-2x)(b-2x)=4x^3-2(a+b)x^2+abx$$

$y'=12x^2-4(a+b)x+ab$

$y'=0$ の判別式を D とすると

$D/4=\{2(a+b)\}^2-12ab=4a^2-4ab+4b^2=(2a-b)^2+3b^2>0$

であるから，$y'=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

そこで，$y'=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=\frac{a+b}{3}>0,\ \alpha\beta=\frac{ab}{12}>0$$

となるので，α，β はともに正であることもわかる。

$y'=0$ の解は

$$x=\frac{2(a+b)\pm\sqrt{4a^2-4ab+4b^2}}{12}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

で，これが「箱の容積が最大になるときの x」の候補であるから，x が整数値をとるための必要条件は，根号の中が平方数になること，すなわち，

$a^2-ab+b^2=c^2$

を満たす整数 a，b，c が存在することである。

この $a^2-ab+b^2=c^2$ という式は，余弦定理で $\theta=60°$ とおいた形にほかならない。この式を満たす整数 a，b，c については，中村文則先生や佐藤清先生が発表されたレポートがウェブサイト「数学のいずみ」にも収録されているのでそちらを参照していただきたい。

微分の応用問題で答えが整数値になるような問題を作成することが，ある角が 60° である三角形において3 辺の長さが整数値になる条件に繋がるということで，当時は感動したものである。

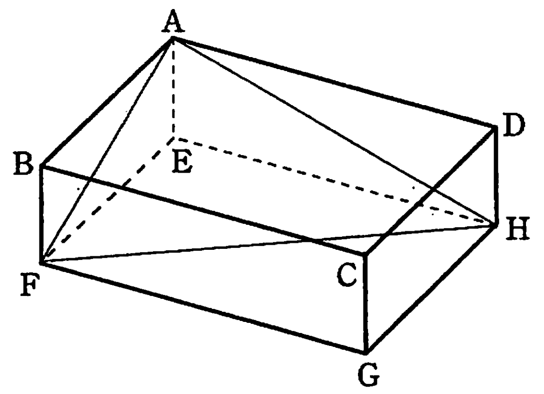
ちなみに，a，b が，$1\leqq a\leqq 20$，$1\leqq b\leqq 20$，$a\leqq b$，$gcd(a,\ b)=1$ を満たす整数であるとき，a^2-ab+b^2 が平方数になるような整数 $(a,\ b)$ の組は下記の 5 通りしかない。

a	1	3	5	7	8
b	1	8	8	15	15
c	1	7	7	13	13

3．【数学Ⅰ】図形と計量～空間図形についての考察～

数学Ⅰ『図形と計量』を一通り学習すると，必ずといってよいほど次のような問題に遭遇する。

下の図のような直方体 ABCD - EFGH において，AE$=\sqrt{10}$，AF$=8$，AH$=10$ とする。このとき，FH$=\boxed{アイ}$ であり，$\cos\angle\mathrm{FAH}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。また，三角形 AFH の面積は $\boxed{オカ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である。したがって，点 E から三角形 AFH に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$ である。



これは2006年センター試験「数学Ⅰ」の問題であるが，概ね以下のように解答解説するのが一般的ではないだろうか。

三平方の定理により

$$\mathrm{EF}=\sqrt{\mathrm{AF}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

$$\mathrm{EH}=\sqrt{\mathrm{AH}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

よって　$\mathrm{FH}=\sqrt{\mathrm{EF}^2+\mathrm{EH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2+(3\sqrt{10})^2}=3\sqrt{16}={}^{アイ}12$

△AFHにおいて，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{FAH}=\frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{AH}^2-\mathrm{FH}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}}=\frac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 10}=\frac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}8}$$

$\sin\angle\mathrm{FAH}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{FAH}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{FAH}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

よって　$\triangle\mathrm{AFH}=\frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}\sin\angle\mathrm{FAH}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}={}^{オカ}15\sqrt{{}^{キ}7}$

四面体AFHEの体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{FHE}\times\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\mathrm{EF}\cdot\mathrm{EH}\right)\cdot\mathrm{AE}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=15\sqrt{6}$$

また，点Eから△AFHに下ろした垂線の長さを l とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{AFH}\times l=\frac{1}{3}\cdot 15\sqrt{7}\,l=5\sqrt{7}\,l$$

よって　$15\sqrt{6}=5\sqrt{7}\,l$　　したがって　$l=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{{}^{ク}3\sqrt{{}^{ケコ}42}}{{}^{サ}7}$

本校で使用している教科書，数研出版「高等学校　数学Ⅰ」でも，数値こそ違うが，本問に似た問題が登場している。

注）(1)で余弦を，(2)で断面となる三角形の面積を，それぞれ求めさせるところで完結している。

直方体の1頂点から隣り合う3頂点でつくられる三角形を含む平面に下ろした垂線の長さを求める設問は定番といえるので，教科書等に掲載されている問題の値を変えて出題したいと思うが，類題を自作しようと，直方体の縦，横，高さを勝手に設定すると，切り口の面積にとんでもない平方根が現れたりするので，ついつい「探す」ことになりがちであ

る。

かつては高校数学で空間座標における直線や平面の方程式を扱っていた。空間座標を用いると，この問題の，点Eから三角形AFHに下ろした垂線の長さを求める部分は，点Eを原点に，辺EFをx軸に，辺EHをy軸に，辺EAをz軸にとると，次のように書き換えることもできる。

$F(3\sqrt{6},\ 0,\ 0)$，$H(0,\ 3\sqrt{10},\ 0)$，$A(0,\ 0,\ \sqrt{10})$とするとき，原点から平面AFHまでの距離を求めよ。

この問題の解法としては，空間座標における点と直線の距離の公式を用いることが考えられる。

平面AFHの方程式が

$$\frac{x}{3\sqrt{6}}+\frac{y}{3\sqrt{10}}+\frac{z}{\sqrt{10}}=1$$

と表されることから，両辺に$3\sqrt{60}(=6\sqrt{15})$をかけて

$$\sqrt{10}\,x+\sqrt{6}\,y+3\sqrt{6}\,z-6\sqrt{15}=0$$

よって，原点から平面までの距離dは

$$d=\frac{|-6\sqrt{15}|}{\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{6})^2+(3\sqrt{6})^2}}=\frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{70}}=\frac{3\sqrt{42}}{7}$$

また，直方体の切り口となる三角形の面積は，近年，デカルト・グアの定理を用いて解く方法が参考書等でも散見されるので，そちらを参照していただきたい。（四平方の定理と呼ぶサイトや書籍もあるが「四平方の定理」は別にある。）

これらをもとに，一般に，$a\times b\times c$の直方体において考えると，次のようになる。

直方体ABCD−EFGHにおいて，$AB=a$，$AD=b$，$AE=c$とすると，3頂点B，D，Eを結んで得られる三角形BDEの面積は

$$\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}$$

であり，頂点Aから三角形BDEに下ろした垂線の長さは

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

である。

よって，この問題の答えが単純な値になるかどうかは，$\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$にかかっているので，この値を考えながら縦，横，高さを設定すればよいことになる。

ちなみに，a，b，cが，$1\leqq a\leqq 10$，$1\leqq b\leqq 10$，$1\leqq c\leqq 10$，$a\leqq b\leqq c$，$gcd(a,\ b,\ c)=1$を満たす整数であるとき，$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$が平方数になるような整数$(a,\ b,\ c)$の組は下記の22通りしかない。

a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	6	6	6
b	1	2	2	3	4	5	6	7	8	9	3	3	5	7	4	5	7	5	7	7	7	8
c	2	3	8	4	5	6	7	8	9	10	5	9	7	9	7	8	10	9	7	7	9	9

平面図形の問題には，幾何的に捉えたり，座標を用いたり，ベクトルを用いたり，といった色々な“道具”があるのと同様に，立体の問題も，ベクトルや空間座標が使えるとす

っきりする問題が多い。しかし，実際には，複数の分野を横断する思考を苦手とする生徒が多い。さらには，教育課程の改訂で，空間座標が大幅に削除されたり，一次変換が削除されたり，と道具も限定されつつある。非常に口惜しい。

4．【数学Ⅱ】微分法～接線の問題についての考察～

現行の教育課程になり，前教育課程にあった数学Ⅱ「微分法」における被微分関数の次数の制限（3次以下）が撤廃された。

従来は接線を扱うとすれば，2次関数もしくは3次関数のグラフに限られたが，今後は4次関数のグラフの接線の出題頻度が上がるだろうと予想される。

さらには，センター試験等によく見られる，積分法の面積との融合問題まで考えると，被積分関数の次数の制限（2次以下）も撤廃されたので，なお一層，3次関数や4次関数の出題が増えると思われる。

そこで，次のような問題について考えてみたい。

曲線 $y=x^3-5x^2+5x+8$ と，その曲線上の点 $(3,\ 5)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

旧課程の数学Ⅱにおいて，厳密にいえば，この問題は，接線を求める部分は出題できても面積を求める部分は出題できなかった。しかし，今回の改訂で堂々と出題できるようになったので，目にする機会は増えると思われる。

$y=x^3-5x^2+5x+8$ について

$$y'=3x^2-10x+5$$

$x=3$ のとき　$y'=2$

よって，点 $(3,\ 5)$ における接線の方程式は

$$y-5=2(x-3) \quad \text{すなわち} \quad y=2x-1$$

この接線と曲線の共有点の x 座標は，方程式

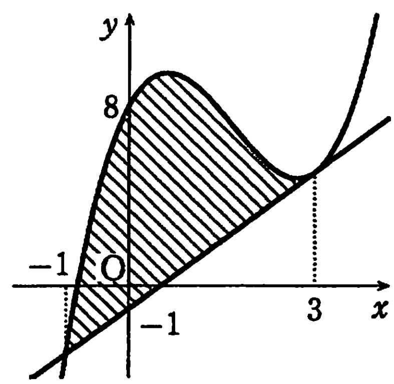
$$x^3-5x^2+5x+8=2x-1$$

すなわち　$x^3-5x^2+3x+9=0$　の解である。

左辺を因数分解して　$(x-3)^2(x+1)=0$

よって　$x=-1,\ 3$

グラフから，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{3}\{(x^3-5x^2+5x+8)-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(x^3-5x^2+3x+9)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$

生徒に指導するとすれば，このような解き方になるであろう。しいていえば，後半の定積分で，準公式（この類いの準公式をどこまで教えるかも意見が分かれるが）

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

を用いることで，

$$S=\int_{-1}^{3}\{(x^3-5x^2+5x+8)-(2x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(x^3-5x^2+3x+9)dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)^2dx$$
$$=\frac{1}{12}\{3-(-1)\}^4=\frac{256}{12}=\frac{64}{3}$$

とするくらいであろうか。

しかし，類題を作成しようと数値を変えて試行錯誤していくと，次のことにたどり着いた。

> 【事実】
> 3次以上の整関数 $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割った商を $q(x)$，余りを $ax+b$ とするとき，
> i）グラフ $y=f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は $y=ax+b$ である。
> ii）グラフ $y=f(x)$ と $y=ax+b$ の $(\alpha,\ f(\alpha))$ 以外の共有点の x 座標は
> 方程式 $q(x)=0$ の $x=\alpha$ 以外の解に一致する。

【証明】

$y=f(x)$ と $y=ax+b$ が点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ で接することは，方程式 $f(x)=ax+b$ が $x=\alpha$ を重解にもつことと同値である。

したがって，等式 $f(x)-(ax+b)=0$ において，左辺が $(x-\alpha)^2$ を因数にもつので，$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)^2q(x)$ と因数分解できる。

これは，$f(x)=(x-\alpha)^2q(x)+(ax+b)$ となり，$f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商が $q(x)$，余りが $ax+b$ であることを表す。

また，$y=f(x)$ と $y=ax+b$ の $(\alpha,\ f(\alpha))$ 以外の共有点の x 座標は $f(x)=ax+b$ の $x=\alpha$ 以外の解で求められるが，これは上の因数分解から，$q(x)=0$ の $x=\alpha$ 以外の解に等しい。■

この「事実」を用いると，作問するときは $(x-\alpha)^2q(x)$ から出発すれば，都合がいい問題を用意することができる。

たとえば，$f(x)$ を3次で x^3 の係数が1とすると，$q(x)$ は1次であるから，

$$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

とでもおいて，α，β や $ax+b$ を自由に設定すればよいのである。

また，4次関数のグラフは極値の個数により様々な形状があるし，さらには，ある点における接線が他の点で交わったり接したりするかにより，豊富なバリエーションが考えられるが，この事実を用いることで，それぞれに対応した作問をすることができる。

例）$\alpha<\beta<\gamma$ のとき

$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$

$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)$

$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)^2$ のほかにも，

$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ といった場合が考えられる

5．【数学Ⅱ】方程式・式と証明～2次式の因数分解についての考察～

ここまでは作問という視点から問題を考察してきたが，ここでは趣向を変え，他の単元との繋がりを重んじた視点で問題にアプローチする。

数学Ⅱ「方程式・式と証明」で出てくる2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると $$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

について，私はこれまで，教科書の解法の他に，2次方程式を解かなくても因数分解できる方法があることを，私は生徒に紹介してきた。

というのも，数学Ⅰの2次関数はもちろん，数学Ⅱでも，三角・指数・対数関数における「置き換えをすると2次関数の最大・最小になる問題」や「不等式の証明」など，平方完成が必要になる場面が多い。そのため，様々な機会で，平方完成はマストアイテムだと生徒に訴えておきたいので，平方完成の定着の確認をしながら紹介している。

［例］ $x^2+1=x^2-(-1)=x^2-i^2=(x+i)(x-i)$

$$x^2+2x-2=x^2+2x+1-3=(x+1)^2-(\sqrt{3})^2=(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})$$

$$x^2-3x+4=x^2-3x+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)^2$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)$$

$$2x^2-x+1=2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}+\frac{7}{16}\right)=2\left\{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)^2\right\}$$
$$=2\left(x-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)\left(x-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i\right)$$

x^2 に1以外の係数がついているときは平方完成とは若干異なる式変形（はじめに全体を x^2 の係数でくくる）になるなど，計算過程がやや複雑になってしまう場合もある。

数年前，数学Ⅰ「2次関数」で2次方程式の解の公式を指導していたとき，平方完成をして両辺の平方根をとることで2次方程式を解く生徒がいた。解の公式を用いればいいのに，と思い理由を尋ねると，中学の先生にそう指導されていたとのことであった。

それ以来，この解法を紹介することにしている。（考査になると，生徒は結局教科書通りの解法で解くのだが）

6．おわりに

とある書籍で目にした問題を一部改変して紹介します。

$(x^2+x-5)(x^2+x-7)-1$ を因数分解せよ。	(2000　創価大)

教科書等では $x^2+x=A$ とおく，何の変哲もない問題でつまらない，と思う先生もいると思います。では，次はどうでしょう。$x^2-211x=A$ とおきますか？

$(x^2-211x+2003)(x^2-211x+2017)+49$ を因数分解せよ。	(自作)