本校では朝のホームルーム前に「朝読書(週１回で５分間)」の時間があり、先日第２学年を対象に次の内容を読ませました。

【読書の内容ここから】

「円周率 π は 3.05 より大きいことを証明せよ。」
過去に東京大学で出題された入試問題である。以下に証明の一例を示す。方法は他にもあるので、今後の数学の学習を経て挑戦してもらいたい。
なお、$\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$　として用いている。

［証明］
半径１の円に内接する正十二角形 R_{12} の１辺の長さを x とする
※余白に図形をかいてみよう。定規やコンパスは不要。

円の中心と R_{12} の隣り合う２点で作られる三角形において余弦定理を用いると

$$x^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos30^\circ=2-\sqrt{3}$$

$x>0$ であるから

$$x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

よって，R_{12} の周の長さは

$$12\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

ここで，R_{12} は円に内接するから

$$(\text{円周の長さ})>(R_{12}\text{ の周の長さ})$$
$$\pi=\frac{(\text{円周の長さ})}{(\text{直径})}>\frac{(R_{12}\text{ の周の長さ})}{(\text{直径})}$$
$$=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$\sqrt{6}$ を小さく見積ると

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=1.41\times1.73=2.44$$

$\sqrt{2}$ を大きく見積ると　1.42

$$\therefore\quad \pi>3\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})>3\times(2.44-1.42)$$
$$=3\times1.02=3.06>3.05$$

したがって，円周率 π は 3.05 より大きい

【読書の内容ここまで】

読書日の数学の授業において、生徒に感想等を聞いたところ、次のような反応がありました。
「正十二角形より辺の数を多くするとどうなるか」

想定される反応でした。三角関数（加法定理等）の扱いはこれからであるので、そのときにまた触れてみたいと考えます。

そのために、読書の内容を踏まえて高校生ならばどのように解答するか、条件（近似計算等）を複雑にしないこと、かつ正十二角形のときよりも精度を上げることに注意して、以下のとおり検証しました。

［検証］
半径１の円に内接する正二十四角形 R_{24} の１辺の長さを x とする

円の中心と R_{24} の隣り合う２点で作られる三角形において余弦定理を用いると

$$x^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos15^\circ=2-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

（cos15°の値は三角関数の加法定理で求めた）

$x>0$ であるから

$$x=\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{2}$$

よって，R_{24} の周の長さは

$$24\times\frac{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{2}=12\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

ここで，R_{24} は円に内接するから

$$(\text{円周の長さ})>(R_{24}\text{ の周の長さ})$$
$$\pi=\frac{(\text{円周の長さ})}{(\text{直径})}>\frac{(R_{24}\text{ の周の長さ})}{(\text{直径})}$$
$$=6\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$=6\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$
$$=6\sqrt{2}\sqrt{4-1.414\times(1.732+1)}$$
$$>6\sqrt{2}\sqrt{4-3.864}$$
$$=6\sqrt{2}\sqrt{0.1360}$$
$$=6\sqrt{0.2720}$$
$$>6\sqrt{0.270}$$
$$=6\sqrt{\frac{27}{100}}$$
$$=6\times\frac{3\sqrt{3}}{10}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{5}$$
$$>\frac{9}{5}\times1.73>3.11$$
$$※\quad>\frac{9}{5}\times1.70=3.06>3.05$$

したがって，円周率 π は 3.05 より大きい