

ログを検定外で解いてみる

札幌創成高等学校

外山 尚生

§ 0 はじめに

ログは数学Ⅱになってはじめて導入される記号だが、ログとは一体なんだろう？と考えるとなかなか感覚的に理解しにくい。このレポートではログを教科書と違った視点から見てみよう。

なお、このレポートでは感覚を大事にしていくため、数学的には不十分な解説もあるかもしれないが、わかりやすさを重要視するためのものであるから、勘弁していただきたい。

§ 1 対数を定義から見つめてみる。

先生「 $2^x=4$ 。 x は？」

生徒「 $2^2=4$ だから、 $x=2$ 」

先生「 $2^x=1$ 。 x は？」

生徒「 $2^0=1$ だから、 $x=0$ 」

先生「では、 $2^x=3$ 。 x は？」

生徒「え？ うーんと、 $x=\frac{1}{2}$ ？」

先生「 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ だよな？」

生徒「あ。 そっか。 じゃあ…」

こんな議論を生徒と行くと面白い。 $2^x=3$ となる x はありそうだが、それがどんな数であるかはわからない。この x の値を $x=\log_2 3$ と書くことにしよう。

[定義]対数の定義

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ とするとき、 $a^x = M$ を満たす x を $\log_a M$ で表し、 a を底とする対数という。また、この M を真数という。

この定義を言い換えると次のように表現することができる。

[補題1] 指数と対数

$a > 0$ 、 $a \neq 1$ のとき

$$M = a^x \quad \dots \textcircled{1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a M \quad \dots \textcircled{2}$$

[例1] $8=2^3$ より $\log_2 8=3$ である。

教科書ではこんな例をあげ、丁寧に練習までしているが、正直、この例を習ったときに、「で!？」と思ってしまった。私は、次の式が対数を考えるうえで、とても重要な式なような気がしている。

[公式1] (さくらんぼの公式)

$$\textcircled{1} \log_a a^x = x \qquad \textcircled{2} a^{\log_a M} = M$$

[証明]①式は補題1の②式に①式を代入することで導かれる。

②式は補題1の①式に②式を代入することで導かれる。 終

対数の底と指数の底でさくらんぼをつくってあげるとログは消えるんだよ。と教えている。

[例2]

(1) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

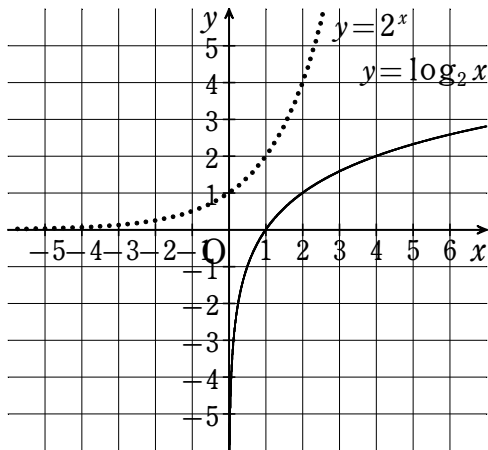
(2) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

(3) $2^{\log_2 3} = 3$

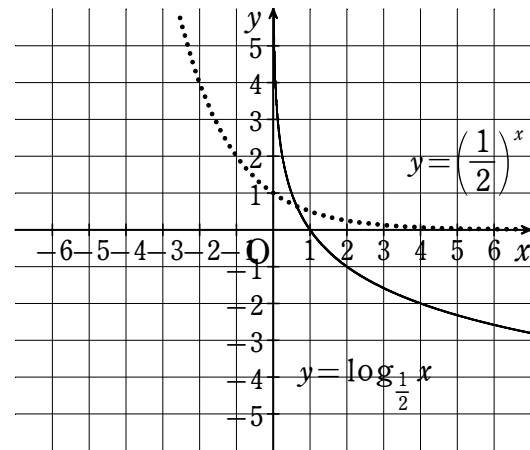
このようにして対数を考えると、対数は指数の逆関数であることがわかる。

したがって、 $y = \log_a x$ のグラフはつぎのようになる。

[1] $a > 1$ のとき



[2] $0 < a < 1$ のとき



このグラフを見てみると、 $M > 0$ であることがわかる。これを真数条件という。

[公式2] (真数条件)

$$\log_a M \text{ について、} M > 0$$

さらに、グラフを見てみると次のようなことがわかる。

[公式3]

[1] $a > 1$ のとき、 $y = \log_a x$ は増加関数になる。
 したがって、 $0 < p < q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$

[2] $0 < a < 1$ のとき、 $y = \log_a x$ は減少関数になる。
 したがって、 $0 < p < q \Leftrightarrow \log_a p > \log_a q$

[例3]

(1) $\log_3 8$ 、 2 、 $\log_3 10$ の大小を比較せよ。

$$2 = \log_3 3^2 = \log_3 9 \text{ より}$$

$$\log_3 8 < 2 < \log_3 10$$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ 、 -2 、 $\log_{\frac{1}{2}} 5$ の大小を比較せよ。

$$-2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} 4 \text{ より}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 > -2 > \log_{\frac{1}{2}} 5$$

このさくらんぼの公式を逆に使うと、対数方程式、不等式を解くことができる。

[例4]

(1) $\log_2 x = 3$

$$3 = \log_2 2^3 = \log_2 8 \text{ より}$$

$$\log_2 x = \log_2 8$$

よって、 $x = 8$

(2) $\log_2 x \leq 3$

真数条件より $x > 0$ …①

$$\log_2 x \leq \log_2 8 \text{ より } x \leq 8 \text{ …②}$$

①②より $0 < x \leq 8$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$

真数条件より $x > 0$ …①

$$3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \text{ より}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \text{ より } x \geq \frac{1}{8} \text{ …②}$$

①②より $x \geq \frac{1}{8}$

§ 2 対数を小数点の移動とみしてみる。

さくらんぼの法則を使って次のものを考えてみよう。

$$(1) \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$$

$$(2) \log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4$$

$$(3) \log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$$

$$(4) \log_{10} 0.00001 = \log_{10} 10^{-5} = -5$$

ここでは底が10の対数(常用対数)を考えてみる。[例5]を見てみると、底が10の対数は小数点の移動回数を表していることがわかる。常用対数を小数点の移動回数ととらえて、対数の性質について考えてみよう。

ここで、次の計算を考えてみる。

$$(1) 100 \times 1000 = 100000$$

$$(2) 1000 \div 100 = 10$$

$$(3) (100)^2 = 10000$$

これを小数の移動回数で考えてみる。すると $\log_{10} 100 = 2$ 、 $\log_{10} 1000 = 3$ であり、それぞれの右辺は次のように考えることができる。

$$(1) \log_{10} 100000 = 5 = 2 + 3 = \log_{10} 100 + \log_{10} 1000$$

$$(2) \log_{10} 10 = 1 = 3 - 2 = \log_{10} 1000 - \log_{10} 100$$

$$(3) \log_{10} 10000 = 4 = 2 \times 2 = 2 \times \log_{10} 100$$

これを一般化して考えると次の公式を導くことができる。

[公式4] 対数の性質

$$\textcircled{1} \log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\textcircled{2} \log_a(M \div N) = \log_a M - \log_a N$$

$$\textcircled{3} \log_a M^r = r \log_a M$$

証明はこのようにして求めることができるが、ここでは小数点の移動回数として、感覚的に考えていきたい。

[証明] M を逆さくらんぼで $M = a^{\log_a M}$ と置き換えて、指数法則で証明する。

$$\textcircled{1} \log_a(M \times N) = \log_a(a^{\log_a M} \times a^{\log_a N}) = \log_a a^{\log_a M + \log_a N} = \log_a M + \log_a N$$

$$\textcircled{2} \log_a(M \div N) = \log_a(a^{\log_a M} \div a^{\log_a N}) = \log_a a^{\log_a M - \log_a N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\textcircled{3} \log_a M^r = \log_a (a^{\log_a M})^r = \log_a a^{r \log_a M} = r \log_a M$$

終

[例5]

$$(1) \log_8 2 + \log_8 4 = \log_8(2 \times 4) = \log_8 8 = 1$$

$$(2) \log_3 18 - \log_3 2 = \log_3(18 \div 2) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$$(3) 2 \log_6 \sqrt{12} + \log_6 3 = \log_6 (\sqrt{12})^2 \times 3 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

対数の性質の③を使うと、底の変換公式を導くことができる。

[公式5] 底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ より $\log_c b = \log_a b \times \log_c a$ が成り立つ。これを示そう。対数の性質の③より

$$\log_a b \times \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

これを逆に考えると証明できる。

[証明]

$$\log_c b = \log_c a^{\log_a b} = \log_a b \log_c a$$

$$\text{両辺を} \log_c a \text{で割って、} \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{終}$$

[例6]

$$(1) \log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} = \frac{2}{3}$$

$$(2) \log_2 3 \times \log_3 8 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

底の変換公式を用いると次の式を証明することができる。

[公式6] 底の変換公式の応用

r を0以外の有理数とする。

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r$$

[証明] $\log_{a^r} b^r = \frac{\log_a b^r}{\log_a a^r} = \frac{r \log_a b}{r} = \log_a b$ 終

[例7]

$$\log_2 6 - \log_4 9 = \log_2 6^2 - \log_4 9 = \log_4 36 - \log_4 9 = \log_4 (36 \div 9) = \log_4 4 = 1$$

常用対数を小数点の移動回数と考えると、桁数問題を解くことができる。

[例8]

2^{100} は何桁の整数か。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ である。

2^{100} の常用対数をとると、

$$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$$

ここで、 $\log_{10} 2^{100} = 30 + 0.10$ と考える。

常用対数を小数点の移動回数と考えると、 $0 < 0.10 < 1$ より、 $1 < 10^{0.10} < 10$ から $10^{0.10}$ は1桁の数であることがわかる。

つまり $10^{0.10} = *.***$ であり、 2^{100} はこの小数点を正の方向に30回移動したものである。

したがって、 2^{100} は31桁の数である。

[例9]

$\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ は小数第何位にはじめて0でない数字が現れるか？ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ の常用対数をとると

$$\log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = -20 \log_{10} 3 = -20 \times 0.4771 = -9.542$$

ここで、 $-9.542 = -10 + 0.458$ と考える。

常用対数を小数点の移動回数と考えると、 $0 < 0.458 < 1$ より、 $1 < 10^{0.458} < 10$ から $10^{0.458}$ は1桁の数であることがわかる。

つまり $10^{0.458} = *.***$ であり、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ はこの小数点を負の方向に10回移動したものである。

したがって、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ は小数第10位にはじめて0でない数字が現れる。

§ 3 まとめ

対数をさくらんぼと小数点の移動という別の視点から見つめてみると、教科書にある対数の物事が違った姿かたちを示してくれる。いまいちわかりにくい対数の「なぜ」の部分を理解するのにこの2つの視点は役に立つのではないだろうか？