

「図形と方程式を図形的に見てみる 【軌跡編】」

札幌創成高校 数学科 教諭

外山 尚生

§ 0 はじめに

数学Ⅱテーマの一つである図形と方程式は今まで幾何的アプローチしかできなかった図形の問題を座標平面を導入し、方程式を用いることによって導き出すものである。ベクトルとは違った意味で図形と式をつなげる図形と方程式は興味深い分野であるが、いまいち幾何的なアプローチが薄いように感じる。そのため、せっかく図形と方程式を勉強しても図形と方程式を結びつけず、単なる式計算として考えてしまう生徒が少なくない。そこで今回、教科書の図形と方程式の軌跡の問題を図形の性質を使って感覚的に導き出してみた。

§ 1 2点からの距離の比が $m:n$ である点Pの軌跡

2点A、Bからの距離の比が $m:n$ である点Pの軌跡は次のようになる

- 1 $m = n$ のとき線分ABの垂直二等分線になる。
- 2 $m \neq n$ のとき線分ABを $m:n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になる。(アポロニウスの円)

これを図形的に導き出したい。

1 $m = n$ のとき

ABの中点をMとする。 $AM = BM$ よりMはPの軌跡上の点である。

$$AM = MB$$

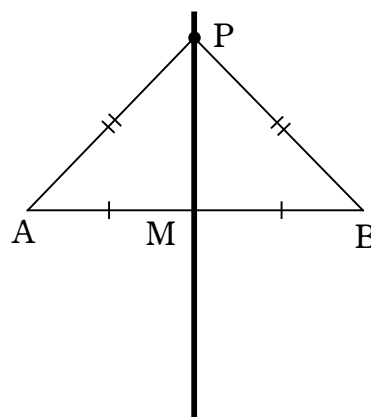
$$AP = PB$$

PM 共通

より $\triangle APM \cong \triangle BPM$ である。

よって $\angle AMP = \angle BMP = 90^\circ$ だから

Pの作る軌跡は線分ABの垂直二等分線である。



2 $m \neq n$ のとき

ABを $m:n$ に内分する点をM、外分する点をNとする。

M、NはPの軌跡上の点である。

$$AP:PB = AM:MB = m:n \text{ より}$$

PMは $\angle APB$ の角の二等分線である。

$$\text{よって } \angle APM = \angle BPM \cdots \text{①}$$

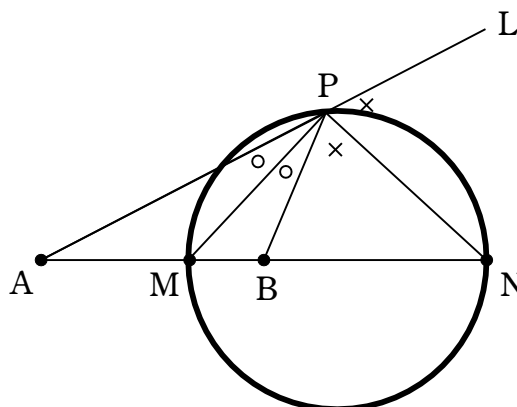
$$AP:PB = AN:NB = m:n \text{ より}$$

PNは $\angle APB$ の外角の二等分線である。

$$\text{よって } \angle BPN = \angle NPL \cdots \text{②}$$

$$\text{①②より } \angle MPN = \angle BPM + \angle BPN = 90^\circ$$

よってPの作る軌跡はMNを直径とする円である。



§ 2 点Aと円上の点Qについて $AP:PQ = m:n$ に内分する点Pの軌跡

点AとCを中心とする半径 r の円上に点Qをとり、 $AP:PQ = m:n$ に内分する点Pの軌跡は次のようになる。

ACを $m:n$ に内分する点を中心とした半径 $\frac{m}{m+n}r$ の円である。

これを図形的に導き出してみよう。

直線ACと円との交点をK、Lとする。

AKを $m:n$ に内分する点をM、ALを $m:n$ に内分する点をNとする。

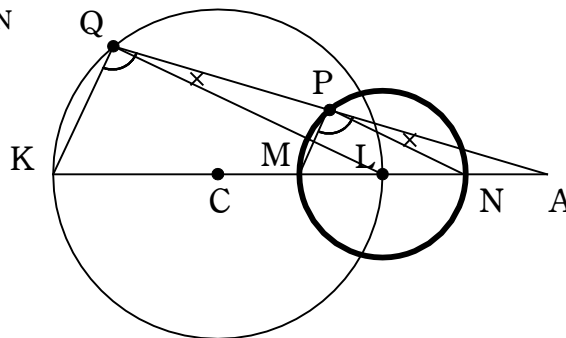
$AP:AQ = AM:AK$

∠A共通より

$\triangle APM \sim \triangle AQK$

よって $\angle AQP = \angle APM \dots \textcircled{1}$

$PM:QK = m:m+n \dots \textcircled{2}$



$AP:AQ = AN:AL$

∠A共通より

$\triangle APN \sim \triangle AQL$

よって $\angle APN = \angle AQL \dots \textcircled{3}$

$PN:QL = m:m+n \dots \textcircled{4}$

KLは円の直径だから $\textcircled{1}\textcircled{3}$ より $\angle KQL = \angle APM = 90^\circ \dots \textcircled{5}$

$\textcircled{2}\textcircled{4}\textcircled{5}$ より $\triangle LQK \sim \triangle NPM$ で相似比は $m:m+n$ である。つまり $MN = \frac{m}{m+n} \times 2r$

よってPの軌跡はMNを直径とする円であり、ACを $m:n$ に内分する点を中心とした半径 $\frac{m}{m+n}r$ の円である。

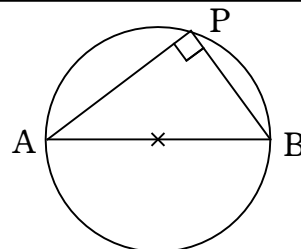
§ 3 2点A、Bについて $AP^2 + BP^2 = k^2$ となる点Pの軌跡

2点ABの距離を d とする。

$d = k$ の時は簡単にわかる。

$d = k$ の時は AB を直径とする円である。

$AP^2 + BP^2 = d^2$ が成り立つから三平方の定理の逆より $\angle APB = 90^\circ$ である。



問題なのは $d \neq k$ の時である。この時どうなるかベクトルを使って分析してみよう。

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{PA} - \vec{PB}|^2 = |\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 - 2\vec{PA} \cdot \vec{PB} \text{ より } \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \frac{k^2 - d^2}{2}$$

$$(\vec{OA} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OP}) = \frac{k^2 - d^2}{2}$$

$$|\vec{OP}|^2 - (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{OP} + \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{k^2 - d^2}{2}$$

$$\left| \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right|^2 - \frac{|\vec{OA} + \vec{OB}|^2}{4} + \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{k^2 - d^2}{2}$$

$$\left| \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right|^2 - \frac{1}{4}|\vec{OA}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{OB}|^2 + \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{k^2 - d^2}{2}$$

$$\left| \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right|^2 - \frac{1}{4}|\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = \frac{k^2 - d^2}{2}$$

$$\left| \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right|^2 - \frac{1}{4}|\vec{AB}|^2 = \frac{k^2 - d^2}{2}$$

$$\left| \vec{OP} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right|^2 = \frac{2k^2 - d^2}{4}$$

よって次のことが成り立つ

$\sqrt{2}k > d$ のとき AB の中点を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2k^2 - d^2}}{2}$ の円である。

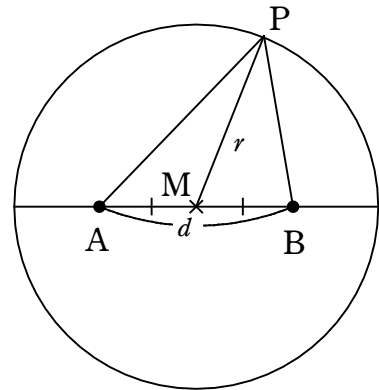
ここから半径を $r = \frac{\sqrt{2k^2 - d^2}}{2}$ とおくと

$$k^2 = 2 \left\{ r^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right\} \text{ となるから}$$

$$AP^2 + BP^2 = 2(MP^2 + MA^2) \text{ となり、}$$

パップスの中線定理を導くことができる。

こう考えるとこの軌跡の問題はパップスの中線定理と関わりがあるようにおもえる。



§ 4 おわりに

図形と方程式を図形的に見ることで、教科書で取り上げられている軌跡の問題は実は単純な図形の性質で作られていることが分かった。その一方で、教科書で取り上げられている軌跡の問題の中では比較的簡単に解ける § 3 の問題が図形的には一番難しいのだから面白い。今回 § 3 の問題はベクトルを使って研究してみたが、平面図形の知識だけでなんとか導き出せないかさらに考えていきたい問題である。