三角関数を図形的に見てみる

札幌創成高等学校
外山　尚生

§０　はじめに

　三角比や三角関数は公式や定理が多く、覚えることが多い、難しいと生徒には嫌われ者である。教科書に載っている「覚えなければならないこと」をいかに効率よく、理解して覚えていくかが大切になってくる。ここでは三角比、三角関数のいろいろな「覚えなければならないこと」を図形を使ってわかりやすく解釈していきたい。

§１　三角比の定義と三平方の定理

１．１　三角比の定義

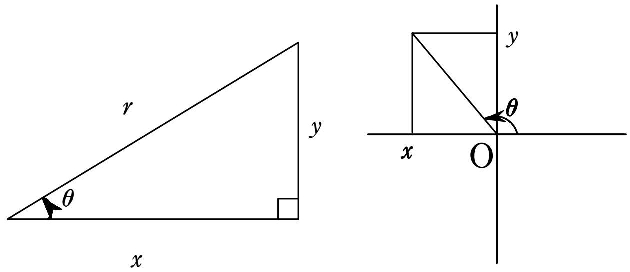
三角比を次のように定義する。

【定義１．１】　三角比の定義

$$\sin\theta=\frac{y}{r}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

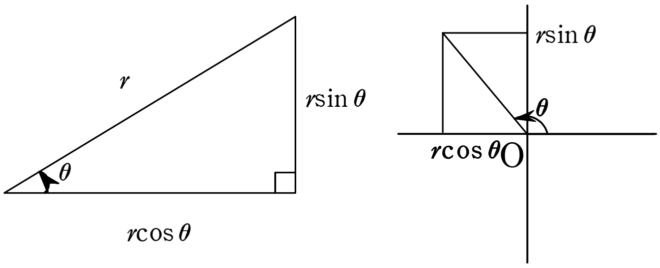


これを式変形することで次の補題が導かれる。

【補題１．２】

$$y=r\sin\theta$$

$$x=r\cos\theta$$



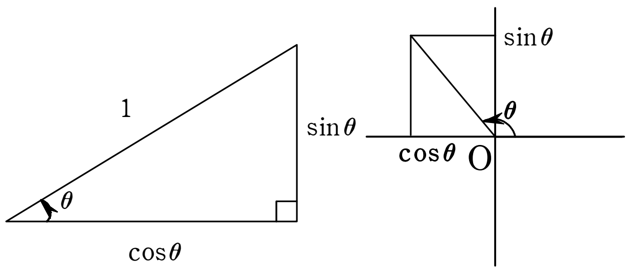
ここで $r=1$ のときを考えると直角三角形や座標は次のようになる。

【命題１．３】

$$\sin\theta=y$$

$$\cos\theta=x$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$



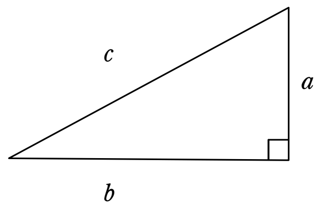
このレポートでは【命題１．３】を活用していろいろな三角比や三角関数の公式を導き出す。

１．２　三平方の定理

このレポートでは三平方の定理をよく使っていきたいので、三平方の定理について述べておく。

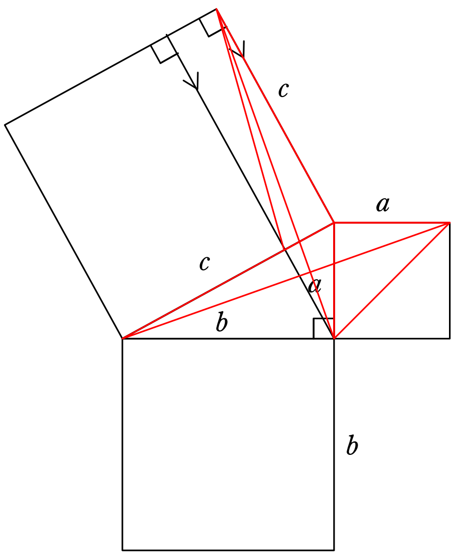
【定理１．３】（三平方の定理）

$c^2=a^2+b^2$

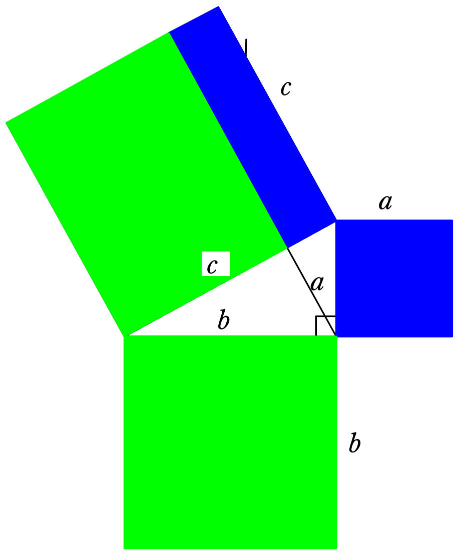


三平方の定理の証明はいくつもあるが、ここではユークリッドの考えた証明を紹介しよう。

直角三角形のそれぞれの辺を一辺とする正方形を三角形の外側に作る。



【図１】



【図２】

図１において赤の三角形の面積はすべて等しい。

よって図２において同じ色の長方形の面積はすべて等しい。

よって青の長方形の面積と緑の長方形の面積を考えることにより、 $a^2+b^2=c^2$ は示される。

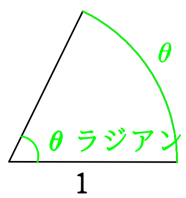
§２　弧度法について

２．１　弧度法の定義

弧度法の定義は次のようになっている。

【定義２．１】

半径１で弧の長さがθの扇形の中心角の大きさをθラジアンとする。



すると半径１、中心角πの扇形は半円になる。この扇形の面積を考えると次の命題が出てくる。

【命題２．２】

半径１、中心角πラジアンの扇形は円を $\frac{1}{2}$ にしたものである。

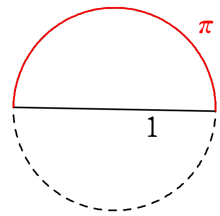
この扇形の

中心角 $\theta=180°$

弧の長さ $L=\pi$

面積 $S=\frac{1}{2}\pi$

である。



この【命題２．２】が弧度法の理解に便利である。

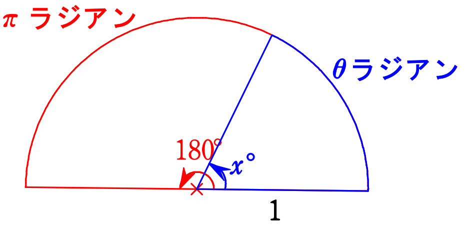
２．２　弧度法と度数法の変換

【命題２．２】より半径１、中心角 $x°$ の扇形を考えると次の変換式を作ることができる。

【命題２．３】

弧度法で表すとθラジアン、度数法で表すと $x°$ とするとき

$x°:180°=\theta$ラジアン：πラジアン



例えば $x=45°$ は $45°:180°=\theta:\pi$ より $\theta=\frac{\pi}{4}$ ラジアンであり、

$\theta=\frac{\pi}{3}$ ラジアン は $x°:180°=\frac{\pi}{3}:\pi$より $x=60°$ である。

２．３　弧度法と弧の長さ、扇形の面積の関係

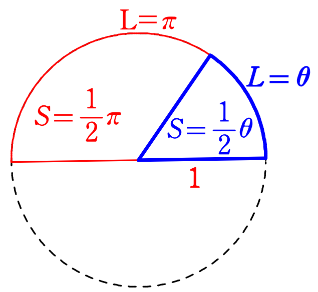
半径１、中心角θラジアンの扇形の弧の長さと面積は【命題２．２】から比を考えるとそれぞれπをθに変えたものであることがわかる。

【補題２．４】

半径１、中心角θラジアンの扇形の

弧の長さ $L=\theta$

面積 $S=\frac{1}{2}\theta$



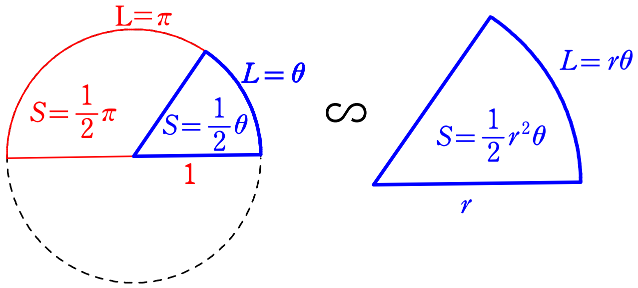
半径r、中心角θの扇形の弧の長さと面積は【補題２．４】の扇形と相似な関係にあるから、次の式が成り立つ。

【命題２．５】

半径 r、中心角θラジアンの扇形の

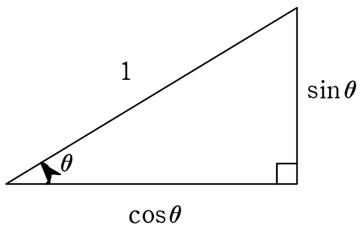
弧の長さ $L=r\theta$

面積 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$



§３　三角関数の相互関係と性質

ここでは【命題１．３】の三角形を使って、三角関数のいろいろな性質を導こう。



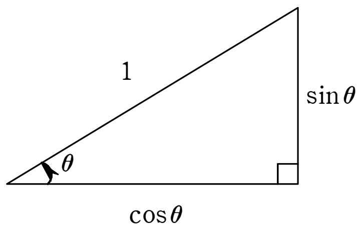
３．１　三角関数の相互関係

【定義１．１】の $\tan\theta=\frac{y}{x}$ と三平方の定理から次の命題を導くことができる。

【命題３．１】（三角関数の相互関係）

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

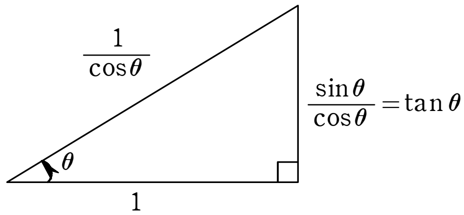
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



ここで横の長さを１にした相似な直角三角形を考えると、三平方の定理より次の命題を導くことができる。

【命題３．２】（三角関数の相互関係②）

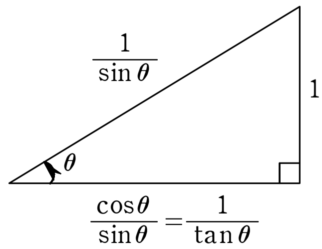
$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$



同様にして縦の長さを１にすると、次の命題を導くことができる。

【命題３．３】（三角関数の相互関係③）

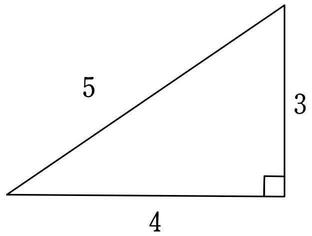
$$1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$



三角関数の相互関係は三平方の定理と $\tan\theta$ の定義でできている。そのため三平方の定理を使った方が簡単に求められる。

例えば $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。$\sin\theta=\frac{3}{5}$ のとき

右の図から $\cos\theta=\frac{4}{5}$ 、 $\tan\theta=\frac{3}{4}$ である。

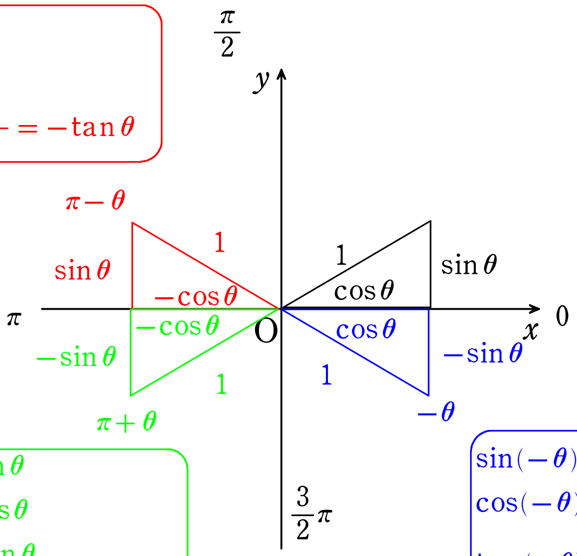


３．２　三角比の性質

【命題１．３】の三角形をパズルのように組み合わせることにより、次の式を導くことができる。

【命題３．４】（三角関数の性質①）

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$



$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi+\theta)=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

【命題３．５】（三角関数の性質②）

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

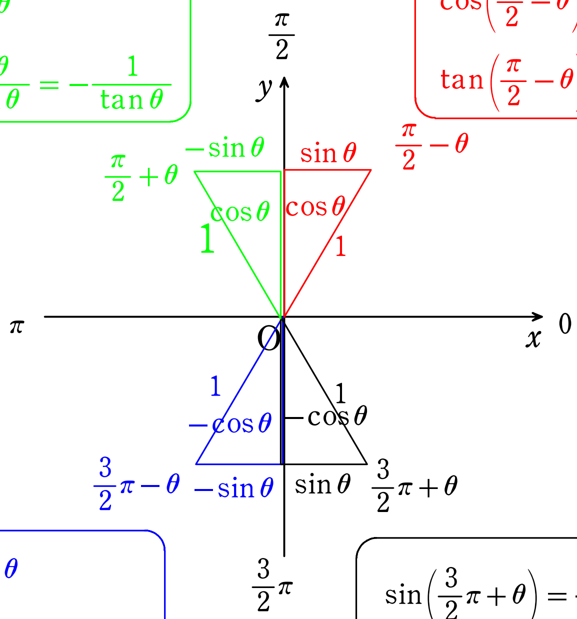
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$



$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

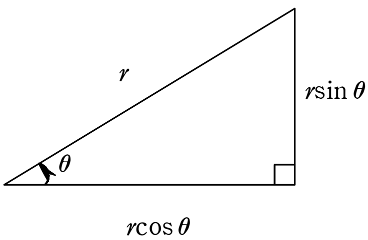
$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}$$

§４　面積公式、正弦定理、余弦定理

【補題１．２】の三角形を使って面積公式、正弦定理、余弦定理を導こう。

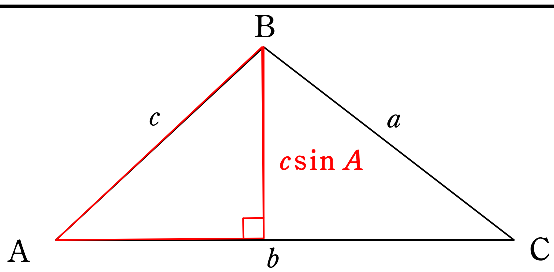


４．１　面積公式

【補題１．２】の三角形から高さが出るので、面積公式を作ることができる。

【命題４．１】（三角形の面積）

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$



４．２　正弦定理

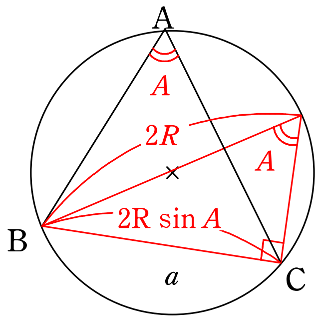
円周角の定理から正弦定理を導くことができる。

【定理４．２】（正弦定理）

$a=2R\sin A$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=2R$

（ R は外接円の半径）



同様にして $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ 、 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$ が成り立つから、正弦定理を導き出すことができる。

【定理４．３】（正弦定理）

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

補足　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ は【命題４．１】面積公式からも証明できる。

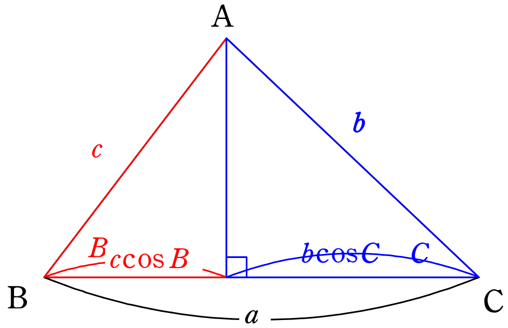
$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$ より $b\sin A=a\sin B$ だから $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

４．３　余弦定理

【補題１．２】の三角形を使って次の補題を導くことができる。

【補題４．４】（第一余弦定理）

$a=b\cos C+c\cos B$



第一余弦定理から

$a=b\cos C+c\cos B$

$b=a\cos C+c\cos A$　　$\therefore \cos C=\dfrac{b-c\cos A}{a}$

$c=a\cos B+b\cos A$　　$\therefore \cos B=\dfrac{c-b\cos A}{a}$ より

$a=b\dfrac{b-c\cos A}{a}+c\dfrac{c-b\cos A}{a}$ より次の定理を導き出すことができる。

【定理４．５】（余弦定理）

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

しかしながらこの証明では式計算が多い。ここでは図形的に余弦定理を証明したい。

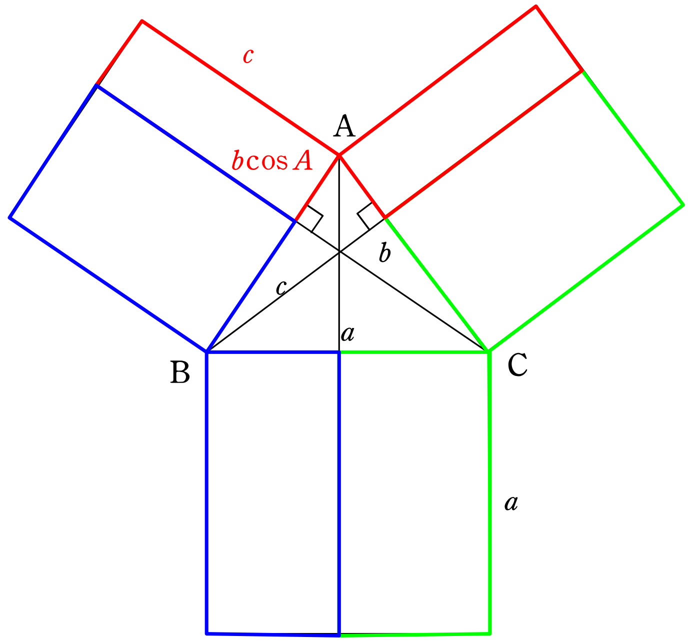
【定理１．３】三平方の定理のユークリッドの証明を参考にして下の図を使って証明できる。

△ABCのそれぞれの辺を一辺とする正方形を三角形の外側につくる。△ABCのそれぞれの辺から垂線をひくと、同じ色の長方形の面積は等しい。

$a^2=$青い長方形＋緑の長方形 、 $b^2=$緑の長方形＋赤の長方形 、 $c^2=$赤の長方形＋青の長方形 だから、 $a^2=b^2+c^2-2$赤の長方形 が成り立つので

【定理４．５の別証明】

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



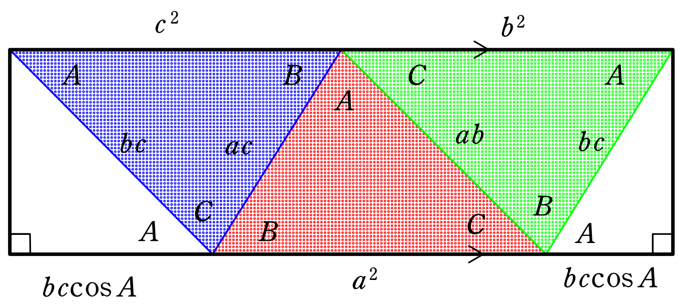
そういえばこの図形をもとにした問題が２０２１年の共通テストに出ていた。

さらに調べてみると８月２４日に数実研で講演していただいたポテト一郎さんが別のアプローチで証明していた。△ABCを相似拡大した図形をパズルのように組み合わせて証明できるのが面白い。

【定理４．５の別証明】

$a^2+2bc\cos A=b^2+c^2$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



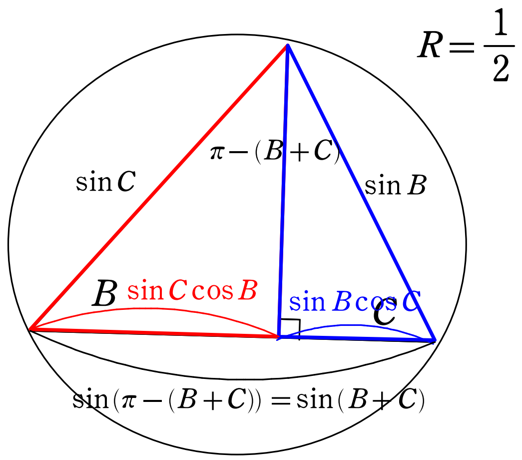
§５　加法定理

５．１　加法定理

外接円の半径が $\frac{1}{2}$ の三角形を考えよう。【定理４．２】正弦定理と【補題４．４】第一余弦定理と【命題３．４】 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ から正弦の加法定理を証明することができる。

【定理５．１】（加法定理）

$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$



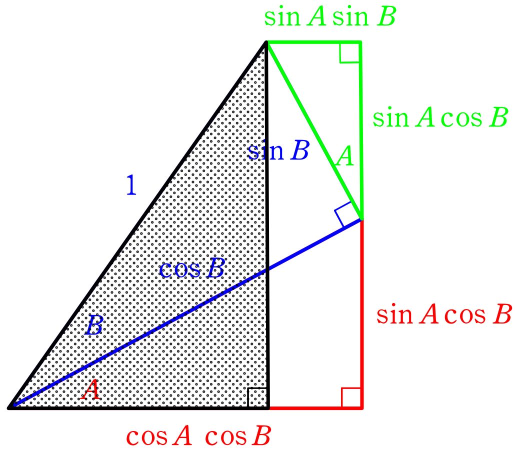
この図で正弦の加法定理は証明することができるが、余弦の加法定理は証明が難しい。

【補題１．２】の三角形を使って、パズルのように組み合わせると正弦と余弦の加法定理を出すことができる。

【定理５．２】（加法定理②）

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

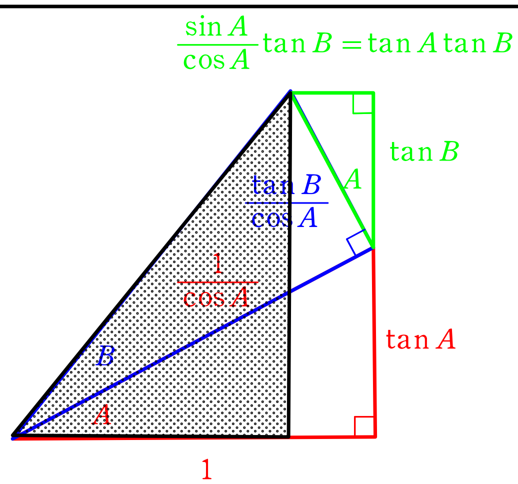
$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$



【定理５．２】の図で $\cos A\cos B$ を１とおくと【命題３．２】の三角形と、【命題３．１】より正接の加法定理を出すことができる。

【定理５．３】（正接の加法定理）

$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$



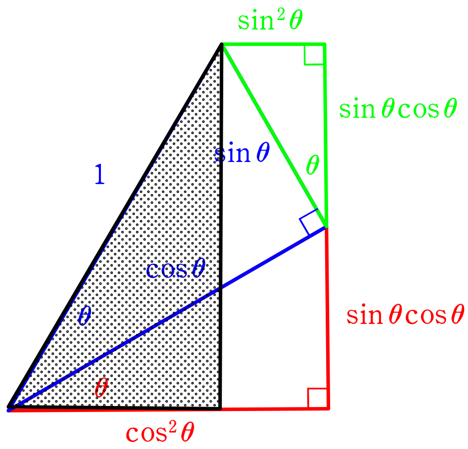
５．２　二倍角の公式

【定理５．２】において、 $A=B$ のとき２倍角の公式が導かれる。

【定理５．４】（二倍角の公式）

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$



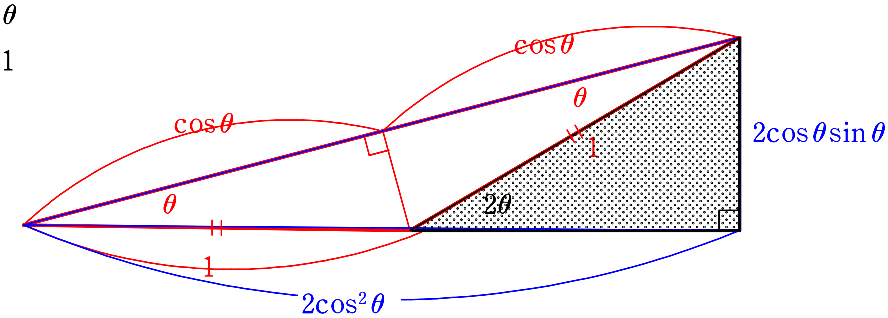
二倍角の公式を別の視点から見てみよう。

二等辺三角形の底角は等しいことを利用すると二倍角の公式を導くことができる。

【定理５．５】（二倍角の公式）

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$



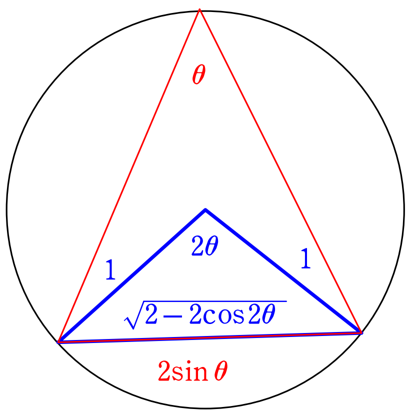
外接円の半径が１の三角形を考えて、中心角は円周角の２倍であることを用いると、【定理４．２】正弦定理と【定理４．５】余弦定理より二倍角の公式を導くことができる。

【定理５．６】（二倍角の公式）

$$2\sin\theta = \sqrt{2-2\cos 2\theta}$$

$$4\sin^2\theta = 2-2\cos 2\theta$$

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$$



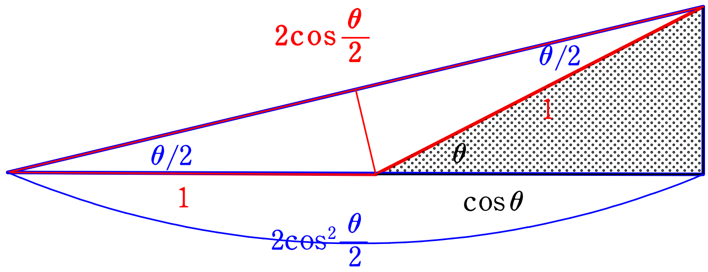
５．３　半角の公式

【定理５．５】【定理５．６】の図形を利用して $\theta=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと半角の公式を導くことができる。

【定理５．７】（半角の公式）

$$2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$$

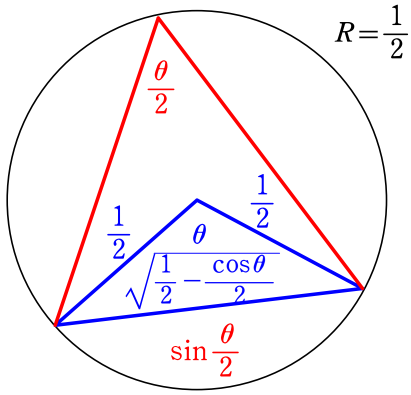
$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$



【定理５．８】（半角の公式）

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\cos\theta}{2}}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$



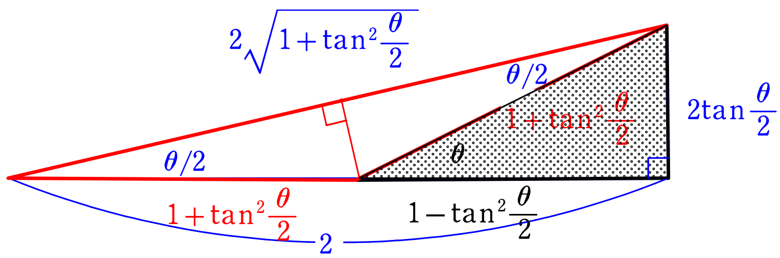
また、【定理５．７】の図で、$2\cos^2\dfrac{\theta}{2}=2$ とおくと次の式を導くことができる。

【命題５．９】

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$



５．４　三角関数の合成

【定理５．１】加法定理を応用して三角関数の合成をすることができるが、ここでは図形を使って三角関数を合成してみよう。

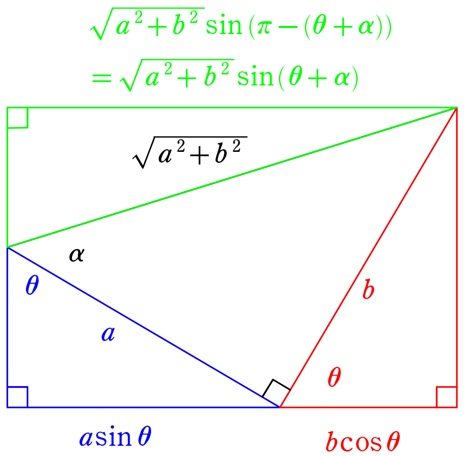
【補題１．２】の三角形と【命題３．４】$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ を利用してパズルのように組み合わせると求めることができる。

【命題５．１０】（三角関数の合成）

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$



§６　おわりに

三角関数を図形的にみることによって三角関数の公式が身近な存在になったような気がする。公式の暗記や式計算が中心になりがちな三角関数であるが、今回のように図形で三角関数を考えてみると数学のもつ美しさも感じることができて面白い。

数学を単なる公式の暗記でとらえるのではなく、目で見て感覚的にわかるようにこれからも数学を教えていきたいと思う。

【参考資料】

・三角関数の三角関係
http://izumi−math.jp/N_Toyama/98_toyama.pdf
・余弦定理を図で理解する方法
http://shochandas.xsrv.jp/urawaza/cosine.htm
・ポテト一郎さんのX
https://x.com/potetoichiro/status/1409043676165070849
・KIT数学ナビゲーション
https://w3e.kanazawa−it.ac.jp/math/