# 最小公倍数、最大公約数を図で理解してみる

札幌創成高校
外山尚生

## §０　はじめに

新課程になって登場した整数の性質。数の持つ不思議さを味わうことができる整数の性質は興味深い分野であるとともに、まだまだ未解決分野も多い謎をはらんだ分野であるといえよう。

整数の性質はつっこんだ内容まで入っていくと高校生では理解するのが難しい領域にまで入ってしまう。そのため教科書でもくわしい理論面は避けて性質だけを追っていく形になっているような気がする。それはそれで整数の持つ不思議さを味わううえではよいのかもしれないが、その一方で整数の性質はどうもとらえどころのなくてはっきりしない、そんな印象を持ってしまう。

そこで今回は最小公倍数と最大公約数をテーマに図を使って理解することに試みてみた。

## §１　ユークリッドの互除法

ユークリッドの互除法は大きい数の最大公約数を求めるための手法としてよく使われている。

ここでは具体例として次の問を考えてみたい。

[問]

168と60の最大公約数を求めよ。

これをユークリッドの互除法を用いて解くと次のようになる。

[ユークリッドの互除法を用いた解法]

168÷60＝2 あまり48
60÷48＝1 あまり12
48÷12＝4 あまり0
よって最大公約数は12である。

割る数と余りを割っていくことによって余りが0になった時の割る数が最大公約数となることがわかっているが、なぜこの方法で最大公約数を求めることができるのだろうか。疑問が残る。

ユークリッドの互除法について理解するために１つ問いを設定したい。

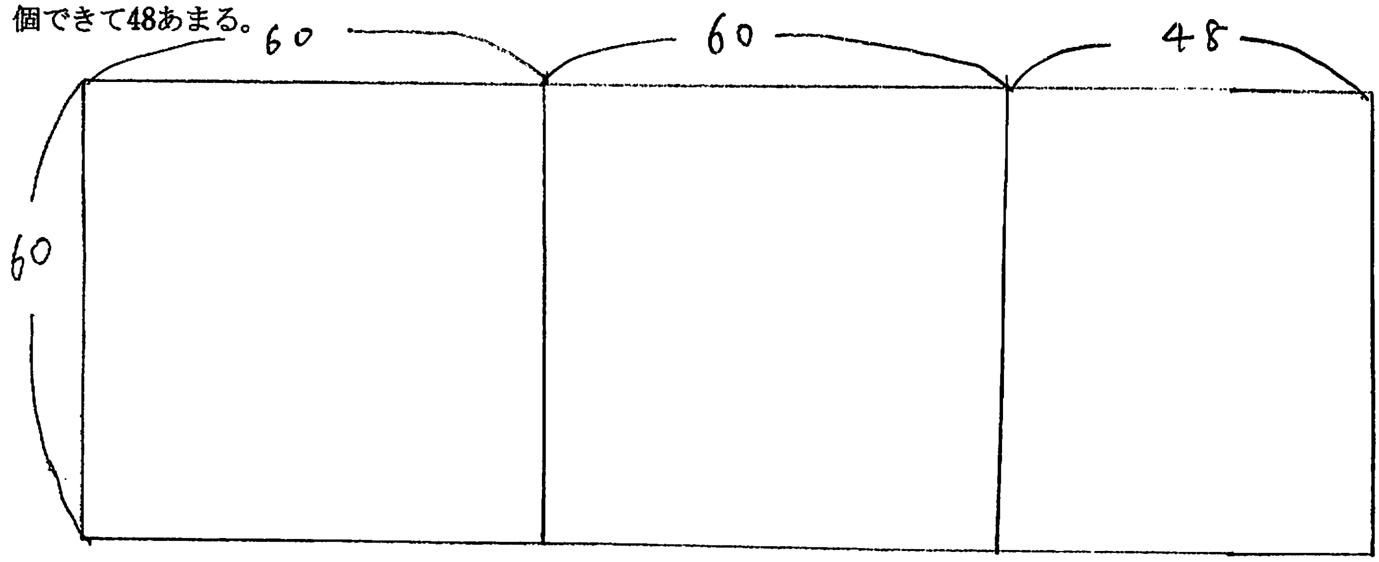
[問２]

縦の長さが60、横の長さが168の長方形がある。この長方形にいろいろな長さの正方形を敷き詰める。できるだけ正方形の数を少なくするにはどのように敷き詰めればよいか。

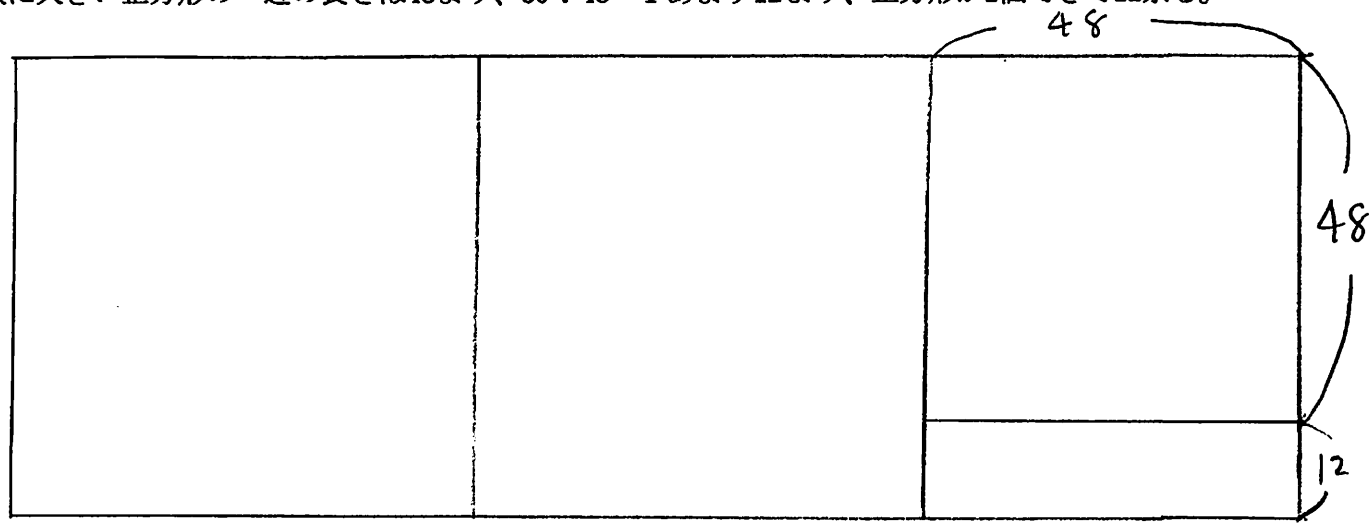
一見するとまったくユークリッドの互除法とは関係ないような問であるが、この解法がユークリッドの互除法と同じ意味を持っている。

解法はできるだけ大きい正方形から敷き詰めていけばよい。

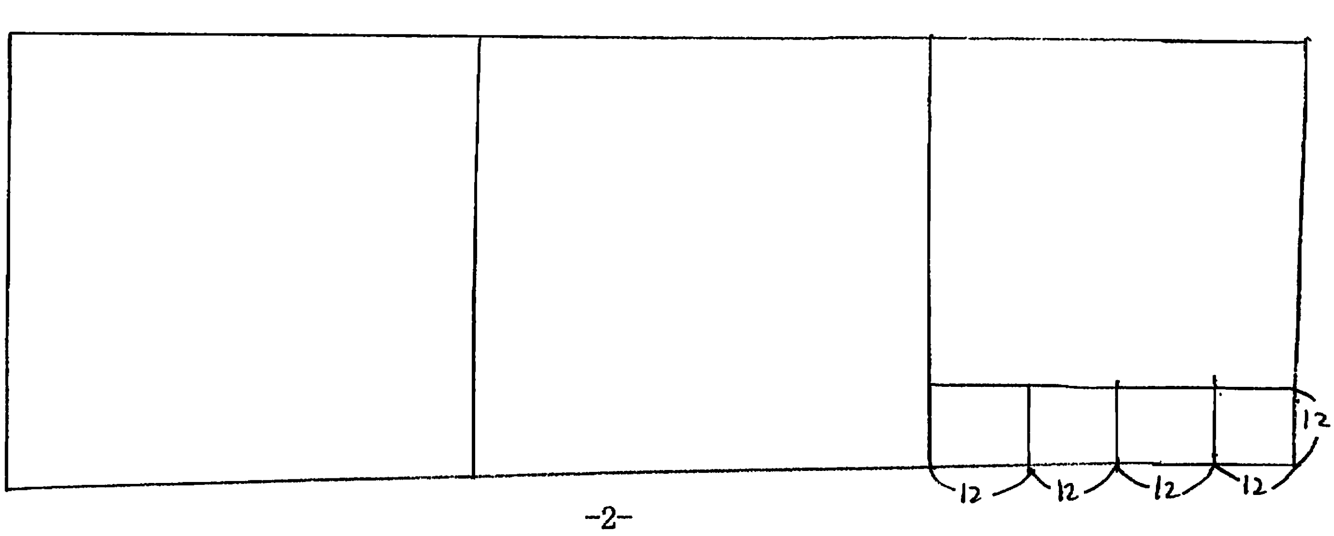
①敷き詰められる一番大きい正方形の１辺の長さが60だから168÷60＝2 あまり48より、正方形が２個できて48あまる。



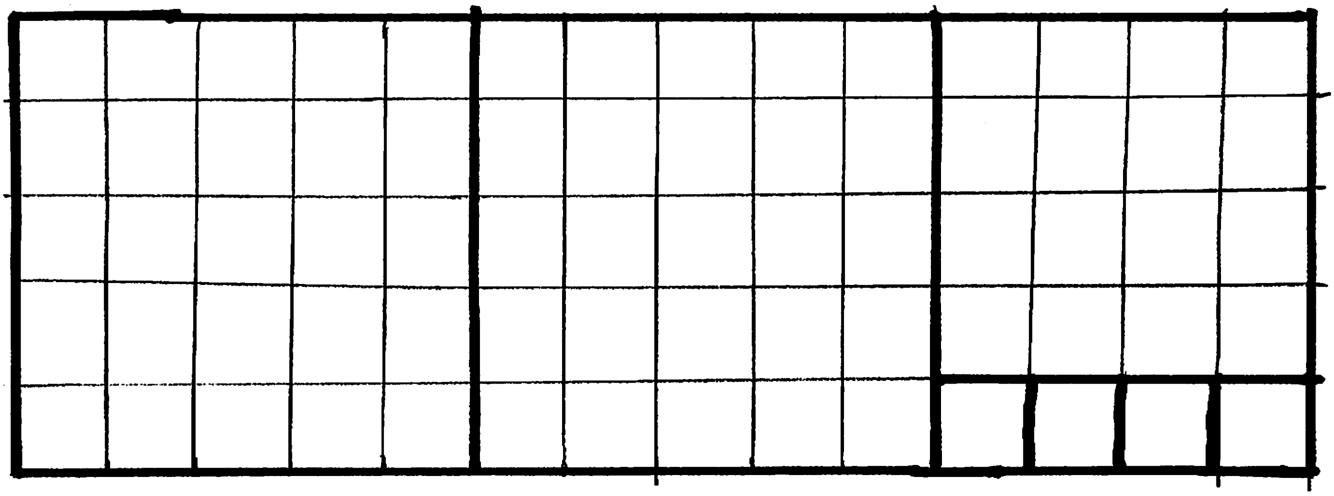

②次に大きい正方形の一辺の長さは48より、60÷48＝1 あまり12より、正方形が1個できて12余る。




③次に大きい正方形の一辺の長さは12より、48÷12＝4 あまり0より、正方形４個でぴったりうまる。



よって、この長方形は一辺の長さ12の正方形で敷き詰めることができるから、12は60と168の最大公約数であることがわかる。



このように、長方形に正方形を敷き詰めることでユークリッドの互除法を理解することができる。

■まとめと感想

ユークリッドの互除法がわからなくても、生徒にこの問いを出すと楽しんで考えてくれます。これで最大公約数が求められるんだよと話をすると、ユークリッドの互除法が身近なものになるのではないでしょうか？

## §２　最大公約数と最小公倍数をベン図で理解する

最大公約数と最小公倍数を素因数分解によって求めることを考えよう。

[問]

| |
|---|
| 168と60の最大公約数、最小公倍数を求めよ。 |

$a=168$と$b=60$を素因数分解すると次のようになる。

$168=2\times2\times2\times3\times7$

$60=2\times2\quad\times3\quad\times5$

$2\times2\times2\quad\times3\times7\quad\times5$

ここで点線で囲んだ部分の積$g=2\times2\times3=12$が最大公約数、

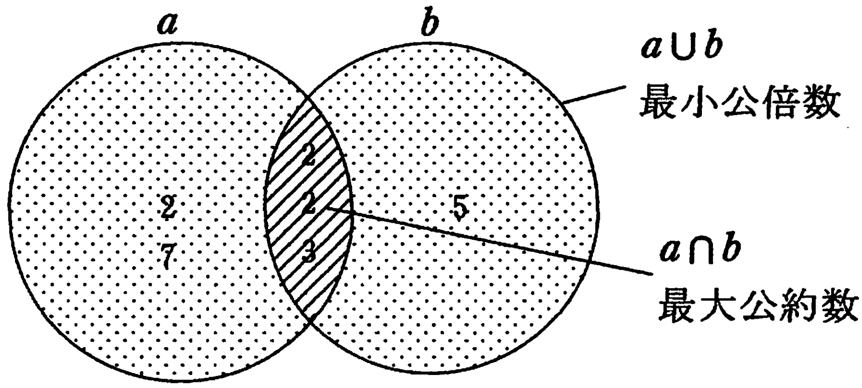
全てをおろした$l=2\times2\times2\times3\times7\times5=840$が最小公倍数である。

この点線で囲んだ部分の積は168と60の素因数の共通部分であるとみなすことができる。そこで、最大公約数$g=a\cap b$と表すことにしよう。

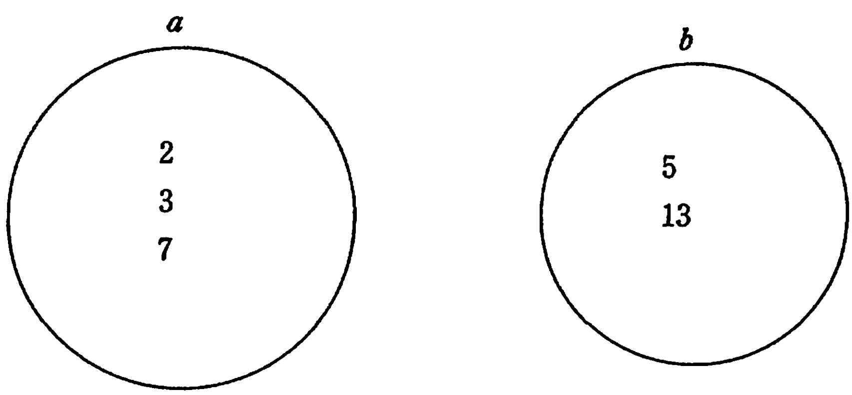
全てをおろした積は168と60の素因数の和集合であるとみなすことができる。

そこで、最小公倍数$l=a\cup b$と表すことにしよう。

ベン図にまとめると次のページのようになる。




素因数分解では上にある数字が積によって結びついている。
ここで、互いに素な状態は最小公倍数が1であるから、$a\cap b$に共通部分がないことである。

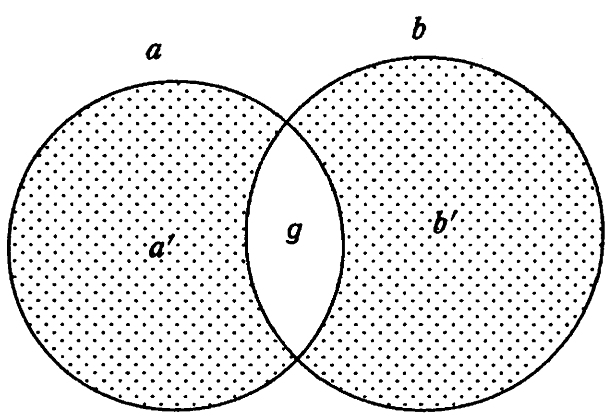



ベン図を使って最大公約数と最小公倍数を集合論的に考えると最大公約数と最小公倍数に関する性質が見えてくる。ここでは最小公倍数と最大公約数に関する有名な性質を３つ紹介してみよう。

[性質１]

| |
|---|
| $a=ga'$　$b=gb'$と表せる。このとき、$a'$と$b'$は互いに素である。 |

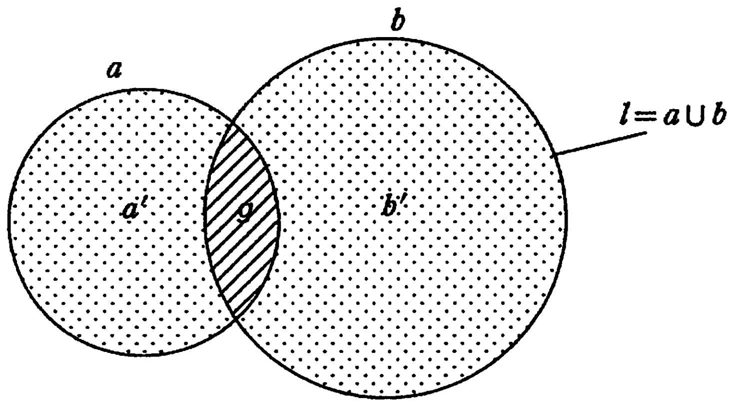
$a'$は$a$から共通部分である$g=a\cap b$を除いた部分、$b'$は$b$から$g$を除いた部分であるから、$a'$と$b'$は共通部分がない。つまり互いに素である。



[性質２]

$$l=a'b'g$$

$l=a\cup b$なのだから図より明らかである。




[性質３]

$$ab=gl$$

これは有名な公式

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$を考えるとよくわかる。移項して

$n(A\cup B)+n(A\cap B)=n(A)+n(B)$であるから

これを置き換えると$lg=ab$が成り立つ。

■まとめと今後の課題

今回、教科書にあげられている最大公約数と最小公倍数に関する３つの性質について理解をするために集合論の考え方を取り入れてみた。その結果、思ったより感覚的にわかりやすく理解できただけにこの考え方はさらに発展できるのではないかとますます興味がわいてくる。

疑問点としては次のようなものがあげられる。

①補集合$\overline{A}$は何を表しているのだろうか？

　→全体集合を取り入れなければならない。全体集合を取り入れたとして、「割り算」と関係がある？

②全体集合はどう定義するのが適切なのか？

　→整数全体を表すことは可能？

③補集合が取り入れられたとすると、ド･モルガンの法則は成り立つのだろうか？

　→$\overline{a\cap b}=\overline{a}\cup\overline{b}$、$\overline{a\cup b}=\overline{a}\cap\overline{b}$が成り立つなら、もっと複雑なことがわかりそう。

整数の性質はまだまだ不思議が多いものである。さらに研究してみたい。