

二次方程式を一次方程式的に解いてみる

札幌創成高校 教諭

外山 尚生

[キーワード]一次方程式、二次方程式

§ 1 はじめに

二次方程式 $x^2=1$ を解くときに $x=\frac{1}{x}$ と式変形する生徒がいる。 $x \neq 0$ ならばこの式変形は正しい式変形であるが、二次方程式を解くうえでこの変形は意味のない変形である。なぜこのような変形をするのだろうか？

「方程式を解く」というと一次方程式も二次方程式も連立方程式も同じものとして扱いがちだ。しかし解き方の視点からみると一次方程式と二次方程式は全く違うものである。今回のレポートでは方程式の解き方を丁寧に見ていくことにより、2つの方程式の違いについて味わってみたい。

§ 2 等式の性質

等式は次の公理によって成り立っている。この公理については正しいものであると認めよう。

[公理 1]等式の性質

- ① $A=A$ (反射律)
- ② $A=B$ ならば $B=A$ (対称律)
- ③ $A=B$ かつ $B=C$ ならば $A=C$ (推移律)

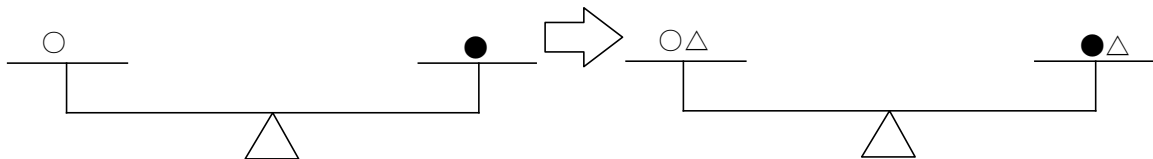
方程式を解くにはこの性質に加えて次の公理が必要だ。この公理についても認めよう。

[公理 2]

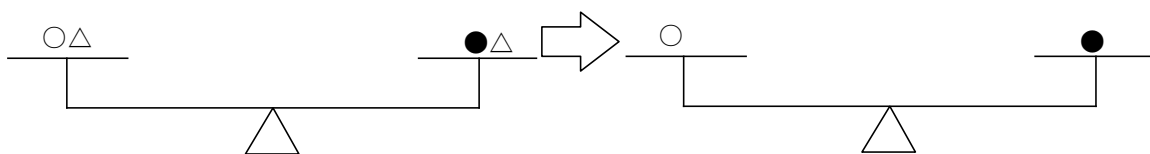
- $A=B$ ならば
- ④ $A+C=B+C$
- ⑤ $A-C=B-C$
- ⑥ $AC=BC$
- ⑦ $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$ (ただし $C \neq 0$)

この公理は一次方程式の導入として天秤ばかりをつかって説明される。

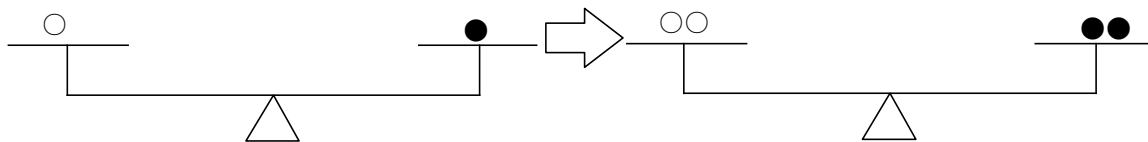
[④について]同じものを足しても等式は変わらない。



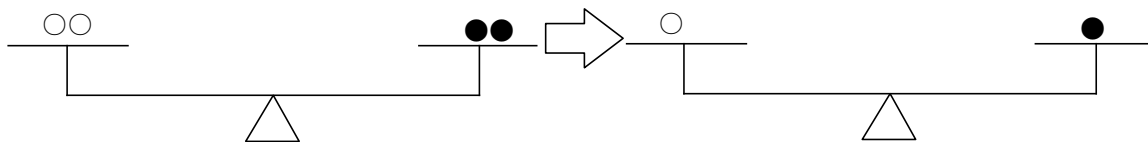
[⑤について]同じものを引いても等式は変わらない。



[⑥について]同じものをかけても等式は変わらない。



[⑦について]同じもので割っても等式は変わらない。



この公理を使えば一般的に一次方程式を解くことができる。

[例 1]一次方程式の解の一般化

$a \neq c$ とする一次方程式 $ax + b = cx + d$ について

$ax + b - b = cx + d - b$ (両辺から b を引いた)

$ax = cx + d - b$ (計算した)

$ax - cx = cx + d - b - cx$ (両辺から cx をひいた)

$(a - c)x = d - b$ (計算した)

$\frac{(a - c)x}{a - c} = \frac{d - b}{a - c}$ (両辺を $a - c$ で割った)

$x = \frac{d - b}{a - c}$ (計算した)

このように一次方程式は等式の公理で解ける。これに推移律を使えば連立方程式も解くことができる。

§ 3 等式の性質で二次方程式を解いてみる。

§ 2 で見た等式の公理を使って二次方程式を解いてみたい。二次方程式には 2 つの解法があることはよく知られた事実である。まずは因数分解を使った解法を分析してみよう。

3. 1 因数分解を使った解法

因数分解については分配法則の逆によって説明することができる。

[公理 3]分配法則の逆

$$ax + bx = (a + b)x$$

[例 2]因数分解

$$x^2 + ax + b = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \quad (a = \alpha + \beta, b = \alpha\beta \text{ とおく})$$

$$= x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta \quad (\text{分配法則})$$

$$= x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) \quad (\text{分配法則の逆})$$

$$= (x + \alpha)(x + \beta) \quad (\text{分配法則の逆})$$

このように多項式を多項式の積の形にすることを因数分解するという。

今、二次式 $x^2+ax+b=(x+\alpha)(x+\beta)$ と変形できたと仮定しよう。

二次方程式 $x^2+ax+b=(x+\alpha)(x+\beta)=0$ を解くためには場合分けによって公理2の⑤と⑦を使えば求めることができる。

[例3]二次方程式の解の一般化 (因数分解を使った場合)

$x^2+ax+b=0$ の左辺を因数分解によって $(x+\alpha)(x+\beta)=0$ と変形できたとする。ただし、 $a=\alpha+\beta$
 $b=\alpha\beta$ である。

$(x+\alpha)(x+\beta)=0$ …☆について

CASE 1 $x+\alpha \neq 0$ のとき

$$x+\beta=\frac{0}{x+\alpha} \quad (\text{☆の両辺を}x+\alpha\text{で割った})$$

$$x+\beta=0 \quad (\text{右辺を計算した})$$

$$x+\beta-\beta=0-\beta \quad (\text{両辺から}\beta\text{を引いた})$$

$$x=-\beta \quad (\text{計算した})$$

CASE 2 $x+\beta \neq 0$ のときもCASE 1と同じように計算することができる。 α と β を入れ替えればよいから $x=-\alpha$ になる。

CASE 3 $x+\alpha=0$ かつ $x+\beta=0$ のとき

$$x+\alpha=0$$

$$x+\alpha-\alpha=0-\alpha \quad (\text{両辺から}\alpha\text{を引いた})$$

$$x=-\alpha \quad (\text{計算した})$$

$x+\beta=0$ も同様にして $x=-\beta$ を導き出すことができる。

したがって、 $x=-\alpha$ かつ $x=-\beta$

すなわち $-\alpha=-\beta$ (推移律) だから

$$-\alpha \times (-1) = -\beta \times (-1) \quad (\text{両辺に}-1\text{をかけた}) \text{ より}$$

$a=\beta$ がいえる。

つまり $x=-\alpha$ となり、これを重解という。

例3をまとめると次の定理を導き出すことができる。

[定理1]

$$(x+\alpha)(x+\beta)=0 \text{ の解は } x=-\alpha \text{ または } x=-\beta \text{ である。}$$

確かに求めることはできるがどうも釈然としない。

場合分けが必要だったり、求めたい値 x が入った式で場合分けをしなければならなかったりと本当にこの解法でいいのかと不安になる。これが中学生や高校生に理解できるのか? というとう一んと首をひねってしまうのは私だけでないだろう。

ちなみに中学校の教科書ではゼロ元の性質

$$AB=0 \text{ ならば } A=0 \text{ または } B=0 \text{ である}$$

から定理1を導いている。こっちの方がすっきりしていてよいが、事実として扱われており、この組み合わせ以外にかけて0になるものはないことについては証明されていない。なんとも頼りないアプローチである。

3. 2 平方根について

二次方程式を解くうえで重要なものに平方根がある。まずは平方根についてみてみたい。

[定義]

$a > 0$ とする。二乗すると a になる数を a の平方根という。

このような数は2つあり、 a の平方根のうち正の平方根を \sqrt{a} 、負の平方根を $-\sqrt{a}$ で表す。

しかし、この定義には2つの疑問点が存在する。

[疑問点]

①二乗して a になる数はなぜ2つあるといえるのか？

②二乗して a になる数のうち正の方を \sqrt{a} と表したとき、なぜもう一つは $-\sqrt{a}$ と表せるのか。

この疑問点を解決するためには次の定理が必要である。

[定理2]

$a > 0$ とする。 $x^2 = a$ の解は $x = \pm\sqrt{a}$ である。

[証明]

$$x^2 = a$$

$$x^2 - a = a - a \quad (\text{両辺に} -a \text{を足した})$$

$$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \quad (\text{左辺は定義より。右辺は計算した})$$

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0 \quad (3. 1 \text{の例2について} \alpha = \sqrt{a}, \beta = -\sqrt{a} \text{と考える})$$

定理1より $x = a$ の解は $x = \sqrt{a}$ または $x = -\sqrt{a}$ である。☒

この定理によって $x^2 = a$ の解の存在を確認することができた。この定理を使うことで二次方程式の解の公式を導き出すことができる。

3. 3 二次方程式の解の公式

$a > 0$ である二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を考えよう。

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a} \quad (a \text{で割った})$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (\text{計算した})$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a} \quad (\text{両辺に} -\frac{c}{a} \text{を足した})$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (\text{計算した})$$

$$x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad (\text{両辺に} \frac{b^2}{4a^2} \text{を足した})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (\text{左辺は3. 1の例2について} \alpha = \beta = \frac{b}{2a} \text{のとき。右辺は計算した})$$

定理2より

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad (\text{両辺に} -\frac{b}{2a} \text{を足した})$$

よって計算すると $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ が導かれる。これを二次方程式の解の公式という。

この導出方法を見てわかるように、二次方程式の解の公式も単なる等式の性質から導かれるものではなく、定理2、元をたどると定理1の考え方が必要なのである。定理1は等式の性質だけで導き出すことができるが、その導出過程は難しい。

§ 4 まとめ

二次方程式を一次方程式的に等式の性質だけで導くことを試みてみたが、かなり難しく、大変な作業であることがわかった。二次方程式を一次方程式で解くことは同じ方程式を解く作業であっても、違ったルーツをたどっているといってもいいのかもしれない。少なくともこの2つの方程式を習う中学生では§3の定理1を導き出すことは難しく、中学生の中では違ったルーツをたどっている。

こうして考えると§1で扱った $x^2=1$ を $x=\frac{1}{x}$ と式変形する考え方は一次方程式を同じルーツで解こうと考えているのであり、二次方程式は一次方程式とは違うんだということを意識づけることが大切なのだと思わされる。しかしながら今回のレポートで見てきたように、中学校の教科書では二次方程式の解法にはたくさんのごまかしが存在している。数学を生徒に教えるために厳密な理論が必ずしも大事であるとは言い難いが、このごまかしが $x^2=1$ を $x=\frac{1}{x}$ と式変形する間違いを生み出しているのかもしれない。

今回のレポートはある生徒の素朴な間違いがきっかけとなって生じたレポートである。生徒が生んだ小さな間違いであるが、これを数学的に厳密に考えてみることでなかなか面白い発見ができた。普段我々が当たり前だと感じていることも、数学的に厳密に考えてみると深い数学の世界に入り込むことができなかなか楽しい。