

# 第109回数学教育実践研究会 レポート発表

## 常用対数でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭 長尾良平

令和元年6月1日 北海道大学理学部5号館

### 1 はじめに

コンピュータの進化により, 常用対数は「常用」ではなくなった. しかし, 「天文学者の寿命を2倍に伸ばした発明」といわれるだけあって, 近代科学において果たした役割は大きい.

高校数学での扱いも軽いものになっているが, 他教科と関連する内容もあり, 授業で扱うには良い題材だと思っている. 本レポートでは, 前任校時代の実践も含め紹介していきたい.

### 2 他教科との関わり

他教科の授業で扱われる内容で, 対数の考え方が使われているものを幾つか取り上げ, 教養講座的な授業を行った.

#### 例1 水素イオン指数 pH

酸性・塩基性の度合いを示す水素イオン指数の定義に, 常用対数が用いられている. 水素イオン濃度を  $[H^+]$  で表す時,

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

で定義される. 前任校は室蘭にあり, 登別や洞爺といった温泉地が近かったため, 温泉の成分表示などと絡めて取り上げた.

#### 例2 地震のエネルギーと規模の関係

日本は災害大国で, 北海道も昨年大きな地震災害に見舞われた. 地震速報では, 「地震の規模を示すマグニチュードは・・・」というアナウン

スをよく耳にする. 地震のエネルギーを  $E$ , 規模(マグニチュード)を  $M$  で表す時,

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

という関係があり, この関係式を書き換えると,

$$E = 10^{4.8} \cdot 10^{1.5M}$$

となる. 兵庫県南部地震が M7, 東北地方太平洋沖地震が M9 であり, マグニチュードは 2 異なる. そのとき, エネルギーは  $10^3 = 1000$  倍になることが, この式から分かる.

#### 例3 星の明るさの等級

星の明るさを示す等級には, 「等級が 5 つ上がると明るさは 100 倍」という決まりがある. よって, 等級が 1 つ上がると明るさが  $x$  倍になるとすると,  $x^5 = 100$  が成り立つ. 両辺で常用対数を考えて式変形を進めると

$$\log_{10} x = \frac{2}{5}$$

となり, 常用対数表を引くと

$$\log_{10} 2.52 = 0.4014$$

が見つかり,  $x \doteq 2.52$  が得られる.

授業では, おおいぬ座のシリウス (-1.4 等級) や北極星 (2 等級), 太陽 (-26.7 等級) について紹介し, 明るさの比較や星座について触れた.

#### 例4 平均律

音律の定め方は 1 通りではなく, 1 オクターブを均等に半音 12 個分に分割した平均律がよく知られている. 1 オクターブ上がると周波数は 2 倍

になるので、半音上がると周波数が  $x$  倍になるとすると、 $x^{12} = 2$  が成り立つ。例 3 と同様に、

$$\log_{10} x = \frac{1}{12} \log_{10} 2 \approx 0.025$$

となり、常用対数表を引くと

$$\log_{10} 1.06 = 0.0253$$

が見つかり、 $x \approx 1.06$  が得られる。

授業では、iOS 用のアプリ「Meantone」を用いて平均律の和音と、異なる音律である純正律の和音を聞き比べることも行った。

### 例 5 対数グラフ用紙

ケプラーは、ティコ・ブラーエによる観測データをもとに、惑星の運動について次の内容からなるケプラーの法則を導いた。

1. 楕円軌道
2. 面積速度一定
3. 長軸と周期の関係

第 3 法則は、楕円軌道の長軸  $a$  と公転周期  $P$  について、 $P^2 = a^3$  (長さを天文単位にとった時) と表せる。そこで、幾つかの惑星について、長軸  $a$  と周期  $P$  についてのデータを提示し、両対数グラフにプロットさせた。

天体	長軸 $a$ (天文単位)	周期 $P$ (年)
水星	0.387	0.241
金星	0.723	0.615
地球	1.00	1.00
火星	1.52	1.88
木星	5.20	11.9
土星	10.0	29.5
天王星	19.2	84.3
海王星	30.1	165

プロットした点に対する回帰直線 (らしきものを) を引かせ、傾きを読み取らせると 1.3~1.7 位になる。そこで、「真ん中は 1.5 ぐらいだね」と誘導し (やや強引)、関係を立式すると

$$\log_{10} P = \frac{3}{2} \log_{10} a + n \quad (n \text{ は } P \text{ 切片})$$

となる。地球だと  $a = 1$  のとき  $P = 1$  となるので、代入して  $n = 0$ 。したがって、 $P^2 = a^3$  が導かれる。

## 3 計算尺

電卓が普及する以前、計算尺は手軽に計算ができるツールとして理工系を中心に用いられており、「計算尺検定」も実施されていたそうである。

尺を動かすだけで計算できるのは、**目盛りの振り方に秘密**がある。例えば

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10} 6$$

であるから、「2~6 の長さ」が「1~3 の長さ」と等しくなるように振られている。

初任校の夕張緑ヶ丘実業高校は平成 15 年 3 月に閉校となったが、その際に工業科の先生から計算尺 2 本を譲っていただいた。前任の室蘭東翔高校では、[7] にある PDF データをダウンロードし、生徒に切らせて使用させていた。現任校の札幌南高校では、物理教室に計算尺が約 40 本あったため、それをお借りしている。また、「高精細な計算尺」という iOS 用アプリもある。

生徒は、レトロな竹製の計算尺を物珍しげに見つめ、スライドさせて計算結果が出るのを楽しんでいた。また、対数の性質をうまく利用していることに感心していた。

余談だが、昨年 11 月に実施された「大学入学共通テスト試行調査」の数学②に「対数ものさし」を題材にした出題があった。「授業で計算尺を取り上げていること」に対して自信を持ったと同時に、「本番にとっておいて欲しかったなあ・・・」という気持ちでいる (共通テスト初年度に当たる学年を教えているため)。

## 4 常用対数の求め方

教科書の巻末には常用対数表が載っているが、ネイピア、ビュルギ、ブリッグスらの膨大な計算を経て完成を見ている。小数第 2 位くらいまでであれば、不等式評価を用いて求めることができるので、授業でも扱っている。生徒にとっては、**試行錯誤が要求されるので、一番苦手なタイプの問題**である。

例 5  $\log_{10} 2$  の値を小数第 2 位まで求める。

$$10^3 < 2^{10} \text{ より } \frac{3}{10} < \log_{10} 2$$

