第127回数学教育実践研究会　レポート発表

曲線を愛でつつOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和5年11月25日　札幌市東区民センター

1　はじめに

数学Ⅲの「式と曲線」の単元は, 筆者が習ったカリキュラムでは「代数・幾何」に含まれていた. 当時は苦手意識があったが, 教える立場になり, 幾分その意識が改善されたことや前任校での実践について [1] で紹介している. また, 媒介変数表示された曲線の例としてベジェ曲線を [2] で取り上げている.

本レポートでは, 現任校で「曲線を愛でる」と称して行った実践などを取り上げていきたい.

2　楕円コンパス

楕円について教材研究を進めていた際, 楕円が描けるコンパスの存在を知った. 原理は, 教科書の傍用問題集の問題で説明できるので, 授業で取り上げてみた.

演習問題

長さが8の線分ABの端点Aは x 軸上を, 端点Bは y 軸上を動くとき, 線分ABを5 : 3に外分する点Pの軌跡を求めよ.

解答例

$\mathrm{A}(a,0), \mathrm{B}(0,b), \mathrm{P}(X,Y)$ とおく. $\mathrm{AB}=8$ より,

$$a^2+b^2=64 \quad \cdots ①$$

が成り立つ. 次に, 点Pは線分ABを5 : 3に外分するので

$$X=-\frac{3}{2}a \,, Y=\frac{5}{2}b \quad \cdots ②$$

と表すことができる. ② を ① に代入することによって

$$\frac{X^2}{144}+\frac{Y^2}{400}=1$$

となるので, 点Pの描く軌跡が楕円であることが分かる.

また, Webではいろんな材料を使って自作された方の作品を目にすることができる（例えば, [4][5] 等）. 飛騨高山の工芸品で「屋台のとおるまち」というものがあり, これも楕円コンパスの原理と同じなので, （このために）某フリマサイトに登録し, 入手することができた.

図 1: 屋台のとおるまち

3　オイド系

「式と曲線」の単元では, 「サイクロイド」や「トロコイド」, 「カージオイド」の様に, 接尾辞「オイド」のつく曲線が多く登場する. 授業では, まとめて「オイド系」と称して扱っていた.

黒板の粉受けに沿ってガムテープを転がして,「なんちゃってサイクロイド」を描くところから授業は展開している.

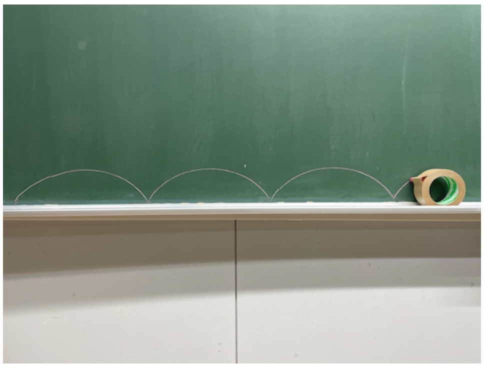


図 2: なんちゃってサイクロイド

サイクロイドに続けて,「内・外サイクロイド」や「内・外トロコイド」も紹介している. 式を導いた後, 昔懐かしい「スピログラフ」を模した「デザイン定規」を配布し, 2 人 1 組で自由に曲線を描画させた.

図 3: 100 均をはしごして, 買い漁りました

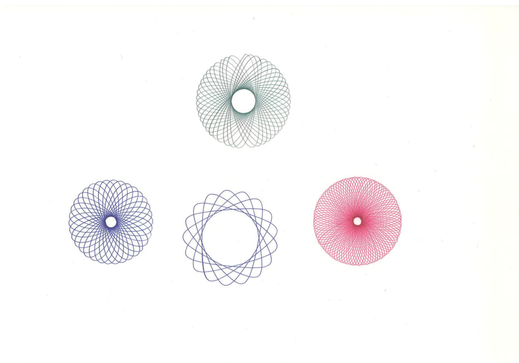


図 4: 色々描いて楽しめます

また, 2015 年度のセンター試験の数学 II・B で「7 倍角の公式?」と思わせる出題があったが, 背景にあったのは外サイクロイドだったことも紹介した. [6] では, その年度の他の問題も紹介されている.

2015 年度センター試験(抜粋)

> O を原点とする座標平面上の 2 点
> $\mathrm{P}(2\cos\theta, 2\sin\theta)$
> $\mathrm{Q}(2\cos\theta + \cos 7\theta, 2\sin\theta + \sin 7\theta)$
> を考える. ただし, $\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする.
>
> OQ の最大値を求めよ.

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ}^2 &= (2\cos\theta + \cos 7\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin 7\theta)^2 \\ &= 5 + 4(\cos\theta\cos 7\theta + 4\sin\theta\sin 7\theta) \\ &= 5 + 4\cos 6\theta\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ となるので,

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, OQ は最大値 } \sqrt{5}$$

- 円 C_1:中心が原点で半径 $\dfrac{12}{7}$ の円
- 円 C_2:半径 $\dfrac{2}{7}$ の円

とする. C_1 に沿って C_2 を転がすときに, 接点とは反対側に C_2 の中心から 1 だけ離れた点の描く図形が点 Q の軌跡であり, 外トロコイドである.

4 極座標表示

極座標表示された曲線については, 実際に r, θ の値の組を計算させ, 実際に点を打って描画させた. その際, 片対数グラフの際にも利用した Web サイトである, 方眼紙ネット [7] から「同心円図」をダウンロードして使用している. 扱ったのは,

- アルキメデス螺旋 $r = \dfrac{3}{\pi}\theta$
- 正葉曲線 $r = \sin 2\theta$
- カージオイド $r = 1 + \cos\theta$

である. 図示できた人は近くの生徒とグラフ用紙を重ね合わせたものを蛍光灯に向けて, 一致するかどうか確認させた.

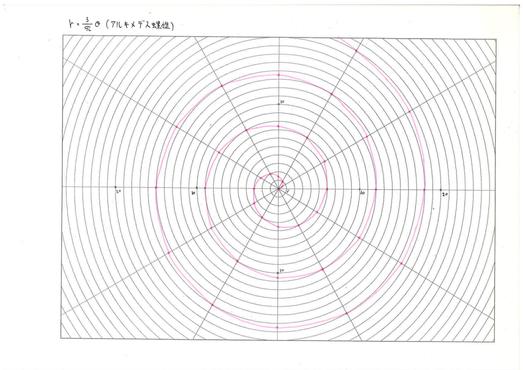


図 5: アルキメデス螺旋

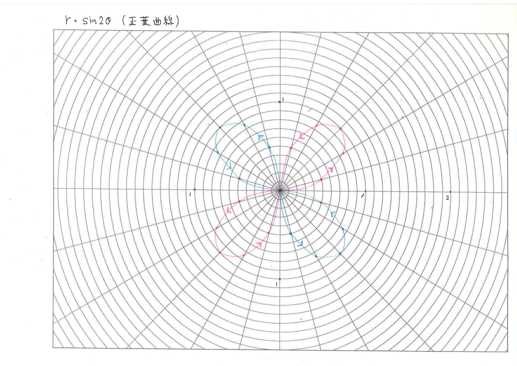


図 6: 正葉曲線

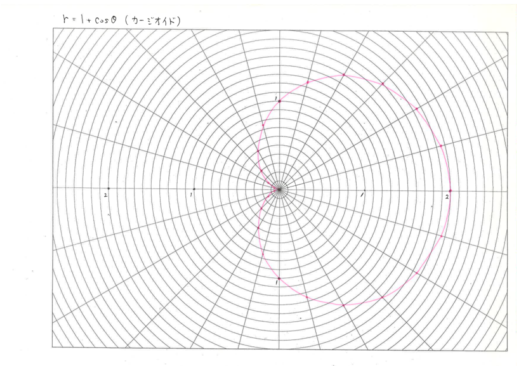


図 7: カージオイド

「点を打ってグラフを描く」という操作は,(微分を習ってからは) 機会が減る様に思うが, やはり図形を理解する点では欠かせない作業だと思う.

ちなみに, アルキメデス螺旋については「林先生が驚く 初耳学」(2017 年 7 月 23 日放送分) において,「蚊取り線香の中間地点を 3 秒で答えよ」という問題でも扱われていた [8].

$r = \theta \ (0 \leqq \theta \leqq 8\pi)$ において, 弧長 l を求める.

$$x = \theta \cdot \cos\theta \ , y = \theta \cdot \sin\theta$$

より

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta - \theta \cdot \sin\theta \ , \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta + \theta \cdot \cos\theta$$

となり,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 1 + \theta^2$$

を得るので,

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta$$

となる.

数値計算によると, $l(8\pi) \fallingdotseq 318$ となるので, $l(t_0) \fallingdotseq 159$ となるのは約 1015 度である. 生徒に, どの辺りにくるか予想させるのも面白い.

5 ベジェ曲線再び

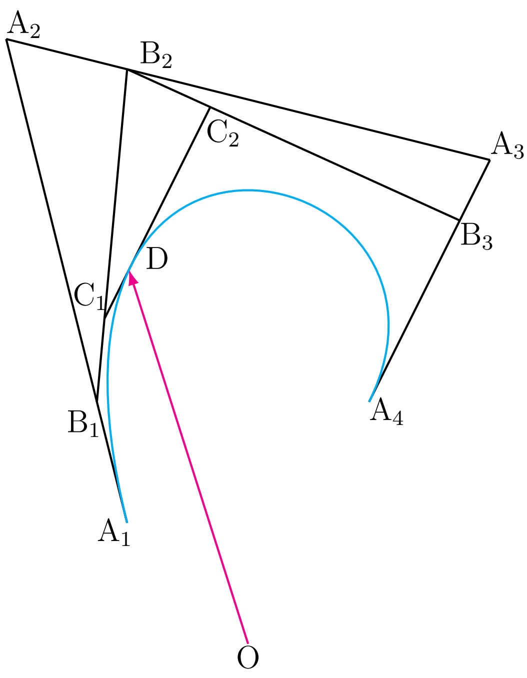
4 点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ に対し, 6 点 B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, D を次のように定める.

B_i 線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ を $t : (1-t)$ に内分する点

C_i 線分 $\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}$ を $t : (1-t)$ に内分する点

D 線分 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$ を $t : (1-t)$ に内分する点

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}, \overrightarrow{\mathrm{OA}_2}, \overrightarrow{\mathrm{OA}_3}, \overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$ で表してみよう.



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} && (1)\\
\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} && (2)\\
\overrightarrow{\mathrm{OB_3}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_4}} && (3)\\
\overrightarrow{\mathrm{OC_1}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} && (4)\\
\overrightarrow{\mathrm{OC_2}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB_3}} && (5)\\
\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OC_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OC_2}} && (6)
\end{aligned}
$$

となるので, (1)(2)(3) を (4)(5) に代入して

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OC_1}} &= (1-t)^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + 2(1-t)t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}\\
\overrightarrow{\mathrm{OC_2}} &= (1-t)^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + 2(1-t)t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}
\end{aligned}
$$

となり, この 2 式を (6) に代入することにより,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-t)^3\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + 3(1-t)^2t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}&\\
+ 3(1-t)t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + t^3\,\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}& \qquad (7)
\end{aligned}
$$

を得ることができる. (7) において, t を 0 から 1 まで変化させたときに点 D が描く軌跡を, 4 点 $\mathrm{A_1, A_2, A_3, A_4}$ を制御点とする 3 次のベジェ曲線という.

これは [2] からの引用だが, ベジェ曲線を手描きで再現されているのを [9] で見ることができる. 授業では Web ページを紹介したが, 生徒達は根気強い作業にただただ感心していた.

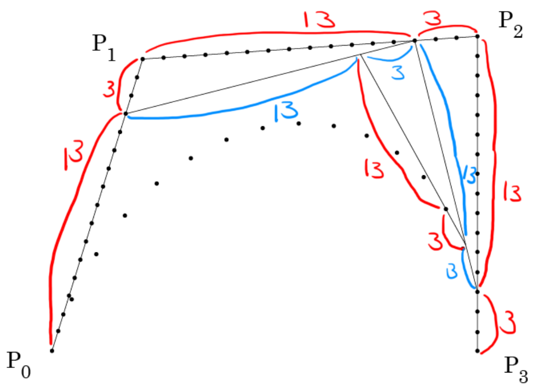


図 8: 根気強い作業に脱帽！

6　終わりに

生徒に作業をさせたり, モノを提示したりして印象に残るように努めた実践を幾つか紹介してきた. また, 「数学みえる化プロジェクト」による「北大総合博物館夏季企画展」では「サイクロイド」も登場したが, その YouTube 動画を授業でも紹介した.

ちなみに, 札幌南高校では学校祭のクラス発表の一部門として「MH 賞」というものがあり, 「事前に動画を作成する」か「当日に実演発表をする」ことになっている. 筆者が担任をしているクラスでは, （ネタに困ったこともあったが）「曲線を愛でる」をテーマにした動画を作成し, 理系の先生方には好評であった.

曲線は基本的な図形であり, 実生活の様々な部分で応用がされている. その辺りについては, 続編でまとめていきたいと考えている.

参考文献等

[1] 長尾良平「食わず嫌いでした」
第 84 回数学教育実践研究会レポート

[2] 長尾良平「繋いでみませんか」
第 85 回数学教育実践研究会レポート

[3] 改訂版 教科書傍用 4STEP 数学III
数研出版

[4] 工作記録帳
https://kousakukiroku.blogspot.com/2020/10/TremmelOfArchimedes.html

[5] konkon1127 のブログ
http://blog.livedoor.jp/konkon1127/archives/1743553.html

[6] 受験伝説 2015 年 センター試験 数学II B
https://examist.jp/legendexam/2015-center/

[7] 方眼紙ネット
https://houganshi.net

[8] 「林先生が驚く　初耳学」に関わらせてもらいました！
https://www.wantedly.com/companies/imakarasuugaku/post_articles/70565

[9] ベジェ曲線を手で描いてみる
https://nixeneko.hatenablog.com/archive/2015/06/26