

第131回数学教育実践研究会 レポート発表

曲線を愛でつつ One more thing 3

北海道室蘭栄高等学校教諭 長尾良平

令和6年11月30日 札幌光星高等学校

1 はじめに

「曲線を愛でる」シリーズの第3弾. 第1弾では「サイクロイド」, 第2弾では「カージオイド」・「オルダム継手」が主役であった. 今回は, 「インボリュート」に焦点を当てたい.

2 インボリュート

インボリュートは, 「円に巻き付けた紐をほどいていくとき, 紐の先端の点が描く軌跡」として定義される.

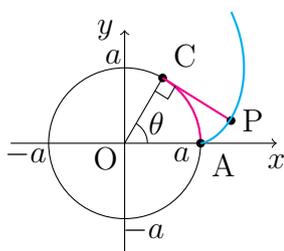


図1: インボリュートのイメージ

まず, $\widehat{CA} = \widehat{CP}$ より, $CP = a\theta$ が成り立つ.

$$\vec{OC} = a(\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{と} \quad \vec{OC} \perp \vec{CP}$$

より,

$$\vec{CP} = a\theta(\sin \theta, -\cos \theta)$$

と表せる. このとき,

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OC} + \vec{CP} \\ &= a(\cos \theta, \sin \theta) + a\theta(\sin \theta, -\cos \theta) \\ &= a(\cos \theta + \theta \cdot \sin \theta, \sin \theta - \theta \cdot \cos \theta) \end{aligned}$$

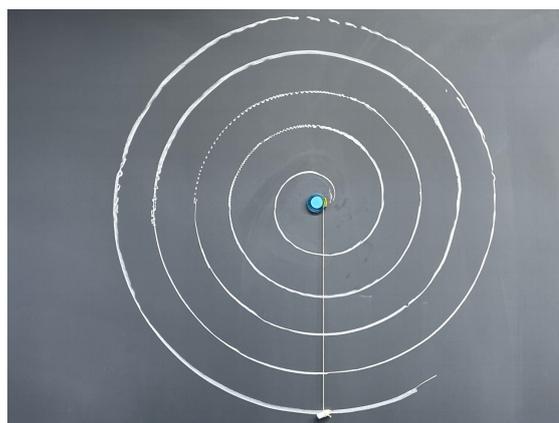


図2: 黒板に描いてみました

インボリュートに興味を持ったのは, [1]でも紹介した西山先生の記事 [6] がきっかけである. サイクロイドやカージオイドと比べるとマイナーな感じがするインボリュートであるが, 前者に負けず劣らず身の回りでは幅広く応用されている.

3 歯車

アナログ時計を始め, 身の回りの多くの工業製品に歯車は使用されている. 歯車の歯形は改良が重ねられてきているが, 最も多く利用されているのがインボリュートである (高級時計等にはサイクロイドも利用されている). 理由として,

- 力の伝わる方向 (作用線) が一定
- 角速度が一定

であることが挙げられる. 図3は, iOSのアプリケーション「Gear」のスクリーンショットであ

る。半径と垂直方向に作用線があり、効率的に力が伝達されることが分かる（静止画だから分かりにくいですが、回転してもこの関係は保たれる）。

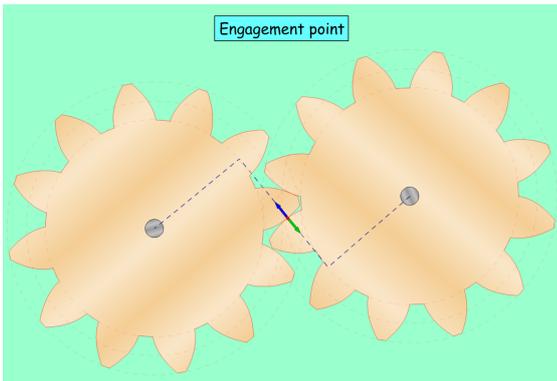


図 3: 歯車での力の伝わり方（その1）

また、[3] の記事を参考に作った模型が図 4 である。歯車同士の接点が常に同一直線上にあることが体感できる。

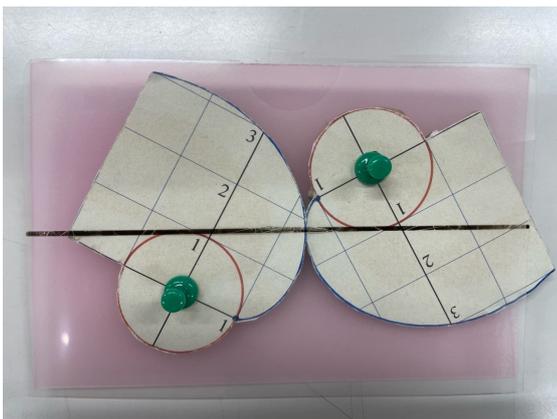


図 4: 歯車での力の伝わり方（その2）



図 5: 秋葉原で購入しました

4 スクロールコンプレッサー

コンプレッサーは工作機械やエアコンなどで幅広く使用されている。動作原理・構造によって幾つかのタイプに分かれるが、「スクロール式」にインボリュートは関係している。

固定スクロールと可動スクロール、2つのインボリュートが絡み合いながら空気が圧縮されていく様子 [7] は、いつまでも見ていられる。因みに、可動スクロールの旋回運動に関しては、オルダム継手が利用されている製品もある。

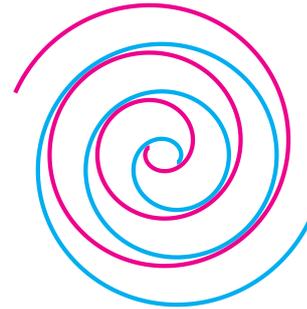


図 6: スクロールコンプレッサーのイメージ

スクロールコンプレッサーの利点としては、

- 静音性
- 高効率
- コンパクト

が挙げられる。

5 終わりに

世の中の様々な仕組みのブラックボックス化が進み、「歯車」「コンプレッサー」を生で見る機会はめっきり減ったと思う。

インボリュート歯車は、幾何学的な特徴を巧みに利用して動力を効率的かつ安定して伝えることに成功しているが、インボリュートに目をつけたのはオイラーである。授業においては、物理の力学分野とのコラボレーションも面白いと思う。

スクロールコンプレッサーは、そもそも「スクロール式」という発想自体が筆者にとっては衝撃であった。どこからその発想が出てきたのか、見当がつかない（以前のレポートで紹介した「オルダム継手」も衝撃的だった）。

スクロール式コンプレッサーは、1905年にLéon Creuxが特許を取ったところから歴史が始まっている。精密な加工が要求されることもあり、日立やサンデン、アネスト岩田等の日本のメーカーが世界に先駆けて製品化に成功している。

新課程になって初めての共通テスト実施まで、2ヶ月を切った。数学Cの「平面上の曲線」も出題範囲に含まれることになったが、授業では時間の都合上「いろいろな曲線」は省略されがちだと思う。しかし、「魅惑的な曲線」が生徒達に紹介されるのを待っている。（応用例も含めて）触れずにおくのは、あまりにもったいないと思う。

- [10] アネスト岩田株式会社 製品開発ストーリー 01「スクロールコンプレッサー」
<https://www.anestiwata-corp.com/jp/development-story/compressor>
- [11] 技術継承.com「スクロール圧縮機（コンプレッサ）の構造と特徴」
<https://gijutsu-keisho.com/technical-commentary/mechanical-001/>
- [12] 「スクロール圧縮機の幾何理論」
森下悦生・杉原正浩著 ターボ機械
- [13] 「カーエアコン用スクロールコンプレッサーの特徴」 榊正勝・平野隆久著 ターボ機械

参考文献等

- [1] 長尾良平「曲線を愛でつつ One more thing 2」
第129回数学教育実践研究会レポート
- [2] 「歯車」 ジャパンマシニスト社
- [3] 「理数教育フォーラム第8号」
東京理科大学 理数教育研究センター
- [4] 松川洋二他「歯車の歴史とその発展経緯に関する考察」
https://www.jstage.jst.go.jp/article/pscjspe/2008A/0/2008A_0_379/_pdf/-char/ja
- [5] 岩本太郎著「実用メカニズム事典: 機械設計の発想力を鍛える機構101選」 森北出版
- [6] 西山豊「オルダム継手からエアコンまで」
https://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/math2010j/oldham_j.pdf
- [7] 「Danfoss Cool Scroll Mechanism Engineering Cooling Solutions for Tomorrow」
<https://www.youtube.com/watch?v=4TqX7Y7cj3E>
- [8] 「日立スクロール圧縮機が実用化 40周年、開発者が短期間で製品化できたワケを語る」
MONOist
<https://monoist.itmedia.co.jp/mn/articles/2305/23/news068.html>
- [9] サンデン株式会社「固定容量コンプレッサー」
<https://www.sanden.co.jp/products/car/lineup/Fixed-Displacement-Type-Compressors.html>