第132回数学教育実践研究会　レポート発表

実力テストでOne more thing 2

北海道室蘭栄高等学校教諭　長尾良平

令和7年1月25日　Online 数実研

1　はじめに

第130回数実研で発表した [1] の続きである. 本稿では, 筆者が札幌南高校に勤務していた昨年度までの10年間で作問したものの中から, 幾何分野に属すると考えられる問題について, 出題意図を交えながら幾つか紹介してみたい.

2　実際の問題から

幾何の作問は, （筆者の力量不足のために）ありきたりの問題になりがちで, 苦手であった.

- 図形の性質・三角比
- 図形と方程式
- ベクトル

の順に紹介していきたい.

問1　$a=8, b=7, c=5$ の△ABC を考える. 次の問いに答えよ.

(1) ∠ABC の大きさを求めよ.

(2) ∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とする. このとき, 線分 AD の長さを求めよ.

(3) ∠BAD の二等分線と線分 BD との交点を P とし, ∠ABC の二等分線と線分 AP との交点を Q とする. このとき, △ABQ と△ABD との面積比 $S_{\triangle\,\mathrm{ABQ}} : S_{\triangle\,\mathrm{ABD}}$ を求めよ.

$\boxed{\text{意図}}$　原案は,「角の四等分線」という表現を用いた出題だったが, 検討会で「これだと誰も解かないよ！」とアドバイスをもらったので, 表現をマイルドなものに変更している.

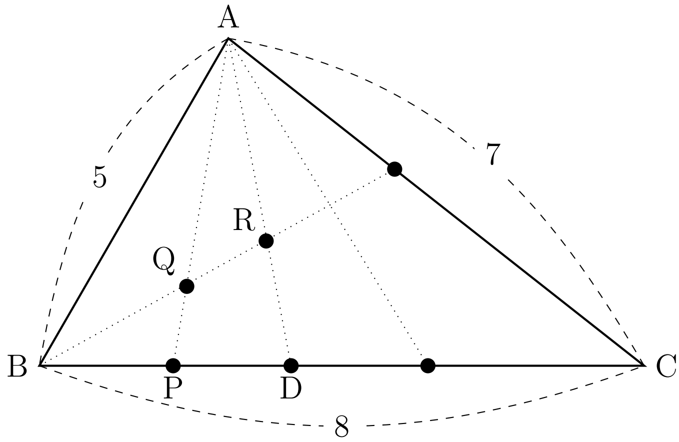

図 1: 角の四等分線

この1問で「余弦定理」「角の二等分線の性質」「面積比」といった重要事項の理解度を測ることができる. (3) については, BP : PD $= 3 : \sqrt{7}$ から BP を求め, それを利用するものを模範解答としたが,

- AR : RD $= 3 : 2$ を利用
  ☜ こちらの方が計算が楽
- Q が△ABD の内心であることを利用
  ☜ $S = sr$ が使える.

する別解が生徒の答案には見られた.

この問題を出した数年後, 次のような問題も出題した.

問 2　AB $=5$, BC $=7$, CA $=3$ の△ ABC を考える．∠A の四等分線を考え, 辺 BC との交点を左から順に D , E , F とする．次の問いに答えよ．

(1) $\cos A$ の値を求めよ．

(2) 線分 BE の長さを求めよ．

(3) 線分 AE の長さを求めよ．

(4) (BD · EF) : (DE · FC) を求めよ．

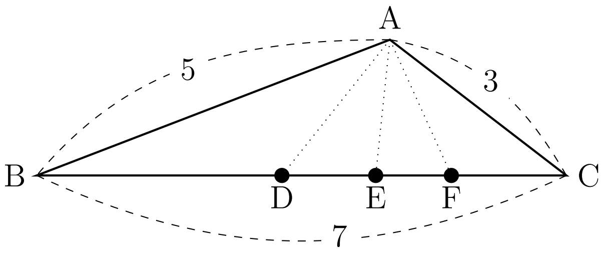

図 2: 角の四等分線（再び）

(3) の AE については, △ ABC の面積を 2 通りで計算するものを模範解答としたが, $A=120^\circ$ から AC が ∠BAE の外角の二等分線になることを見抜き, 簡潔に解いた生徒がいた．

(4) については, 角の二等分線の性質を繰り返し使うことによって, 実は BD などの長さを求める必要がない（AB : AC に等しくなる）．

問 3　AB = BC = CD = DE = EF = FA $=1$, OA = OB = OC = OD = OE = OF $=2$ である六角錐 O-ABCDEF を考える．そのとき, 次の問いに答えよ．

(1) 頂点 O から底面 ABCDEF に下ろした垂線の長さを求めよ．

(2) 外接球 S_1 の半径 R を求めよ．

(3) 内接球 S_2 の半径 r を求めよ．

$\boxed{\text{意図}}$　正四面体については, 外接球・内接球の半径を扱ったので, その発展として六角錐の場合を出題した．球と接するのが

- 外接球の場合は頂点
- 内接球の場合は三角形の面

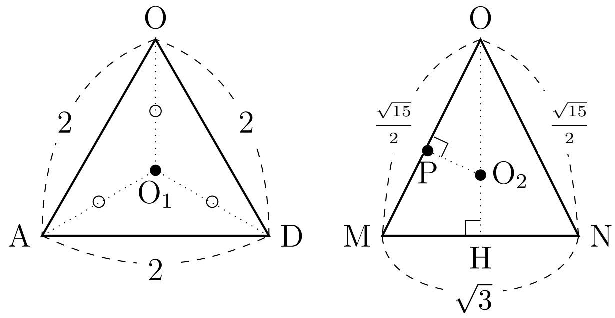

図 3: 外接球・内接球を考える断面

と異なるが, そのことを把握できていない生徒が多かった．

外接球の半径 R については, 条件設定から考える断面が正三角形となるので, 中心 O_1 は△ OAD の外心かつ重心であり, 色々な別解があった．

また, 内接球の半径 r については, 底面の向かい合う辺の中点同士を結んだ線分と O を含む平面による断面で考えることになる．△ OMN の内心 O_2 から各辺に下ろした垂線の長さが求める内接球の半径となる．

△ OMN の面積を 2 通りで表して導くものを模範解答としたが, O_2 から OM に垂線を下ろし, △ OMH と△ $\mathrm{OO_2P}$ が相似であることを利用して計算量を減らした別解もあった．

問 4　半径 6 の円上に AB $=5$ となるような 2 点 A, B をとり, 弦 AB を考える．次に, 弦 AB 上に点 C を AC $=3$, BC $=2$ となるようにとる．円の中心を O とするとき, 線分 OC の長さを求めよ．

$\boxed{\text{意図}}$　模擬試験で図形が弱い傾向にあったので, 小問集合の中の 1 問として出題した．「問題文を読んで絵が描けるか」「方べきの定理を使うことに気づけるか」が主題である．

実際の答案では,「△ OAB と△ OAC で余弦定理」を使う者が半数以上, 次いで「O から AB に垂線を下ろして三平方の定理」であり,「OC を延長して線分 DE を考え, 方べきの定理」を使った者は 10 名だった．

幾何では道具の選択が大事であるが, 方べきの定理であれば, 暗算レベルである．

$$\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CE}=\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}\text{ から}$$
$$(6+\mathrm{OC})(6-\mathrm{OC})=2\cdot 3\quad\therefore\ \mathrm{OC}=\sqrt{30}$$

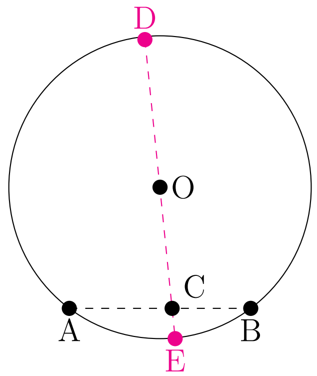

図 4: 方べきに気づきたい

問 5　放物線 $C : y = x^2 - 1$ 上の点 $\mathrm{P}(t, t^2 - 1)$ を考える（t は実数）.

(1) 原点に関して P と対称な点 Q, ならびに直線 $x = 2$ に関して P と対称な点 R の座標を, それぞれ t を用いて表せ.

(2) 点 P が曲線 C 上を動くとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 G の軌跡を求めよ.

$\boxed{\text{意図}}$　(1) は点対称・線対称な点の座標を求める復習であり, (2) の「軌跡で除外点が存在する場合の吟味」が主題である.

$$\mathrm{P}(t, t^2 - 1), \mathrm{Q}(-t, 1 - t^2), \mathrm{R}(4 - t, t^2 - 1)$$

から

$$\mathrm{G}\left(\frac{4-t}{3}, \frac{t^2-1}{3}\right)$$

となり, G の軌跡は放物線

$$y = 3x^2 - 8x + 5$$

の一部となる.

本問では, $\triangle\mathrm{PQR}$ が潰れてしまい重心 G が存在しない t が 3 個存在するので, 丁寧な吟味が必要となる. 具体的には, 次のようになる.

- P と Q の y 座標が一致するとき
  ☜ $t = 1$ のときで, $(1, 0)$
  ☜ $t = -1$ のときで, $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$
- P と R の x 座標が一致するとき
  ☜ $t = 2$ のときで, $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$

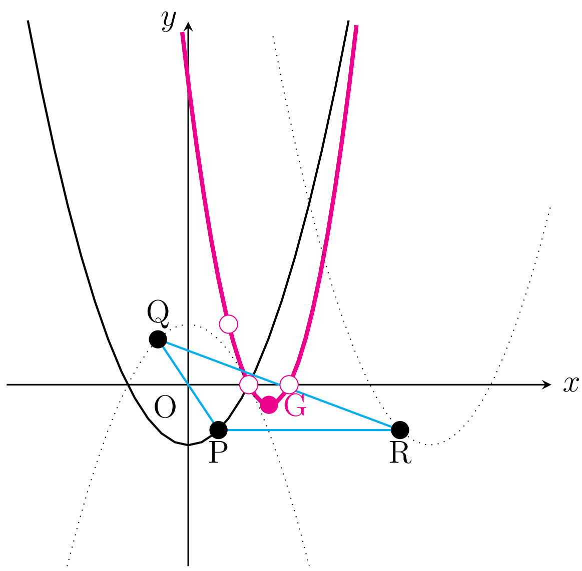

図 5: P,Q,R,G の描く放物線

問 6　次の方程式で表される 3 本の直線を考える.

$$x + 3y + 1 = 0 \cdots ①$$
$$3x + 2y - 4 = 0 \cdots ②$$
$$2x - y + 2 = 0 \cdots ③$$

(1) 直線 ① と直線 ② の交点 P の座標を求めよ.

(2) 3 本の直線 ①②③ で囲まれてできる三角形の面積 S_1 を求めよ.

(3) 直線 ③ に平行な直線 ④ を考える. 3 本の直線 ①②④ で囲まれてできる三角形の面積を S_2 とするとき, $S_2 = 14$ が成り立つような直線 ④ の式を求めよ.

$\boxed{\text{意図}}$　(3) をパワープレイ（計算ごり押し）で解く生徒が出るだろうなぁ・・・ということを想定して出題した.

直線 ③ と ④ が平行なので, 通る点が決まれば ④ の式が求められる. その際, 2 つの三角形は相似になることがポイントである. (2) の結果より,

$$S_1 : S_2 = \frac{7}{2} : 14 = 1 : 4$$

となり, 相似比が 1 : 2 の場合を考えれば良い.

④ が通る点 $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ については,

- T_1 は R に関して P と対称な点
- T_2 は P に関して T_1 と対称な点

となるが, P と R が格子点（素晴らしい配慮！）なので計算は易しい. ④ は 2 つあるが, 片方のみを解答している生徒も多かった（ここは, 少しイヤラシい）.

パワープレイだと, ④ を $y=2x+k$ とおき, ①② との交点（A,B とする）の座標をそれぞれ求め, さらに AB の長さを計算し, ④ と P との距離（これが AB を底辺と見たときの高さになる）を求め, $S_2=14$ から・・・.

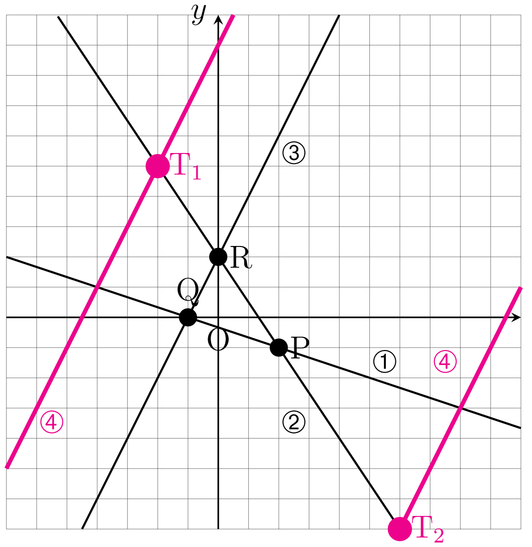

図 6: 直線 ①②③④ の関係

問 7　記号 $[x]$ は, 実数 x を超えない最大の整数を表す. 例えば, $[2.3]=2$ である. 次の問いに答えよ.

(1) $[x]=2$ のとき, x の範囲を求めよ.

(2) $[x]+[y]=0$ において $[x]=1$ のとき, y の値を求めよ.

(3) $[x]+[y]=0 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$ の表す領域 D を図示せよ.

$\boxed{\text{意図}}$　絶対値が関係する領域は入試問題でも見かけるが, ガウス記号が関係するものは見たことがなかったので, GRAPES で遊びながら作問した.

(3) では $-1 \leqq x < 0$, $0 \leqq x < 1$, $x=1$ での場合分けを自分で行うことになる. 含まれる境界と含まれない境界が存在するため, 部分点の付け方に苦労したことを覚えている.

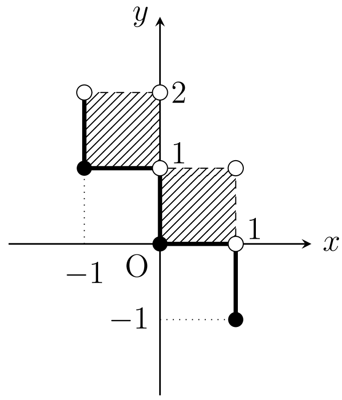

図 7: 境界の採点が面倒でした・・・

因みに, 原案ではいきなり (3) を問い, 続けて「(x,y) が領域 D を動くとき, $z=x^2+y^2+2x+1$ の最大値と最小値, また, そのときの x,y の値」を考えさせる構成だったが,「誰も解けないよ！」とのことで調整を行った上で出題した.

本問については, 類題を違う年度に出題した.

問 8　次の問いに答えよ. なお, $[x]$ は x の整数部分（x を超えない最大の整数）を表す.

(1) $-3 \leqq x \leqq 1$ のとき, 関数 $y=x^2+[x]$ のグラフを描け.

(2) $x^2+[x] \leqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ.

(3) 不等式 $x^2+[x]+y^2 \leqq 0$ で定まる領域を, xy 平面上に図示せよ.

$\boxed{\text{意図}}$　問 7 と意図は同じであるが, 領域を考える x の範囲が明示されていない. それを考えるための誘導が (1)(2) であり, $x^2+[x]+y^2 \leqq 0$ を満たす x の存在範囲は次のようになる.

$$-\sqrt{2} \leqq x \leqq 0$$

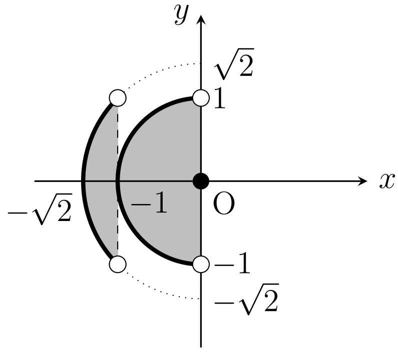

図 8: 「ガウス記号と領域」再び！

問 9　$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を零ベクトルでない空間ベクトルとする．次の命題の真偽を答えよ．さらに，真であれば証明をし，偽であれば反例を成分表示を用いてあげ，なぜ反例となるのか説明せよ．

(1) $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$ であれば，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ である．

(2) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$ であれば，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ である．

(3) $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ かつ $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$ であれば，$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$ である．

(4) x, y, z を実数の定数とし，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ のどの 2 本のベクトルも平行でないとする．そのとき，

$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$$

であれば，$(x, y, z) = (1, 2, 3)$ である．

意図　福島先生のレポート [2] が頭の中に残っており，「基本的なことでも出題したら意外と正答率は高くないかも？」という思いで作問した．

また，全て偽の命題であり「反例を挙げる能力」を測る目的もあった．

普段から，問題の読み方やマークシートの記入等が雑な生徒が一定数いたので，注意事項に下線を引いて強調したが，その事項を守れずに減点せざるを得ない答案が多かったのには閉口した．

- 平面ベクトルで解答：69 名（23 %）
- 成分表示を用いずに解答：28 名（9 %）

(1) については全員正答であって欲しかったが，「真」と解答した生徒が若干名存在．(2) は普通の積と混同し（たと思われる），安直に「真」と答えた生徒が少なからず存在した．(3) は図形的なイメージがしやすいせいか，(2) より正答率は高かった．

(4) が本問の主題である．「平面ベクトルでの一次独立の定義」の「空間ベクトルへの誤った拡張」をテーマとした．数学が得意な生徒の答案でも，「真」と答えたものをちらほら見かけた．

同じ回の実力テストの小問集合では「多項式の恒等式で係数比較を用いる」内容を出題しており，いつでも「無条件に係数比較ができるわけではない」ことを講評では強調した．

問 10　空間内の 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 を，次のように定める．

ℓ_1 : 点 $\mathrm{P}(1, 0, -1)$ を通り，$\overrightarrow{d_1} = (2, 1, 1)$ に平行

ℓ_2 : 点 $\mathrm{Q}(1, 1, 1)$ を通り，$\overrightarrow{d_2} = (1, 2, -1)$ に平行

(1) 直線 ℓ_2 上の点を媒介変数 t を用いて表せ．

(2) 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 は，ねじれの位置にあることを示せ．

(3) ℓ_1 上の点 $\mathrm{A}(2s+1, s, s-1)$ から ℓ_2 に下ろした垂線と ℓ_2 との交点を H とする．$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2$ を s の式で表せ．

(4) (3) の点 A と ℓ_2 上の異なる 2 点 B, C を用いて正三角形 ABC を作る．その面積の最小値を求めよ．

意図　原案では (2)(4) のみで考えていたが，検討会での議論を受けて難易度調整のために (1)(3) を追加している．

- 「ねじれの位置」は盲点か？
- 正三角形であることを利用して，計算の工夫ができるか？

という点を意識して作問した．

(2) の「ねじれの位置」については，

- ℓ_1, ℓ_2 が平行でないこと
- ℓ_1, ℓ_2 が共有点をもたないこと

の両方を示すことが必要であるが，どちらか片方のみを示した答案が一定数存在した．

また，共有点をもたないことを示すには，ℓ_1, ℓ_2 の方程式を連立したものが解をもたないことを示すことになるが，その記述が不明瞭な答案が多かった．

(4) の「正三角形 ABC の面積の最小値」については，(3) で $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2$ を求めていることもあり，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{AH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left\{ \frac{9}{2} \left(s - \frac{2}{3} \right)^2 + 3 \right\} \end{aligned}$$

を導き, 無駄に B, C の座標を求めずに簡潔に答えを求めている答案が多かった.

本問は, [3] に載っていた次の問題をアレンジしたものである.

埼玉大学　1979 年度入試

空間の 2 直線 L_1, L_2 が媒介変数 t, s を使ってそれぞれ次のように表されているとする.

$$L_1 : x = t, y = -t, z = -3t$$
$$L_2 : x = 2 + s, y = -1 - 2s, z = -s$$

(1) 2 直線 L_1, L_2 は, 交わらないことを証明せよ.

(2) 直線 L_1 上の 1 点を $\mathrm{P}(t, -t, -3t)$ とする. 直線 L_2 上に 2 点 Q, R をとり, 三角形 PQR が正三角形になるようにするとき, 三角形 PQR の面積を t で表せ.

3　終わりに

幾何の作問が苦手なことは冒頭に書いたとおりだが,「何とか生徒が取り組む価値のある問題を・・・」と試行錯誤していた日々の記憶が蘇ってきた.

因みに, 昨年度は 3 年生の担任をしており, 講習では過去問を精選して扱った. 週末の学習用に配布したプリントには, 過去に作成した実力テストの問題も入れておいたが, その中には問 10 のベクトルの問題も入っていた.

前期試験が終わると予備校各社が解答速報を出すが, 京都大学と大阪大学が揃って「ねじれの位置」に関する問題を出したことは, 少し話題になった.

講習の時間帯で扱ったわけではないので, 京大・阪大受験者がどれくらい解いてくれたかは不明だが, 彼らの合格にちょっとでも貢献できたのであれば嬉しいなあ・・・と思ってニンマリしていたことを思い出す.

今年度から勤務している室蘭栄高校では, 実力テストはない. ただ, やる気のある生徒もかなりおり, 彼らを刺激できるよう定期テストの作問は力を入れるようにしている.

新課程になって初めての共通テストも終わり, 1 ヶ月後には二次試験が実施される. 普段の授業, テスト, 入試対策が上手くリンクするよう, これからも作問力を高めていきたいと思う.

京都大学　2024 年度入試

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 線分 OA の中点を P, 線分 AB の中点を Q とする. 実数 x, y に対して, 直線 OC 上の点 X と, 直線 BC 上の点 Y を次のように定める.

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき, 直線 QY と直線 BX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ.

大阪大学　2024 年度入試

空間内の 2 直線 l, m はねじれの位置にあるとする. l と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

参考文献等

[1] 長尾良平「実力テストで One more thing」
第 130 回数学教育実践研究会レポート

[2] 福島洋一「超基本問題, でも問題集にはない, そんな問題を出題したらこんな結果になりました」
第 91 回数学教育実践研究会レポート

[3] 山本矩一郎「山本の空間直線と平面」
代々木ライブラリー

[4] 「全国大学入試問題正解 数学（国公立大編）」
旺文社

[5] 「数学大学入試問題解答集 国公立編 2024」
安田亨とそのグループ