

第135回数学教育実践研究会 レポート発表

図形分野で One more thing 2

北海道室蘭栄高等学校教諭 長尾良平

令和7年11月29日 札幌光星高校

1 はじめに

数学A「図形の性質」ならびに数学I「図形と計量」の単元で扱う内容について、生徒の別解を紹介してみたい。題材は、「角の二等分線」「方べきの定理」である。

2 角の二等分線の性質

教科書では、「平行線の性質」を確認した後

(1) 内角の二等分線

(2) 外角の二等分線

の順に進んでいく。

三角形の内心・傍心の定義に関係することもあり、しっかり理解させたい内容である。

[1] では、教科書での証明法についての言及があり、「確認した教科書については全て同じ補助線を引いている」とのこと。

筆者も、授業では標準的な補助線を引いて、「外角の二等分線の性質」について証明を行った。

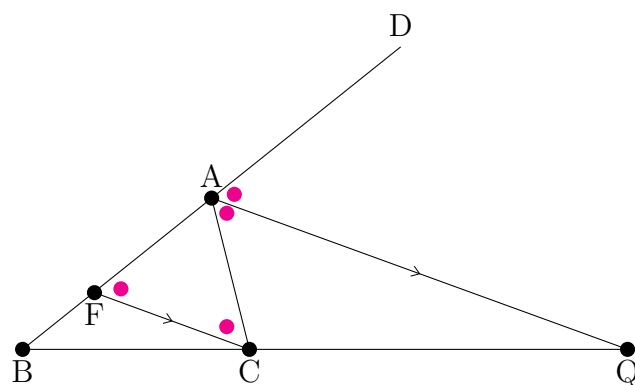
C から AB に向けて QA と平行な線分を引き、交点を F とする。

同位角だから、 $\angle DAQ = \angle AFC$

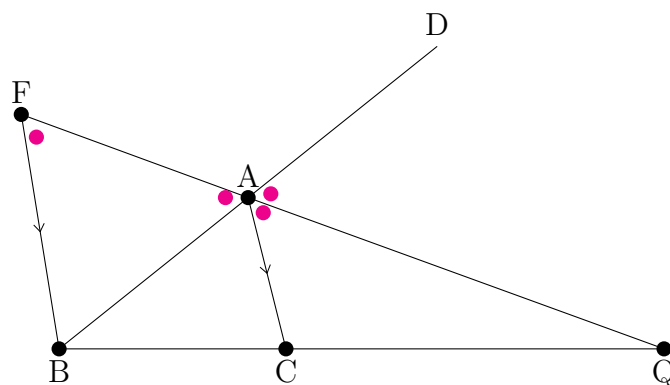
錯角だから、 $\angle QAC = \angle ACF$

したがって、 $\triangle AFC$ は $AF = AC$ の二等辺三角形となるので、

$$\begin{aligned} AB : AC &= AB : AF \\ &= BQ : QC \end{aligned}$$



授業でこの証明を提示した翌日、ある生徒（A君とする）が別の補助線を引いた証明例を教えてください。すっきりした証明だと思うので、紹介しておきたい。



B から CA と平行な線分を引き、QA の延長との交点を F とする。

対頂角だから、 $\angle DAQ = \angle BAF$

同位角だから、 $\angle CAQ = \angle BFA$

したがって、 $\triangle BAF$ は $BA = BF$ の二等辺三

角形となるので,

$$\begin{aligned} AB : AC &= FB : AC \\ &= BQ : QC \end{aligned}$$

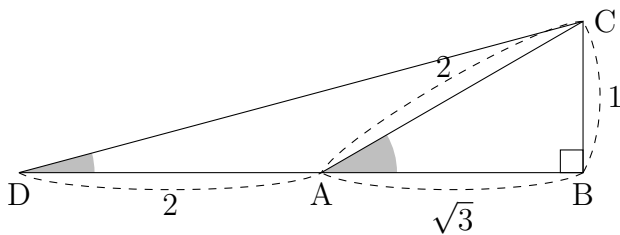
3 三角比で活用してみた

授業では、「図形の性質」に続けて「図形と計量」へ進んだ. その実践は [4] とほぼ同じである.

三角比を定義した後, 図を描いて値を導ける角として,

- $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$
- $15^\circ, 75^\circ, 22.5^\circ$
- $18^\circ, 72^\circ$

を取り上げたが, $15^\circ, 75^\circ$ については, 次の図を用いることが多いと思う.



この図を用いると, $\angle CDA = 15^\circ$ であり,

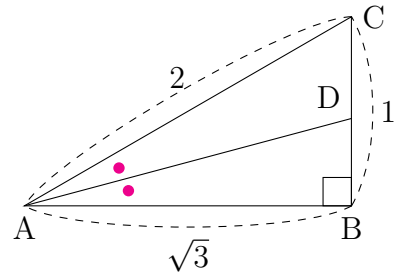
$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

のように計算できる.

前日の授業で「明日は $\sin 15^\circ$ などを求めるよ」と言ってあったのだが, A 君は授業後にまた別解を持ってきた. 素朴に, 「角の二等分線の性質」を用いて $\sin 15^\circ$ を求めるものである.



AD は $\angle CAB$ の二等分線なので,

$$\begin{aligned} BD &= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

であり,

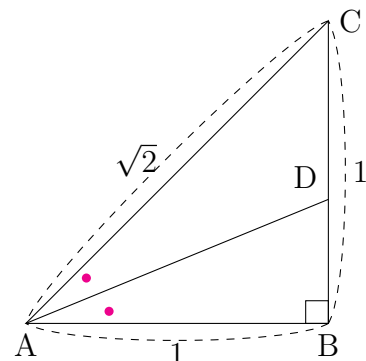
$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + \{\sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})\}^2} \\ &= \sqrt{3 \cdot (8 - 2\sqrt{12})} \\ &= \sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

となる. このとき,

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \frac{\sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

を得る.

前者は計算が軽い, 図を閃く必要がある. 後者は計算が重めだが, 図自体は簡単である. 筆者は前者の図を用いる方法しか頭になかった, 生徒の方法には感心した. 同様に考えて, 22.5° についても三角比の値を求めることができる [3].



$\tan$ であれば二等分線の長さを求める必要がないので、軽めの考查問題として

- 直角三角形で2辺ないし3辺の長さを与え
- $\tan \frac{A}{2}$ を問う

出題が考えられる。

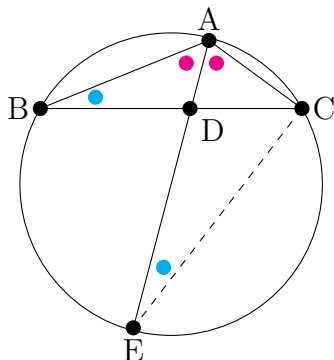
4 角の二等分線と方べきの定理

「方べきの定理」は、共通テストでも頻出の内容である。授業では、定型題を扱った後に「角の二等分線の長さ」の公式を紹介し、「方べきの定理を使って証明できるんだけど・・・」と投げかけ、宿題とした。

示したい公式は、ADが $\angle BAC$ の二等分線の時、

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD \dots ①$$

である。



方べきの定理を利用して証明するには、ADを延長し円との交点Eをとるところから始める。

方べきの定理より、

$$AD \cdot ED = BD \cdot CD \dots ②$$

が成り立つ。また、 $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ だから、

$$AB : AD = AE : AC$$

つまり

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \dots ③$$

も成り立つ。このとき、①の右辺に②と③を代入して

$$\begin{aligned} AB \cdot AC - BD \cdot CD &= AD \cdot AE - AD \cdot ED \\ &= AD \cdot (AE - ED) \\ &= AD \cdot AD \end{aligned}$$

が成り立つ。

この問題に対しては、A君とは別の生徒（B君とする）が別解を持ってきた。

AB > ACの場合で証明をする。まず、

$$\begin{aligned} AD^2 &= AD \cdot (AE - DE) \\ &= AD \cdot AE - AD \cdot DE \dots ④ \end{aligned}$$

であり、④に②を代入すると、

$$AD^2 = AD \cdot AE - BD \cdot CD \dots ⑤$$

が成り立つ。したがって、 $AD \cdot AE = AB \cdot AC$ を示すことができれば証明は終了する。

ここで、AB上にAF = ACとなるように点Fをとる。このとき、4点B, E, D, Fが同一円上に存在することを示す。

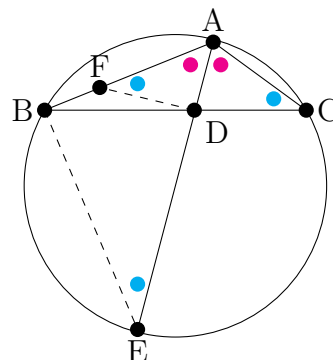
$\triangle ACD \cong \triangle AFD$ より、 $\angle ACD = \angle AFD$ が成り立つ。また、円周角の定理より、 $\angle ACD = \angle AEB$ が成り立つ。したがって、

$$\angle AFD = \angle AEB$$

が成り立つので、4点B, E, D, Fは同一円上に存在する。再び、方べきの定理より

$$\begin{aligned} AD \cdot AE &= AF \cdot AB \\ &= AC \cdot AB \dots ⑥ \end{aligned}$$

が成り立ち、⑥を⑤に代入して証明が完成する。



スマートな証明ではないが、授業で学んだことを駆使して独自の証明を組み立てており、素晴らしいと思った。

5 講習の問題で活用してみた

冬期講習で次の問題を扱った。

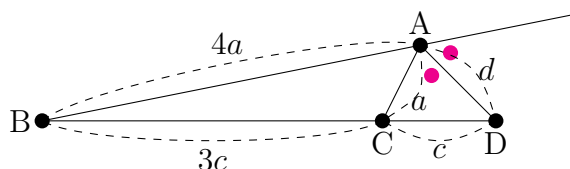
奈良女子大学 2020 年度入試

三角形 ABC において、

$$AB = 4a, AC = a, BC = b$$

であるとする。∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とし、 $CD = c, AD = d$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) (略)
- (2) $b = 3c$ を示せ。
- (3) $d^2 = 4c^2 - 4a^2$ を示せ。
- (4) (略)



(3) について、標準的な解法は次のものだと思う。まず、△ABC で余弦定理を用いて、

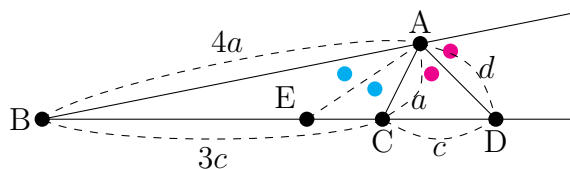
$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{(4a)^2 + (3c)^2 - a^2}{2 \cdot 4a \cdot 3c} \\ &= \frac{15a^2 + 9c^2}{24ac} = \frac{5a^2 + 3c^2}{8ac}\end{aligned}$$

次に、△ABD で余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}d^2 &= (4a)^2 + (4c)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 4c \cdot \frac{5a^2 + 3c^2}{8ac} \\ &= 16a^2 + 16c^2 - 4(5a^2 + 3c^2) \\ &= 4c^2 - 4a^2\end{aligned}$$

ただ、∠B を含む異なる三角形に対して余弦定理を (2 回) 使うこともあり、易しくはない。

B 君は余弦定理を用いない別解をもってきた。



まず、∠BAC の二等分線と BC との交点を E とする。そのとき、

$$\begin{aligned}BE : EC &= AB : AC \\ &= 4a : a \\ &= 4 : 1\end{aligned}$$

となるので、

$$BE = \frac{4}{5}BC = \frac{12}{5}c \quad EC = \frac{1}{5}BC = \frac{3}{5}c$$

次に、△AED を考えると ∠EAD = 90° だから、

$$AE^2 + AD^2 = ED^2$$

が成り立つ。

ここで、

$$\begin{aligned}AE^2 &= AB \cdot AC - BE \cdot EC \\ &= 4a \cdot a - \frac{12}{5}c \cdot \frac{3}{5}c \\ &= 4a^2 - \frac{36}{25}c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ED^2 &= (EC + CD)^2 \\ &= \left(\frac{3}{5}c + c\right)^2 \\ &= \frac{64}{25}c^2\end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned}AD^2 &= ED^2 - AE^2 \\ &= \frac{64}{25}c^2 - \left(4a^2 - \frac{36}{25}c^2\right) \\ &= 4c^2 - 4a^2\end{aligned}$$

B 君の解法は、「角の二等分線の性質」と「三平方の定理」のみを用いる初等的なものである。

筆者は ∠BAC の二等分線 AE を考え、直角三角形 AED に着目している点が面白いと感じた。

また、「角の二等分線の長さの公式」は B 君が独自の証明を考えており、そこで証明した公式を利用している点も素敵だなと思った。

6 終わりに

幾何や確率, 整数の問題では別解が考えられることが多い. 解答には

- 標準的なもの
- スマートなもの
- 愚直なもの

が考えられるが, 大事なのは生徒が「自身の手と頭を使って考える」ことだと思う.

その点において, 拙文に載せた生徒の解法には「生徒の思考の跡」を見ることができ, 別解を提示してくれたことが非常に嬉しかった. 生徒の発想に, こちらの凝り固まった頭をほぐしてもらっている感すらある.

授業を通して, 生徒ともに筆者の数学力も向上させて, 授業に還元させていきたいと思う.

参考文献等

- [1] 中村文則「角の二等分線を折る」
第 131 回数学教育実践研究会レポート
- [2] 中村文則「角の二等分線の性質を狩る」
第 54 回数学教育実践研究会レポート
- [3] 中村文則「有名角・準有名角の三角比」
数学教育実践研究会レポート
- [4] 長尾良平「図形と計量で One more thing」
第 120 回数学教育実践研究会レポート
- [5] 「全国大学入試問題正解 数学 (国公立大編)」
旺文社