第98回数学教育実践研究会　レポート発表

図形分野でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

平成28年8月6日　小樽桜陽高等学校

1　はじめに

現行のカリキュラムでは, 数学Iに「三角比」, 数学Aに「図形の性質」と直接, 図形を相手にする単元が配置されている. そこでは, 定理や公式を証明して道具を増やし, 線分の長さや角の大きさ, 図形の面積などを求めていく. 求値問題を多く扱うことになるが, せっかく**具体的な図形を相手にする**のだから, いろいろ遊んだり教具を作ったりしようと思った. 筆者はこれまでに [1][2] を発表してきたが, 今回は小ネタ集である.

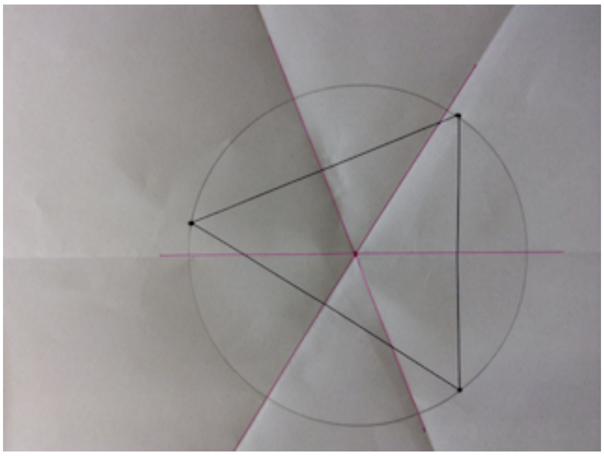

図 1: 外心

2　五心に関連して

三角形の外心・内心は, それぞれ

- 3辺の垂直二等分線の交点
- 3つの角の二等分線の交点

であり, 1点で交わることを証明した後に, 求値問題でそれらの性質が活用される. 授業では, 証明に続けて実際に3直線が交わることを生徒に確認させた.

(1) B5の紙を配り, 自由に三角形を描かせる

(2) 紙を折って, 垂直二等分線・角の二等分線を作らせる

(3) 3本の折れ線が1点で交わることを確認

(4) 交点にコンパスの針をあて, 外接円・内接円が描けることを確認

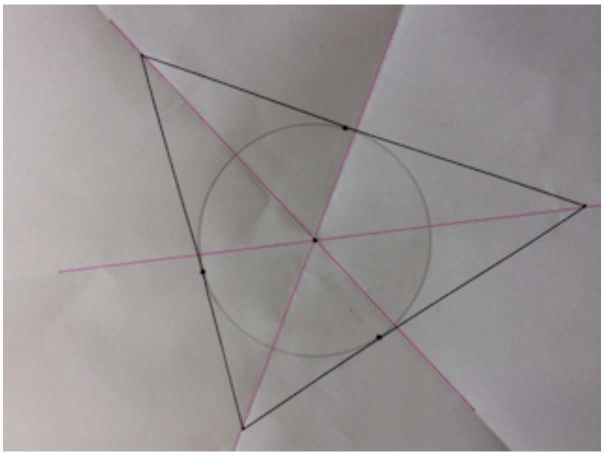

図 2: 内心

紙を折る場面で, **生徒の性格（丁寧・適当）や手先の不器用さ等が露見**して, 教室は盛り上がる. 生徒の感想として, 「証明したので外接円や内接円の中心になることは**理屈として分かる**けど, **実際やってみて**円が描けると**嬉しい**」とのこ

と．**体感することの重要性**を改めて感じた．

また，中村 [3] では，「チェバの定理の逆」を利用して五心がそれぞれ共点であることを紹介しているが，**「五心」と「チェバ・メネラウスの定理」の良いまとめになる**だと思ったので，重心・内心・垂心について生徒に考えさせた．垂心については，$\cos\theta$ を使うという発想が出てこず，解答時には生徒達は「ああ，そうか～」という表情をしていた．

また，**「九点円の定理」**と**「フォイエルバッハの定理」**についても紹介した．iPad mini 上で GeoGebra を使用し，**「こんなことよく見つけたよね・・・」**と感想を述べつつ，三角形の頂点を動かしながら教室内を歩いて回った

なお，証明が気になった生徒が質問に来たので，以前読んだことのある小平 [4] を紹介した．

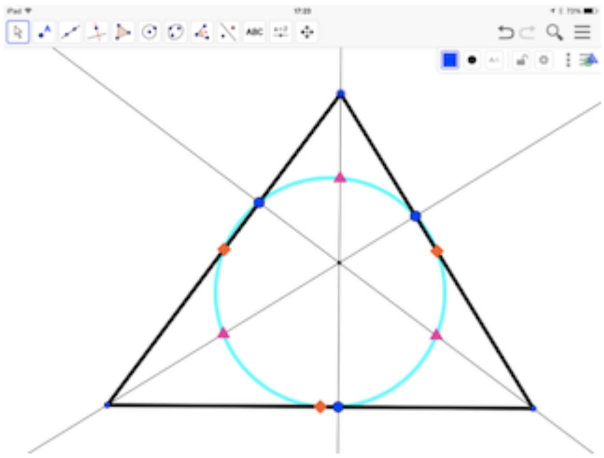

図 3: GeoGebra で九点円の定理

3 円に関係して

以前のレポート [5] で，**円順列の教具として 100 均で購入したフラフープ**を利用した事例を紹介した．あのときのフラフープは，この度**「円周角の定理の実演」**の際に再度登場することになった．

(1) フラフープを組み立て

(2) パンツのゴムをカードリングに通したものをテープで固定

「『生』円周角の定理ですよ～」と言いながら，カードリングを動かすだけだが，**馬鹿馬鹿しさも相まって生徒には意外と好評**だった．

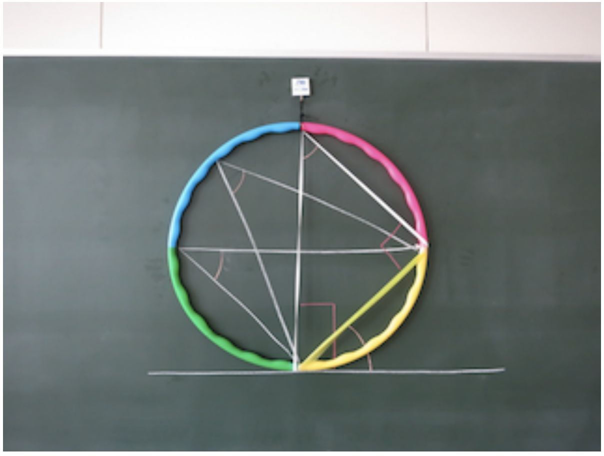

図 4: 接弦定理の説明中・・・

また，「同じ円に接する 2 本の接線の，交点から接点までの長さは等しい」という定理を菜箸を使って説明し，授業の中では**「お箸の原理」**と呼んでいる．

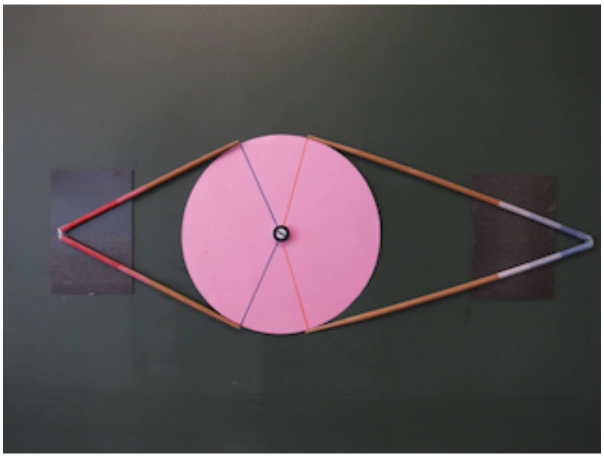

図 5: お箸の原理

4 正四面体と球

三角比の最後で，立体の計量について扱う項目が設定されており，正四面体の内接球・外接球の半径を求める問題がある．この話題については数実研でも多くの実践があり，吉田 [6] 中村 [7] 菅原 [8] 等で紹介されている．

その発表を聞いていた筆者もやってみたくなり，内接球・外接球それぞれのバージョンを作製した．球体を作るのは難しいので，

(1) 出来合いの球体を用意
   ☜ 内接球は発泡スチロール製のボール
   ☜ 外接球はくす玉

(2) 半径から四面体の１辺の長さを逆算

(3) 正三角形４枚をプラ板から切り出す

(4) 貼り合わせて完成

の手順で完成させた.

教室に持っていって生徒に見せると, **「分かりやすーい！」**と予想通りの反応であった. なお, 内接球の方は生徒に渡して自由に見させた後, **自分の所に戻ってきた時には, 球に顔が描かれていた・・・**.

図 6: 正四面体と内接球

また, 内接球の半径を求めるのに合同な四面体に分割する方法があるが, 当初, そのパーツは作製していなかった. 生徒が「こうやっても半径出ますよね」と分割する話をしてきたので, その日の内にパーツを早速作り, 翌日に紹介した.

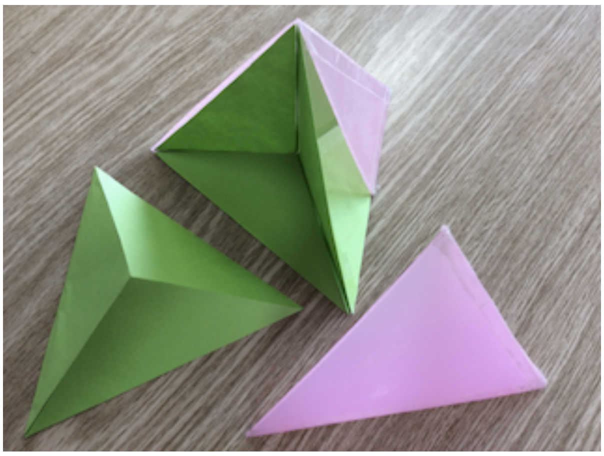

図 7: 正四面体の合同な三角錐への分割

図 8: 正四面体と外接球

授業では, 半径を求めるのに正弦定理や余弦定理を使用したが, メネラウスの定理を使って導く [8] のはオシャレだと感じた.

この作業を通して, [8] の菅原先生のコメントを思い出し, やっぱり数学って楽しいなと感じた. 長くなるが, 引用してみる.

気づいたこと

模型を作る過程に数学的活動がある.

本来は「説明補助のための教材」という位置づけて教師である私自身が教具を作成してみました.

しかし, 4 つの三角錐の型の設計図を作りあげるためには数学で学んだ知識 (正弦定理・余弦定理) が必要になります. 教材作成という目的達成のためにごく自然に数学を使っているのです.

このままの形ではなくとも,「設計の過程も含めて適切な教具を制作する課題」が, 数学を感じ, 習得するためには大変有用であることを感じました.

以前, 管理職との面談の中で教材・教具の話題になり, **「先生が色々作るのももちろん良いけど, 生徒達に作らせてみるのもいいんじゃない？」**とのアドバイスを受けたことがあった. **「教材・教具を作らせる活動」**は, 今まで数実研でもレポート発表は多くないと思う. これから大事にしていく方向性の１つかもしれない.

5　正五角形の作図

2年前に教育実習生の指導が当たり, 研究授業は**「正五角形の作図」**でやることになった.

彼は大谷[9]で扱っている**「2010年のセンター試験」受験組**で, 「方べきの定理」について実習中の会話でも話題になった. そこで, 標準的な方法ではなく, **方べきの定理を利用して正五角形の1辺の長さを作図**する流れで研究授業を行った.

そして, 次年度に筆者がこの内容を扱った際は, 前年度の彼の実践をベースに授業を行った.

まず, 正五角形の1辺の長さを1としたときの対角線の長さ x を求めるところから始める.

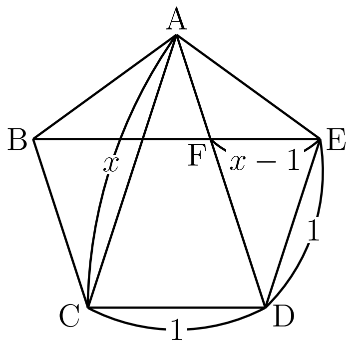

図 9: 正五角形の中の相似な三角形

$\triangle$ACDと$\triangle$DEFが相似であることより,

$$x : 1 = 1 : (x-1) \quad \cdots ①$$

が成り立つ. 通常の方法では, ①を整理してできる方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解を求めた上で, その長さを作図することになる.

一方, ①は $x(x-1) = 1^2 \ \cdots ②$ と変形できるため, 図10のように長さ1の線分OTの端点Tで接する半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描き, 点Oから円の中心Cを通る線分を引くと, 方べきの定理より, 線分OQが求める長さを与える.

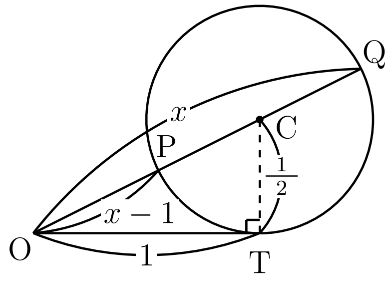

図 10: xの長さを作図すると・・・

生徒には, ②から図10を思い起こして欲しかったが, 難しかったようだ.

教育実習から約2年になるが, 実習生の中川篤君と打合せは楽しい時間であった.

6　終わりに

授業を一番楽しんでいるのは, 他ならぬ筆者である. **「自分が楽しみたいだけなんじゃないの？」**と言われてしまえばそれまでだが, **「アソビ心を大切にして, 授業を楽しんでやる」**ことは大事だと思う.

「頭や手を使い, 楽しく取り組んでいる」筆者と**同じ感覚に生徒がなれる**ような授業展開を目指していきたい.

参考文献等

[1] 長尾良平「捩じれた話」
第88回数学教育実践研究会レポート

[2] 長尾良平「大風呂敷を広げる」
第92回数学教育実践研究会レポート

[3] 中村文則「メネラウスで三角形を巡る」
第58回数学教育実践研究会レポート

[4] 小平邦彦「幾何への誘い」岩波書店

[5] 長尾良平「お気楽ご気楽」
第87回数学教育実践研究会レポート

[6] 吉田奏介「図形・立体の提示に一手間を Plastic で数学を 」
第66回数学教育実践研究会レポート

[7] 中村文則「メイクる数学　四面体に球を膨らませてみよう」
第74回数学教育実践研究会レポート

[8] 菅原満「手作り教材のすすめ」
第78回数学教育実践研究会レポート

[9] 大谷健介「だって・・・“方べきの定理” に気がつかないんだもん」
数学教育実践研究会レポート

[10] 芳賀　雪枝「紙を折る」
第94回数学教育実践研究会講演