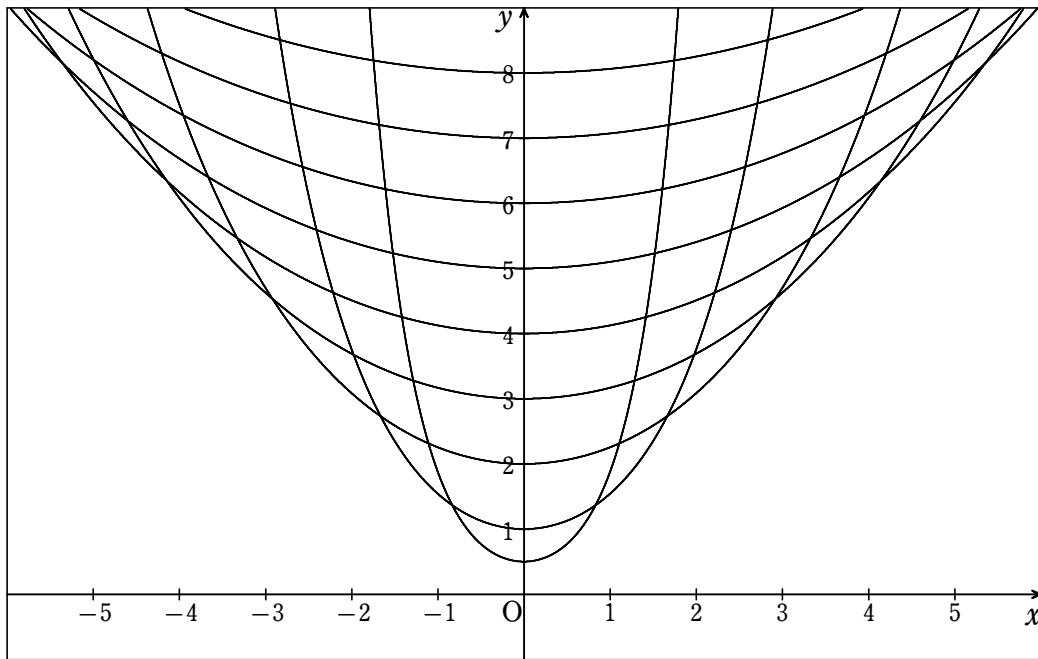


## 1 カテナリー (catenary) の定義

カテナリーは懸垂線とも呼ばれ、左右2点で張られたときに自重でたわんでしまう曲線のことで、以下の式で定義されます。

$$f(x) = a \left( \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \right)$$

グラフで見ると、カテナリーは定数  $a$  の値によってたわみ具合が変化します。 $a=1$  から  $8$  まで動かすと、だんだんカーブがゆるやかになっていくのがわかります。



## 2 入試問題におけるカテナリー

入試問題にも登場しますね。何と2年連続で北大の後期試験に出題されました。

関数  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  ( $x \geq 1$ ) と関数  $g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  ( $t \geq 0$ ) を考える。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。

(1)  $g(t) \geq 1$  を示せ。

(2)  $a > 0$  とする。定積分  $\int_0^a f(g(t))g'(t) dt$  を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とする。 $p > 1$  とし、 $C$  上の点  $(p, f(p))$  における接線を  $l$  とする。このとき、曲線  $C$ 、直線  $l$ 、 $x$  軸で囲まれた図形の面積  $S$  を  $p$  で表せ。

(2019年 北大)

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  とし、曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とする。また、 $s > 1$  とし、 $0 \leq x \leq \log s$  の範囲における  $C$  の長さを  $L(s)$  とする。ただし、 $\log s$  は  $s$  の自然対数であり、 $e$  は自然対数の底である。

(1)  $L(s)$  を  $s$  で表せ。

(2)  $P$  を  $x$  座標が  $\log s$  であるような  $C$  上の点とし、この点での  $C$  の接線を  $\ell$  とする。

$Q(v, w)$  を  $v < \log s$  かつ  $PQ = L(s)$  を満たす  $\ell$  上の点とすると、 $v$  と  $w$  を  $s$  で表せ。

(3) (2)において、 $s$  が 1 より大きい実数を動くとき、点  $R(-v + \log s, w)$  の軌跡を座標平面上に図示せよ。  
(2018年 北大)

入試においては  $a = 1$  として出題されることが多く、北大以外の他大学を見ても曲線の長さや面積を求める問題によく登場します。

理由としては被積分関数がシンプルになるからです。

つまり  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  において

$$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x) \quad (\text{元に戻る!})$$

となってルートがはずれてしまいます。この計算のしやすさが重宝されている理由でしょうか。

$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = f(x)$  なので、区間  $[a, b]$  において

$$\text{曲線の長さ} = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_a^b f(x) dx = \text{面積}$$

となり同じ定積分に帰着することがわかります。

### 3 カテナリーは双曲線関数の一員

カテナリーはいわゆる双曲線関数とよばれる関数です。自然対数の底  $e$  を使って定義されます。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

真ん中がカテナリーです。双曲線関数という理由はパラメーター  $t$  を用いて表された曲線

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \text{ かつ } x^2 - y^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) - (e^{2t} - 2 + e^{-2t})}{4} = 1$$

となるからです。これはまさに双曲線の方程式。この  $\cosh t$  の  $h$  は双曲線(hyperbola)の頭文字。

これが背景にある一橋大の問題です。双曲線の媒介変数表示を経験していないと厳しい問題です。

座標平面上を運動する点  $P(x, y)$  の時刻  $t$  における座標が  $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ,  $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  で与えられている。原点  $O$  と  $P$  を結ぶ線分が時刻  $t=0$  から  $t=s$  ( $s>0$ ) までに通過する部分の面積を  $s$  で表せ。  
(2019年 一橋大)

双曲線関数は三角関数と似た性質を多くもつために記号も「三角関数ベース」に作られています。  
微分なんかも

$$\begin{cases} (\sinh x)' = \cosh x \\ (\cosh x)' = \sinh x \\ (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \end{cases} \text{ となり、似ています。}$$

#### 4 カテナリー生誕



カテナリー曲線をあらわす式を最初に考案したのはヤコブ・ベルヌーイです。

(1654~1705 スイス) ベルヌーイ家は3代のうち8人の数学者を生んでいます。数多すぎです。

最速降下曲線がサイクロイドであることをつきとめたのがヤコブとヨハンの兄弟。ただこの時期に他の数学者もこれに気づいていたようで、その中の一人であるニュートンは、何と一夜にして「それはサイクロイドだ」と解答を作ったといわれています。ニュートンはやはりすごいですね。

ヤコブが発展させたカテナリーの理論は、上下逆向きにした形状にするとバランスがとれて力学的に安定するため吊り橋や高圧送電線などに応用されています。

右は山口県岩国市にある錦帯橋 (きんたいきょう) です。錦川に架橋された木造のアーチ橋で、日本三名橋に数えられており、名勝に指定されています。



## 5 日常のカテナリー ～カテナリーがいっぱいナリ～



校舎の前で撮影。

よく見るとこんなにたくさんあったのか。鎖のみを撮影している変なやつがいるぞと通報されぬよう気をつけてパシャリ。撮影後は何となく周囲を見て、誰もいないか確認してしまった。

高校のそばにある送電線。線自体の自重も相当なものなんだろうと推測。カテナリーを支える縦の補強線の存在がしびれる。さり気ない支えだが、設置場所等緻密な計算が施されているのだろう。



そうか、蜘蛛はやはり数学者だったのか。蜘蛛の巣は幾何学。根底にあるのはアート。2点で支えられている曲線が雨粒をも支える。

今回は、研究会に参加できず申し訳ございません。  
拙い内容で恐縮ですが、最後までお読みいただきありがとうございました。（吉田亮介）

