

数列  $\{a_n\}$   $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots$

において  $a_{800}$  の値を求めよ。

**解説**

分母が同じ分数を1つの群として、次のように分ける。

$$\frac{1}{2} \mid \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \mid \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \mid \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \mid \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots$$

第1群から第  $n$  群までの項数は  $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

よって、第800項が第  $n$  群にあるとすると  $\frac{1}{2}(n-1)n < 800 \leq \frac{1}{2}n(n+1) \dots \textcircled{1}$

よって  $(n-1)n < 1600 \leq n(n+1) \dots \textcircled{2}$

$39 \cdot 40 = 1560, 40 \cdot 41 = 1640$  であるから、 $\textcircled{2}$  を満たす自然数  $n$  は  $n = 40$

第1群から第39群までの項の総数は  $\frac{1}{2} \cdot 39 \cdot 40 = 780$

よって、第800項は第40群の  $800 - 780 = 20$  (番目) の数であるから  $\frac{20}{41}$  となる。

よくある群数列の問題です。解きなれてしまえばどうってことはないのかもしれませんが、初学者の生徒にはとても評判のよくない一題です。この解答自体を生徒目線で客観的に見ると、 $\textcircled{1}$  の不等式を「立式」することに少々ハードルの高さを感じます。その理由として以下のことが考えられます。

- (1) 求める項が第  $n$  群にあると仮定しておいて、実際は一つ手前の  $(n-1)$  群に着目するという視点を持つこと。
- (2) (些細なことではありますが) 片方にイコールが入るのはなぜなのかということ。

$$\begin{array}{ccccccc} \bigcirc \mid & \square & \bullet \mid & \rightarrow & \bigcirc < \square \leq \bullet \\ \mid \bullet & \square & \mid \bigcirc & \rightarrow & \bullet \leq \square < \bigcirc \end{array}$$

(不等式で評価するとき、場所によって等号の位置は変わりますよね。)

- (3) 不等式の自然数解となる  $n$  を代入しながら見つけることに苦労して、もはや何を求めようとしているのかよくわからなくなってしまうこと。

解答を記述することを前提にした場合、不等式で評価する方法は説得力があるので、このような模範解答になるのでしょうか、初学者には少々わかりにくく、私自身もこの解答はやや大げさすぎる感が否めません。このような「形式的な抽象化」が群数列をいやがる理由になっているように思います。数列という単元は規則を見抜き一般化すること、つまり「抽象化」が顕著となる単元です。それ故に具体化して図を作成していきます。

そこで以下のような解答はいかがでしょう。

解答

(STEP1) 第  $n$  群までの項数を求める

第 1 群から第  $n$  群までの項数は

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \dots (A) \quad \leftarrow \text{一般化はこれだけ}$$

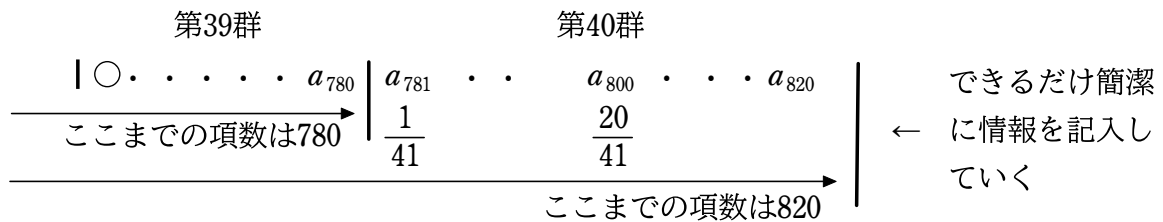
(STEP2) 800 付近の値がでてくる  $n$  を探す

(A) に  $n = 39$  を代入して  $\frac{1}{2} \cdot 39 \cdot 40 = 780$

(A) に  $n = 40$  を代入して  $\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 41 = 820$

(STEP3) 結果を視覚化する

先ほどの結果を図にしてみると



この図から、800項の値  $a_{800}$  は第40群にあることがわかるので、 $a_{800} = \frac{20}{41}$

このほうが直接的で簡潔だと思うのですがいかがでしょうか。