『型にはまらない数』

北海道浜頓別高等学校

吉　田　亮　介

1　はじめに

以前からこのテーマで授業を行ってみたいと思っていました。

「数学が苦手な高校生でも興味をもてる」ということを重要視しているため、直感的な説明にとどめている箇所も多々ありますが、学力の高低に関わらず生徒が反応する瞬間というのは、堅苦しい論理性よりもまずは直感的な刺激が与えられたときです。後はそこから生まれてくる感情をどの方向に導いていくかだと思います。教師が導く方向に関心がもてれば、その感情が、大小の差はあれど「興味」になる可能性が高まることが期待できます。

私が普段一貫して大切にしているのは、

計算し答えを求めることだけが数学ではない。数学とは血の通った文化である

という視点です。

ここ数年間、私は生徒に対し、

「結婚して自分の子どもに宿題でわからないところを質問されたらどう対応するか」

という質問をしており生徒たちに自分の対応方法を紙に書かせています。生徒たちは真剣に考えて記入してくれます。

「そんなことは学校でききな！そのために先生がいるんだから」

「・・・お母さんそれ苦手。すごく嫌いだったしね・・」

「・・・・・。(沈黙後、台所に消えてゆく)」

このような対応をされた子どもは次に困ったとき再び親の前には姿を見せないのは明白でしょう。

これでは「家庭学習の定着」などするはずもありません。知識の確実な定着を図る家庭学習が行われないという状態は学習を継続していく上で致命的なわけです。

「昔はすごく苦手だったんだよね。テストでもいい点数なんてとったこともなかったけど、算数ってすごく世の中の役に立っているってきいたことあるな。普段の生活で使っている数の話を授業できいたことがあるんだけどあれは面白かったな。嫌だと思う前にまずはできるところまで考えてごらん。じゃあ久々にお母さんも一緒にやってみようかな。教科書とノート持ってきてくれる？」

現在目の前にいる生徒たちの学力を向上させることは重要なことですが、それだけで終わらせてしまってはいけないと思います。難しい漢字、複雑な公式、記号だらけの化学反応式、関係代名詞、そのような細かいことは時間がたてば自然に忘れてしまいます。そんなことより、ほんの一部でもいいから自分が学習した頃の様々な思い出や楽しかったエピソードをその後の世代に伝えてくれること、このことを強く願って教壇に立っています。

2　授業の実施

平成１９年１月に本校１学年の生徒を対象に３時間の予定を組み授業を行いました。

以下はその内容です。

３　授業内容

（教師持参物）世界地図・日本地図

プロローグ　～芭蕉がたたずんだ空間～

「　閑かさや　岩にしみ入る　蝉の声　」

『今日はこの俳句から授業を始めたいと思うんだけど、この句は誰が詠んだものか知ってるかい？
案外こうきかれるとわかんないかな。作者はあの有名な松尾芭蕉だね。芭蕉の「奥の細道」にある一句なんだけど、これは山形県の立石寺（りっしゃくじ）という山寺で詠まれたんだ。

意味は分かるかな。これはかなり渋い句なんだけど解釈としては、静寂の中に身をおいている状況だってのは何となく漢字を見ればわかるよね。そんな静かな空間の中、苔むした岩にしみいるような細く澄んだ蝉の声がいっそう静寂感を深めるねえ、なんと趣のあることよ！　みたいなことを言ってんだけど、何となく想像できるかな。まさに**俗を離れた静寂の境地**だよな。この思想が日本の誇るべき美意識「さび」ってやつです。これほど物の本源を深く詠んだ句は芭蕉以前にも以後にもないであろうと評価する方もいるほどなんだ。

この句の中でインパクトがあるのがやっぱり「蝉の存在」だと思うんだけど、静寂な空間のなかであくまでも“そこ”に存在し、純粋に本能のおもむくままに鳴いてたんだろうな。数週間の成虫期間に太陽の下で精一杯生き、子孫を残して死んでいく姿は実に感動的だ。芭蕉はこの蝉の寿命の儚さにも着目したのかもしれないね。一点の曇りも無く人生を全うするかのような蝉の逞しさにも何か感じるものがあったのかもしれない。生物にとって絶対的に重要なのは、繁栄して後継者を残すということだね。次は同じ蝉でもこんな実例をみてみよう。』

第1章　大量発生する蝉　～想像しただけでも寒気が･･･～

『蝉は幼虫の間ずっと地面のなかで過ごし成虫になると地上に出て僅かな期間の間で子孫を残して死んでいくんだ。

ところでこの蝉のなかに１３年蝉という蝉がいるのを知っている人いるかな。
１３年に一度いっせいに地上に出てきて鳴きわめき交尾しまくるわけです。
アメリカで大量発生した１３年蝉はなんと１兆匹！急に寒気がしてくるよな。

１３年蝉

ところがこの話まだ終わらないんだ。なんと１３年蝉の他に１７年蝉というのもいて、これも１７年に一度いっせいに出没するんだ。蝉は発生年数を記憶しているのかな。

それにしてもなぜ１３年蝉だったり１７年蝉だったりするのかね。２年蝉とか６年蝉とかじゃいけないのだろうか。何か理由めいたものがあるのかな。じゃここらでこの質問からいってみますか。』

問題１　　１３年蝉と１７年蝉の存在するメリットを考えてください

（解答）

『これらの蝉が一定期間ごとに発生するのは、要するに仲間が一度に発生して子孫を残すためです。しかし、もし似たようなことを考える蝉が他にもいて、そいつらと発生時期が重なってしまうと餌も足りなくなるし、下手したら栄養不十分で子孫を残す確率が低くなるなもしれないね。つまり、一定期間ごとに大量発生するタイプの蝉は極力他の蝉とダブルブッキングしないことが繁栄の条件なんだよ。わかるかな。』

例えば、２年蝉と３年蝉と６年蝉なんてのがいたとして数字を「発生年」とすると

２年蝉	2	4	6	8	10	１２	・・	１８	・・	２４	・・	３０
３年蝉	3	6	9	１２	１５	１８	・・	２４	・・	３０		
６年蝉	6	１２	１８	２４	３０	３６	・・					

『それこそ６年ごとに（２，３，６の最小公倍数ごとに）発生してしまい、「たまたま今年はぶつかっちゃった」というならまだしも、こんな頻度でめぐり合えば生存競争も激化していくよね。６年蝉にしてみれば（６の約数である）２年蝉や３年蝉と毎年発生年が重なってしまうよな。

じゃあこの１３年蝉と１７年蝉はどうなんだろうか。次の質問をするので考えてみて。』

問題２　　１３年蝉と１７年蝉がたまたま同じ年に出会うのは現在から見て何年後ですか

（解答）

１３と１７の最小公倍数を求めれば良いので、１３×１７＝２２１年後・・・(答)

『この解答から、両者がたまたま同じ年にぶつかるのは、なんと２２１年に一度しかありません。これ位の頻度なら、蝉たちにとっても「まあ今回はしょうがねえか」感じだね。

この他者に実に対して思いやりのある２つの数１３と１７には共通した命名がされているんだけどそれは何という名前だろう。』

授業のテーマ　**「型にはまらない数」について**

第2章 素数について　～●で四角形が構成できるか～

１とその数自身以外に約数を持たない（つまり１とその数以外のどんな自然数によっても割り切れない）１より大きな自然数のこと

『これが**素数**の定義です。素数ってたったこれだけのルールしかない数なんだけど大昔から人々を魅了してきたんだ。優しそうな顔をしていて実はなかなか型にはまらないやつなんだ。ちょっとこんな問題を考えてみて欲しい。』

問題３　次の数を●を並べて四角形で表現してください

【例】６　　●●●

●●●

（1）１２　　　　　　　（2）１７　　　　　　　（3）３０

（解答）

（1）
●●●●●●
●●●●●●

●●●●
●●●●
●●●●
など

（2）
●●●●●●●●
●●●●●●●●
●

●●●●●●
●●●●●●
●●●●●

●●●●
●●●●
●●●●
●●●●●
など

（3）
●●●●●●
●●●●●●
●●●●●●
●●●●●●
●●●●●●

●●●●●●●●●●●●●●●
●●●●●●●●●●●●●●●
など

『実際にやってみて気がつくと思いますが、（2）は四角形で表現できないよね。これが「型にはまらない数」素数なんです。必ず**余りや欠落**が生じるよね。逆に（1）や（3）の三角形は縦の●の個数や横の●の個数が問題の数の約数であることに着目すれば簡単に四角形が作れます。こんな数のことを**合成数**っていうんだ。つまり１とその数自身以外に約数をもつ数のことを合成数と呼ぶんだね。そこで自然数を分類すると、奇数と偶数の分類以外に次のように書くことも可能なんだ。』

	１
自然数	合成数（１とその数自身以外に約数をもつ数）
	素数（１とその数自身以外に約数をもたない数）

『でも、合成数ってこのように分解して考えてみると

６＝２×３

１２＝２×２×３

３０＝２×３×５

各式の右辺を見て、なんか気づくことないかい。そう、**全て素数の積で表現できる**んだ。

「６」は「２」と「３」という素数から作られているし

「３０」は「２」と「３」と「５」という素数から作られているんだ。

言い方を変えると

合成数「６」は**「２と３の２つの素数に支えられて存在している」**ともいえるな。同様に

合成数「３０」は**「２と３と５の３つの素数に支えられて存在している」**と解釈できるね。

水を電気分解したら、（もうこれ以上分解できない）水素と酸素に分けられたよね。

６を水だとしたら、２や３は水素と酸素に相当するってわけだ。

このように似た構造を持っているものを結びつけると楽しいよね。じゃ、このことをまとめるよ。

合成数は（これ以上分解できない）素数の「積」で表現することができる。しかもその表現方法は、掛け算の順を入れ替えることを除けば１通りしかない。

『それとは全く正反対に１７なんてのは完全に自分の力で身を支えてるよな。一人で堂々と成立してる訳よ。やっぱり型にはまらないよね。数は無限にあるけどそれらの数を成立させているのが素数なんだ。

素数のような型にはまらないアウトローが果てしない世界を構成しているわけです。

何か興味深くないですか？恐竜の骨の化石を組み合わせて、元の姿を復元しようとする生物学者のように数学者も素数の特性に着目して複雑な数の性質を調べてきたんだ。素数が古くから重要な研究対象とされてきたのもそのためなんだよ。

じゃあ次は、やったことがある人もいるかもしれないけど、この素数を書き出す作業をやってみようか。まあよくあるとこで１００までにしますか。気合い入れて３００にする？やだよな（笑）』

第3章 エラトステネスの篩（ふるい） ～生き残るのは誰か～

『素数を書き出す便利な方法としてエラトステネスの篩というのがあります。エラトステネスは人の名前なんだ。紀元前３Ｃ頃に活躍したギリシャの学者だよ。エジプトのアレクサンドリアに開設された大研究機関で「ムセイオン」というのがあったんだけど、彼はここの館長を務めていたんだ。地理学、数学、天文学などの分野で後世に残る大きな業績を残したんだ。

この人を語る上でまず欠かせないのが、**地球の大きさを初めて測定した**ということかな。井戸に射し込む太陽の光の作る影の角度から計算したと伝えられているんだ。約４６０００ｋｍと求まったらしいんだけど実際の地球の大きさはどれくらいか知ってる？

約４００００ｋｍ

なんだよ。かなり近いね？パソコンも計算機も無い時代にこんなこと考えていた人がいたなんてすごいよな？だって古代だよ。

現代社会はＩＴが世の中を進化させているのは紛れもない事実だけど、この時代における物的不足のなかでの“人間の観察力、そこからうまれる想像力”には現代人も見習うべき点がたくさんあると思うんだ。

この頃の日本は弥生文化真っ最中で、農耕や金属器の製作が始まった頃だよ。当時のヨーロッパって驚異的だね。このエラトステネスは素数の研究もしていたんだけど、彼が開発した方法を使って素数の判定をやってみようか。まさに篩にかけるといった感じだよ。』

問題４　次の方法で１００までの素数を決定してください

エラトステネスの篩（ふるい）

（ＳＴＥＰ１）１は素数としないので除外する。
（ＳＴＥＰ２）２を残して２で割り切れるものを除外する。
（ＳＴＥＰ３）３を残して３で割り切れるものを除外する。
（ＳＴＥＰ４）５を残して５で割り切れるものを除外する。
（ＳＴＥＰ５）７を残して７で割り切れるものを除外する。
・・・という要領で進めていき残った数が素数であると考える方法。

（解答）

素数判定シート

１	２	３	４	５	６	７	８	９	１０
１１	１２	１３	１４	１５	１６	１７	１８	１９	２０
２１	２２	２３	２４	２５	２６	２７	２８	２９	３０
３１	３２	３３	３４	３５	３６	３７	３８	３９	４０
４１	４２	４３	４４	４５	４６	４７	４８	４９	５０
５１	５２	５３	５４	５５	５６	５７	５８	５９	６０
６１	６２	６３	６４	６５	６６	６７	６８	６９	７０
７１	７２	７３	７４	７５	７６	７７	７８	７９	８０
８１	８２	８３	８４	８５	８６	８７	８８	８９	９０
９１	９２	９３	９４	９５	９６	９７	９８	９９	１００

『全部で何個の素数があったかな。全部で２５個あれば正解です。できたかな。９１なんて一瞬素数かと思ってしまうよな。でも消えてしまうんだよ。９１＝７×１３だもんな。
あと、ルートを使った判定法としてこんなのもあるんだ。』

Ｎが素数かどうかを判定するには２から√Ｎまでの整数で割ればよい

『この場合は　√８１＜√９１＜√１００より、√９１＝９．何ぼの数だね。だから２から９までの数で割れるかどうか調べるんだ。そうすると７に遭遇するってわけだ。』

第4章 素数はどこまで続くのか　～無限という漆黒の闇～

『これを１０００までとすると、１６８個の素数が存在します。増えたね。じゃあもっと数を大きくしたら素数って無限にあるんだろうか？って考えるのは割と自然なことだと思わない？昔の人たちも自然にそう考えた。昔ってどれくらいかって？それじゃ彼に登場してもらうことにするか。

ユークリッド

今から約２４００年前、紀元前４世紀頃のギリシャにエウクレイデスという数学者がいました。英語名ではユークリッドといいます。この人はユークリッド幾何学というものを作り上げ後世に絶大なる影響を与えた人なんだけど、当時のプトレマイオス１世という王様がユークリッドにこんなことをきいたんだ。』

王　　　　様　「幾何学を学ぶのになんか近道はないのか。楽はできないのか？」

ユークリッド　「幾何学に王道なし（いくら王様といえども幾何学を学ぶのに楽な方法などございません。」

『いやあ、しびれるな。こんなクールな対応。
このユークリッドがこの時代にこんなことを考えていたんだ。もちろん素数のことでな。』

ユークリッドの主張 素数は無限に存在する

『彼は言い切ってしまったんだ。素数は１万より上にも、１億より上にも無数にあるってことを。でも無限に存在するってことをどうやって調べたんだろう？**無限なんだから書き出すことは不可能**だよね。でも彼はこんな画期的なアイディアで無限という闇の世界を克服したんだ。』

第5章 ユークリッドのアイディア　～古代ギリシャの古畑任三郎～

『それじゃ、ユークリッドのアイディアを紹介しよう。ゆっくり説明するからしっかりポイントを押さえてね。

この世の素数の数に限りがあるとして(要するに最大の素数が存在するとして)**話を進めていく**んだ。数に限りがあるんだから、こんなふうに書き出すことができるよな。

この世に存在する素数は、２，３，５，７，１１，１３,・・・・・・Ｐ　　　・・・①
Ｐってのは一番大きい素数とするよ。
上に書き出した数が全ての素数である、「もうこの世にはこれ以外の素数はありませんよ」と設定するんだ。さあ、ここから新しい式がひとつ登場します。**この式がユークリッドのアイディアの真髄**だよ。
ここで、①の数たちをすべて掛け合わせて１を加えた式を考えるんだ。

（２×３×５×７×１１×１３×・・・・・Ｐ）＋１　　　・・・②

このことを覚えているかな。自然数の分類だね。

	１
自然数	合成数（１とその数自身以外に約数をもつ数）
	素数（１とその数自身以外に約数をもたない数）

これによると**１以外の自然数は合成数か素数のどちらか**だよね。
じゃあ②の値はどっちだろう。ちょっと冷静に分析してみよう。ここが**このストーリーの山場**だよ。頭を集中してな。じゃ、いくよ。
もし、この②が合成数だとすると

合成数は素数の積で表現することができる

ってことは前に学習したね。これは言い方を変えると合成数ってのは必ずある素数で割りきれるって言ってもいいよな。この世に存在する素数は、２，３，５，７，１１，１３,・・・・・Ｐしかないので、②はこのなかのどれかで割り切れることになるよな。

ところが、**②は２で割っても、３で割っても、・・・Ｐで割っても余りはいつも１**だね。どの素数でも割り切れなくておかしなことになるよね。ってことは②の結論は？そうだね、**②は合成数ではない**ようだ。

じゃあ、②は素数ってことになるね。一件落着！

問題５　②が本当に素数といって良いかどうか検討してください

『どうだろう？ここでこんな質問をするぐらいだから、なんかまだ罠がありそうだな（笑）
そうなんだ、ここでまた壁にぶちあたってしまうんだよ。だって、おかしいと思わないか？もし②が素数だとすると、素数は**この世に①の種類しかなくて、最大値はＰだと設定しているのに、②はＰより大きな素数になってしまう**よな？形を見たら一目瞭然だ。①の設定に反して目茶苦茶なことが起こってしまうね。』

まとめると、こんなお話になる。

この世に存在する素数は、２，３，５，７，１１，１３,・・・・・・Ｐのみ
⇒（２×３×５×７×１１×１３×・・・・・Ｐ）＋１という新しい数を考案する
⇒これが合成数だとすると何かの素数で割れるはずなのに、割り切れない！
⇒これが素数だとすると、Ｐより大きな素数になる！
⇒おかしなことが結果としてでてくる

じゃあ、これを考えてみて。

問題６　こんな変なことが生じる原因はどこにありますか

（解答）何でもそうだが、言い出したやつが悪い。・・・（答）

『この世に存在する素数は、２，３，５，７，１１，１３,・・・・・・Ｐのみとして話を進めたところにどうやら問題があったようだね。**要するに素数が有限個しかないと設定したことで話が破綻した**のです。だからユークリッドは自信満々にその逆のことを言い放ったんだ。』

素数は無限に存在する　　となゝ。

『これが２４００年前にユークリッドが考えた証明法なんだ。②の＋１という尻尾がすごい効果をあげているのが理解できたかな。**書き出せないという無限の世界でも証拠を集めながら話を進めることで「無限という闇の世界」の構造を把握することができた**んだ。これが「**論理的に考える**」ということなんだ。

素数はすべての自然数を支えていることは前に学習したよね。これは**自然界のあらゆる物質が原子の組み合わせでできているのと似ている**。異なるのは原子の種類が約１２０種くらいしかないんだけどすべての自然数を構成する“原子”は無限にあるということなんだ。

じゃあユークリッドが教えてくれた無限の闇にはどんな素数たちがひっそりと存在し呼吸しているんだろうね。次はそんな世界をみてみるかな。』

第6章 メルセンヌ素数　～闇に潜む最大素数～


メルセンヌ

$2^{20996011}-1$　（２００３年　１２月　）
$2^{30402457}-1$　（２００５年　１２月　）
$2^{32582657}-1$　（２００６年　９月　）

『今この瞬間も世界中で最大の素数を探す競争が続いているんだ。今年９月の素数は９８０万８３５桁にもおよぶらしい・・。一億だってたったの９桁だよ。なんだかこの素数を紙に印刷すると１８００枚になるそうだ。いったい印刷してどうなるのかねえ・・。あ、もちろんこれはコンピュータで計算するよ。

世界最大の素数探求プロジェクトであるＧＩＭＰＳ（Great Internet Mersenne Prime Search）ってのがあるんだけど、このMにあたる Mersenne はフランスの僧侶だったんだ。数学や物理の研究もしていたというからすごいよな。

どうやらフランスのフェルマーやデカルト、イタリアのガリレオなんかとも交流があったみたいだ。このＧＩＭＰＳでは数１０万台のコンピュータを駆使して次のような形の素数を探求をしているんだ。これは**メルセンヌ素数**って呼ばれているよ。』

2^p-1（pは素数)の素数をメルセンヌ素数とよぶ

『また今年のうちに記録が更新されるだろうな（笑）このプロジェクトはスーパーコンピュータの性能チェックや暗号につかう巨大素数探しにうってつけになっているんだ。今インターネットなどに使われる暗号には大きな数を素数の積に分解するのは難しいという性質が利用されているんだ。キャッシュカードなんかにも適用されているよ。

そういえば、さっきでてきたフェルマーにもフェルマー素数ってのがあって、

$$F_n=2^{2^n}+1\quad(n\geqq 0)$$

という式で定義されるんだ。フェルマーはこれが素数になると信じ込んでいたようなんだ。**俺の予想は絶対に正しいと**。生きていくうえで、ときには強い思い込みも重要だ。だってそれがその人を動かすエネルギーになるんだからね。ちょっとフェルマー素数を計算してみると

$$F_0=3$$
$$F_1=5$$
$$F_2=17$$
$$F_3=257$$
$$F_4=65537$$

ここまでは計算すると素数になるんだ。ところが驚愕の事実！！

$$F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\cdot 6700417\quad\text{（なんと641で割れる！！）}$$

なんとこれが素数じゃないんだな。この驚異的な事実を示したのがスイスの天才数学者オイラーです。しかしよく６４１で割れるなんて気づくよなあ。どんな頭脳してんだろ・・・。１０分の１でいいから俺にも欲しい！（笑）

最近になってコンピュータでこれ以降の計算していくとひとつも素数がでてこないそうです。
なんだフェルマー素数なんて嘘じゃんと思うだろうけど、なんとこれが思わぬ副産物をもたらすんだな。まあこの話は別の機会に・・・。』

第7章 等差数列と素数の関係 〜同じ間隔で手をつないでいる仲間たち〜

『話を聴きっぱなしでつまらなくなってきたと思うから、ちょっとここでこんなことを考えてもらおうかな。次の表を見てください。』

問題７　この中に潜んでいる等差数列を見つけてください

素数表

２	３	５	７	１１	１３	１７	１９	２３	２９	３１
３７	４１	４３	４７	５３	５９	６１	６７	７１	７３	７９
８３	８９	９７	１０１	１０３	１０７	１０９	１１３	１２７	１３１	１３７
１３９	１４９	１５１	１５７	１６３	１６７	１７３	１７９	１８１	１９１	１９３
１９７	１９９	２１１	２２３	２２７	２２９	２３３	２３９	２４１	２５１	２５７
２６３	２６９	２７１	２７７	２８１	２８３	２９３	３０７	３１１	３１３	３１７
３３１	３３７	３４７	３４９	３５３	３５９	３６７	３７３	３７９	３８３	３８９
３９７	４０１	４０９	４１９	４２１	４３１	４３３	４３９	４４３	４４９	４５７
４６１	４６３	４６７	４７９	４８７	４９１	４９９	５０３	５０９	５２１	５２３
５４１	５４７	５５７	５６３	５６９	５７１	５７７	５８７	５９３	５９９	６０１
６０７	６１３	６１７	６１９	６３１	６４１	６４３	６４７	６５３	６５９	６６１
６７３	６７７	６８３	６９１	７０１	７０９	７１９	７２７	７３３	７３９	７４３

『ユークリッドがいったように素数は無限に存在するよね。じゃあこれをもっと大きい表で考えたらどれくらいの等差数列があるのだろうか、ということを米カリフォルニア大学のテレンス・タオ教授が解明して今年の８月に“数学界のノーベル賞”といわれるフィールズ賞を受賞したんだ。内容は難しいのでここでは触れないけど、世の中いろんなことを考える人がいるもんだね。

でもね、**ここで注目してほしいのは、解明されたのが今年だということ**です。教科書を眺めていると、数学ってもう完成された学問だって印象を受けてしまいそうだけど**全然違う**んだ。**まだまだ未解決の問題がある**んだよ。発展していく余地が十分にあるんだ。このことは心に留めておいてほしい。
じゃあ、次は差が２であるこんな素数のカップルについてみてみることにしよう。』

第8章 双子素数について　～どこまで双子が生まれるのか？逆少子化現象～

双子素数とは差が２の二つの素数の組のことである

『次は双子素数というのを紹介するよ。意味は上にある通りなんだ。言い方を変えたら、最も数が近い素数の組のこと。ただし差が１である２と３の組は除いて考えるんだ。』

問題８　素数表を用いて双子素数を探してください

（解答）（３，５）（５，７）（１１，１３）（１７，１９）（２９，３１）（４１，４３）（５９，６１）
（７１，７３）（１０１，１０３）（１０７，１０９）（１３７，１３９）（１４９，１５１）
（１７９，１８１）（１９１，１９３）（１９７，１９９）（２２７，２２９）（２３９，２４１）
・・・・以下略。

『素数が無限に存在することはユークリッドが結論をだしたよな。紀元前の話です。これとは裏腹に双子素数が無限に存在するかという問題は長年手に負えない問題だったんだ。

多くの数学者は双子素数は無限に存在すると予想しているにもかかわらず

２００７年現在未だに数学上の未解決問題

として残されているんだ。

２００５年９月に発見された双子素数は

$$16,869,987,339,975 \cdot 2^{171960} \pm 1$$

なんと・・・５１７７９桁の数だそうですよ。凄すぎ・・・。

いくら少子化だからといって、こんな凄まじい数の双子が生まれたら別の意味で国が崩壊するよね。世の中双子だらけ（笑）

そういえば、２００６年１２月２１日の道新の一面記事に

２０５５年出生率（一人の女性が生涯に産む子供数の推定値）は１．２６
日本の人口は８９９３万人　（ちなみに現在は１億２７５０万人、こんなに減るの？）
平均寿命は男性８３．６７歳　（２００５年は７８．５３歳　ついに８０歳に突入）
女性９０．３４歳　（２００５年は８５．４９歳　やっぱり医学の力は偉大だ）
高齢者（６５歳以上）４１％（ちなみに俺は生きてれば８２歳、たぶん力尽きてるか・・）
子供　（１４歳以下）　８％（なんだ？消費税に毛の生えたようなもんじゃないか)」

だってさ。この数字見てみんなはどう思う？俺は恐怖すら感じたよ。

いつかこの出生率についても授業でやってみたいね。数学Ｂの数列という分野に関連性があるんだ。

第9章 偶数の和について　～仕組まれたかのようなシナリオ～

問題９　６以上の偶数はふたつの奇数の素数を用いて和の形で表すことができます。それでは２０までの偶数について調べてみてください

【例】６＝３＋３

（解答）８＝５＋３　　１０＝５＋５＝７＋３　　１２＝７＋５　　１４＝７＋７＝１１＋３
１６＝３＋１３＝５＋１１　　１８＝５＋１３＝７＋１１　　２０＝３＋１７

『これも不思議な事実だよな。偶数が２つの奇素数の和で表現できる。確かに奇数＋奇数＝偶数だけど何とも奇妙というか、素数って不思議すぎるよな。今度は足し算をしていくと見事に表現できちゃうんだ。え？この先のもっと大きな偶数についてはどうなるかって・・・？実はこれも

２００７年現在未だに数学上の未解決問題

なんだよ。

これは**ゴールドバッハの予想と命名されている問題**で、２００４年の段階で２×（１０の１７乗）までの全ての偶数について成り立つことがコンピュータによって検証されているんだ。もはや主役はコンピュータになってるんだね。

多くの数学者はこの予想が正しい（つまり偶数が大きければ大きいほど２つの素数の和で表されるのは、より“ありえそうだ”ということ）と思ってるんだけど、

数学で大切になるのは２×（１０の１７乗）まで分かっていたとしてもユークリッドのような無限を相手にした証明ができなければ「だからどうだっていうんだい？この先の偶数については何も説明してないじゃない。」ってなっちゃうんだ。**数学はこういう点をものすごく大事にする学問なんだ。一点の曇りも許さないんだね。**

頑張って数学を勉強してこの中の誰かがこれらの未解決問題を解決したら間違いなく世界の英雄になれるよ。ここで重要なお願いがひとつあります。

もしこの中の誰かが解明してどこかの国で表彰されるときは、「高校時代の恩師～双子素数予想問題またはゴールドバッハ予想問題の話題提供者～」として俺を呼んでください。“世界の〇〇を育てた吉田”みたいな顔をしてシャンパン飲みに行くから（笑）』

第10章　底なしの難問　～砂漠のオアシスを求めて～

『突然だけど２００３年に出版された「博士の愛した数式」っていう小説を知ってるかな。
作者は小川洋子さんという女性なんだ。

第１回本屋大賞（出版業界の活性化のため有志書店員が中心となって立ち上げた文学賞で、書店員自身が読んで一番お客さまに薦めたい本を投票によって選考するもの）を受賞し、２００５年には文庫化されるんだけど、新潮文庫では史上最速の２ヶ月で１００万部を突破したんだ。（ちなみに第２回本屋大賞は恩田陸の「夜のピクニック」これも面白い！）

そんなことも影響してかこの作品は、２００６年には映画化までされたよ。

交通事故による脳の損傷で記憶が８０分しか持続しなくなってしまった元数学者の「博士」と博士の家政婦である「私」とその息子「ルート」の心の触れ合いを、美しい数式とともに描いた作品なんだ。

そのなかにこんな会話が登場します。』

博　士「１００をすぎて１万、１００万、１０００万と大きくなると素数が全然でてこない砂漠地帯に迷い込んでしまうこともあるんだよ」

ルート「砂漠？」

博　士「ああ、行けども行けども素数の姿は見えてこない。見渡す限り砂の海なんだ。太陽は容赦な

く照りつけ、喉はカラカラ、目はかすんで朦朧としている。あっ、素数だ、と思って駆け寄ってみると、ただの蜃気楼。手を伸ばしても、つかめるのは熱風だけだ。それでもあきらめずに一歩一歩進んでゆく。地平線の向こうに、すんだ水をたたえた、素数というオアシスが見えてくるまで、あきらめずにね。」

『実はこれが**底なしの難問である素数分布**ってやつなんだ。**ある大きさの数までに素数がいくつあるかということを考える**のが素数分布の問題です。問題自体としては非常に素朴なんだ。
１０までには４個。１００までには２５個。１０００までには１６８個ある。数が大きくなるにつれて現れる頻度はどんどん下がるんだけど、１００万個連続して素数が出現しない“砂漠地帯”もあるんだ。
そこで、これを数式化できないか（要するに規則を解明できないか）と思考した数学者がいるんだ。


ガウス

彼の名はガウス（ドイツの数学者、天文学者、物理学者）。ガウスの研究は広範囲に及んでいて、近代数学のほとんどの分野に影響を与えたと評価されているんだ。今はユーロ紙幣になってるけどその前までは彼の肖像が１０マルク紙幣に印刷されてたんだよ。お金だよ。すごいよな。まあこの人の業績はあげればきりがないんだけど、有名なエピソードとしていくつか紹介すると、

（エピソード１）
小学校時代１から１００までの数字をすべて足すように先生から課題をだされて
それを１＋１００＝１０１、２＋９９＝１０１、３＋９８＝１０１・・・となるので、答えは１０１×５０＝５０５０だと即答した。（先生はもうこの子に教えることは何もないと言及）

（エピソード２）
１８歳の３月３０日朝、寝起きざまにコンパスと定規のみで正１７角形の作図ができることを証明。（これは前述のフェルマー素数と関係を持つ。ガウスは神学の道に進もうか、数学の道に進もうか迷っていたが、この定理の発見で数学の道に進むことを決意した。）

『こんなのは業績のなかのほんのほんの一部です。彼はこう言っているからね。“僕は言葉を話すようになる前から計算をしていた”とね。そして、今のテーマに関係するエピソードがこれなんだ。

（エピソード３）
１５歳のとき、一日１５分ずつ予備の時間をあてて１０００個ずつの自然数にそれぞれいくつの素数が現れるか調べ、次第に減っていく様子から約１００年後に証明されることになる素数定理を予想した。

彼のノートの切れ端には１０００までの素数、１００００までの素数が実際に書かれていて、この素数の分布についてこんな式を考えたんだ。』

素数定理

$$\pi(x) \fallingdotseq \frac{x}{\log x} \qquad (\pi(x)\text{は1から}x\text{までの素数の個数})$$

『この分母にあるのは対数とよばれるもので、数学Ⅱで学習します。今はへえ～という感覚で見てくれるだけで十分だから。この対数は天文学の計算をすることに利用されていたんだけど、他には酸とアルカリの尺度であるＰＨ、地震のマグニチュード、音の大きさを表すｄＢ（デシベル）、音楽の音階などいろんなところに使われているんだ。詳しい話は対数を学習するときに・・。そのときになったらわかるけど、どうして対数なんてものを使ってこの素数定理を発想できるんだろうって思うよ。ガウスって何者なんだってね。

話を素数にもどそう。早速これを計算してみるよ』

$$\pi(100) \fallingdotseq \frac{100}{\log 100} = 21.71 \qquad (\text{実際の個数25の86\%に相当する})$$

$$\pi(1000) \fallingdotseq \frac{1000}{\log 1000} = 144.8 \qquad (\text{実際の個数168の86\%に相当する})$$

$$\pi(10000) \fallingdotseq \frac{10000}{\log 10000} = 1085.7 \qquad (\text{実際の個数1229の88\%に相当する})$$

$$\pi(100000) \fallingdotseq \frac{100000}{\log 100000} = 8685.9 \qquad (\text{実際の個数9592の90\%に相当する})$$

$$\pi(1000000) \fallingdotseq \frac{1000000}{\log 1000000} = 72382.4 \qquad (\text{実際の個数78498の92\%に相当する})$$

『例えば、真ん中の１００００を代入した結果１０８５．７は
１から１万までの間に存在する素数の個数はだいたい１０８５～１０８６個くらいだなと解釈できる訳です。ユークリッドが示した無限に存在する素数を相手に真っ向から戦いを挑んだガウス。この複雑怪奇な敵の出現回数を一本の数式で表現したんだ。全てを統制しようとする数式の持つパワーを感じないかな。すごく美しいし、まさに驚異的だよね。

数式はそれだけ見たら無味乾燥なものだけど、さまざまな個人的な苦悩、感情、エネルギーを内包している作品なんだ。

素数定理のすごさは（　）に入れる数字が大きくなればなるほど、求められる値が実際の個数に限りなく合致する点にあるといわれているんだ。すごいよね。対数を勉強しても俺にはこんな式逆立ちしてもでてこないよ。（笑）あと素数定理の右辺は数学Ⅲ（微分積分学）を学習するとグラフをかくことができるよ。最後に、興味がある人は博士の愛した数式をぜひ読んでみてください。完全数なんて面白い数も登場するから。』

エピローグ　～日本人と素数～

『ここまでお疲れ様。いよいよ最終章ですがラストは日本人と素数の関係について考えてみるよ。

日本には数字の使われている行事として「七五三（子どもの健やかな成長を願って氏神に参拝する関東がルーツの行事)」があるよね。この７、５、３って前に学習した同じ間隔で手をつないでいる素数たちだよね。

特別な風習として３月３日（ひな祭り）、５月５日（端午の節句）７月７日（七夕）みんな素数だ。

中国から伝わった思想で「陰陽説」というのがあるんだ。世界は陰と陽の対立からできており、お互いに消長を繰り返して発展が続くというものなんだけど、この思想が数字にも適用され「奇数は陽の数」「偶数は陰の数」と考え、この陰陽の本源が合体して森羅万象が作られるとするんだ。まあ、あまり深入りはしないよ。

日本人は歴史的に**奇数＝陽の数の崇拝をしており**、それが心に根付いたまま受け継がれているのではないかという分析もされている。確かに上に例としてあげたものは全て奇数＝陽の数で構成されてるよね。おまけに一桁の素数でもあるんだ。

短歌の５，７，５，７，７や俳句の５，７，５も全て素数。

おまけに５＋７＋５＋７＋７＝３１、５＋７＋５＝１７となり結果も素数。

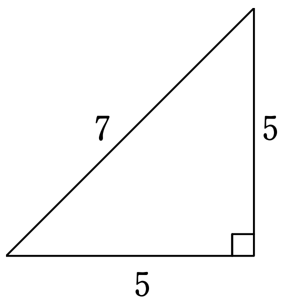
なんか不思議だね。

話は変わるけど直角三角形の辺にはこんな関係があったよね。１：１：√２ってやつ。これは白銀比（**silver ratio**）と呼ばれているんだ。

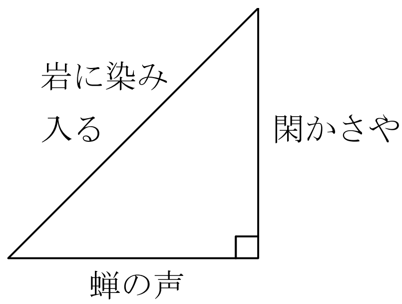
Ａ４の用紙はこの関係が背景にあって縦の比：横の比＝１：√２にもなってるんだよ。

さっきの１：１：√２を５倍してみると５：５：５√２（５√２≒５×１．４＝７）だね。

書き直すと５：５：７だね。この数字に何かに気づかないかい。



この辺の長さを「平仮名の個数」にしてみると右図のようになる



こうすると辺の長さが素数になり、なんと芭蕉の俳句が対応するんだ。

アインシュタインの言葉にこんなのがあるんだよ。

「この世の中に無限のものは２つある。ひとつは宇宙、もうひとつは人間の愚かさである」

確かに考えさせられる言葉だ。アインシュタインの意を汲みつつどうだろうこんなのは。

「この世の中に無限のものはどれだけあるのかわからないが、ひとつは宇宙の広さ、もうひとつは人間の愚かさ、そしてもうひとつは漆黒の闇で呼吸をし、人間に挑み続けている素数たちである」と。』

参考文献

１　今　栄蔵　「新潮日本古典集成　芭蕉句集」（新潮社）
２　藤原正彦　小川洋子　「世にも美しい数学入門」（ちくまプリマー新書）
３　全国歴史教育研究協議会「世界史Ｂ用語集」（山川出版社）
４　全国歴史教育研究協議会「日本史Ｂ用語集」（山川出版社）
５　現代社会教科書研究会　「現代社会用語集」（山川出版社）
６　桜井　進　「雪月花の数学」（祥伝社）
７　吉永良正　「新装版　数学・まだこんなことがわからない」（講談社）
８　日本経済新聞　「サイエンス　今どきの数学　上」（２００６年１１月２６日）
９　北海道新聞　「２０５５年の出生率」（２００６年１２月２１日）
１０　小川洋子　「博士の愛した数式」（新潮社）
１１　吉田　創～２歳の息子が歌にあわせて１０までの数を覚えている最中なのですが、数を覚えていく過程、数を受け入れていく感性にも影響をうけました。