

[2008佐賀大]

- (1) 鋭角三角形 ABC の外接円の半径を R とし、頂点 A, B, C に向かい合う辺の長さを a, b, c とおく。このとき、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ を証明せよ。
- (2) $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ を内角にもつ三角形を利用して、 $\sin 75^\circ$ の値を求めよ。

解答 (1) 略 (2) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

何とこれは正弦定理の証明ではないか!! (1)は佐賀に集結した全ての受験生がビビったことだろう。(1)で定理を証明して、(2)では正弦定理を使って $\sin 75^\circ$ の値を求めさせるという流れ。(1)の証明ができなくて、(2)を解きにいった受験生も結構いたんじゃないか。どうなんだろう?この問題はインパクトあり。

[2008埼玉大]

- (1) 正弦に関する加法定理を用いて、

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 三角形 ABC の頂点 A, B, C の内角の大きさをそれぞれ A, B, C で表すことにする。 $A = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $\sin B + \sin C$ および $\cos B + \cos C$ 、それぞれの範囲を求めよ。

解答 (1) 略 (2) $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin B + \sin C \leq \sqrt{3}$, $\frac{1}{2} < \cos B + \cos C \leq 1$

この年埼玉では、和→積の公式の証明。(2)は $A = \frac{\pi}{3}$ と固定しておいて、(1)の結果を使わせる流れ。冒頭部の「正弦に関する加法定理を用いて」というさりげない誘導にも配慮がとても感じられる。

[2007東京大]

正の整数の下2桁(けた)とは、100の位以上を無視した数をいう。例えば2000、12345の下2桁はそれぞれ0、45である。 m が正の整数全体を動くとき、 $5m^4$ の下2桁として現れる数をすべて求めよ。

解答 0, 5, 25, 80

タイトル通りユニークな問題というわけではないが、これは面白かった。 $5m^2$ の5が何とも絶妙。受験生の「考える力」を問うには整数はもってこいだろう。さすが東大、問題設定に気品すら漂う。

[2008広島大]

1本 80 円のシャープペンシルと 1本 50 円のボールペンと 1本 20 円の鉛筆をちょうど750 円分買うものとする。シャープペンシルとボールペンと鉛筆の本数の合計を n 本とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) n が 3 の倍数になることを証明せよ。
- (2) $n = 12$ となるようなシャープペンシルとボールペンと鉛筆の本数の組をすべて求めよ。

解答 (1) 略

- (2) (シャープペンシル, ボールペン, 鉛筆) = (5, 7, 0), (6, 5, 1), (7, 3, 2),
(8, 1, 3)

一瞬高校入試のようなシチュエーションだが、連立方程式から整数解を絞り込む問題に帰着。受験生はきちんと解答を作れたらどうか。

[2007京都大]

1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

解答 277 通り

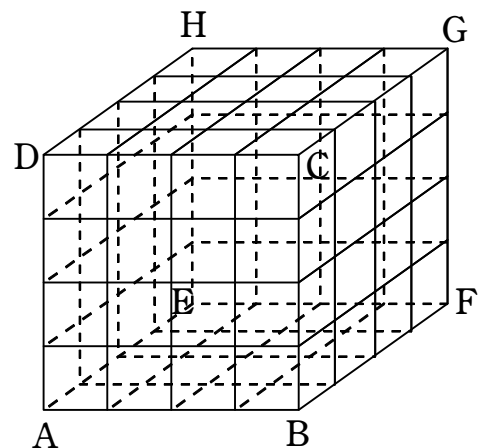
昔はよくやった「一段飛ばし」が数学の問題になるとこんなに難しくなるのか。一段飛ばしを連続してはいけない。実際にやったらかなりバランスを崩しそう....。

ということは1段ずつ登る間（スキマ）に2段を挿入すればよい。なるほど、立派な場合の数の問題だ。

[2008徳島大]

立方体 ABCD EFGH のすべての面に、辺も含めて縦横 5 本の線分を等間隔に引き、格子状の道を作る。これらの道を通して、立方体の表面を点 A から点 G へ行く最短の道筋について、次の問いに答えよ。

- (1) 点 C を通る道筋は何通りか。
- (2) 辺 BC 上の少なくとも 1 点を通る道筋は何通りか。
- (3) 2 辺 BC, CD 上の少なくとも 1 点を通る道筋は何通りか。
- (4) すべての道筋は何通りか。



解答 (1) 70 通り (2) 495 通り (3) 920 通り (4) 2550 通り

立体の最短経路の問題。展開図をかき、立体から平面に帰着して考えると知っている公式を使える。個人的にはすごく好きな問題。