

多項式 $P(x)$ を $x-1, x+2$ で割った余りがそれぞれ $5, -1$ である。 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ。
(数研出版 新編 数学 応用例題2 P45)

典型的な剰余を求める問題です。

教科書では、商を $Q(x)$ 、余りを $ax+b$ とし $P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$ に $x=1, -2$ を代入して a と b を求めるという解答を与えています。ここではさらに $ax+b$ を $x-1$ で割った式を $P(x)$ の剰余項として設定する解答を提示します。

解答

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とし、余りを次のように表現する。

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+a(x-1)+5 \quad \dots \textcircled{1}$$

①に $x=-2$ を代入すると、 $P(-2)=-3a+5=-1$ ($\because P(-2)=-1$) より $a=2$ となるので、余りは $2(x-1)+5=2x+3$ □

参考 もちろん、 $P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+a(x+2)-1$ に $x=1$ を代入してもよい。

多項式 $f(x)$ は $x-1$ で割ると余りは 2 、 x^3+1 で割ると余りは $(x-1)^2$ であるという。 $f(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ。
(芝浦工大)

割る式は2次式より、剰余項 $ax+b$ をさらに $x-1$ で割った式を設定します。

解答

$f(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q_1(x)$ とし、余りを次のように表現する。

$$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+a(x-1)+2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ を x^3+1 で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると、

$$f(x)=(x^3+1)Q_2(x)+(x-1)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②に $x=-1$ を代入すると、 $a(-1-1)+2=(-1-1)^2$ より $a=-1$ となる。これを①の剰余項に代入して $-(x-1)+2=-x+3$ □

多項式 $P(x)$ は $x-1, x+1, x+2$ で割ったとき、余りがそれぞれ9, 1, 3である。 $P(x)$ を $(x-1)(x+1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。(早稲田大)

次の3次式で割る問題では、剰余項を ax^2+bx+c とおく立式が一般的かと思われませんが、この剰余をさらに $x-1$ で割った式を剰余項として設定します。

解答

$P(x)$ を $(x-1)(x+1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とし、余りを次のように表現する。

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)Q(x) + \{ax + (a+b)\}(x-1) + 9 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ に $x = -1$ を代入すると、 $P(-1) = (-a + a + b)(-2) + 9 = 1$ ($P(-1) = 1$) より $b = 4$ $\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ に $x = -2$ を代入すると、 $P(-2) = (-2a + a + b)(-3) + 9 = 3$ ($P(-2) = 3$) より $-a + b = 2$ $\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ より $a = 2$ なので、余りは $(2x + 2 + 4)(x-1) + 9 = 2x^2 + 4x + 3$ □

参考 剰余項をこのように設定することで、連立3元1次方程式に持ち込まない流れを得ます。

多項式 $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $8x-2$ 、 $(x-2)^2$ で割ったときの余りは $3x+11$ である。
 $f(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ。(西日本工大)

解答

$f(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とし、余りを次のように表現する。

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)Q_1(x) + a(x-1)^2 + 8x - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると、

$$f(x) = (x-2)^2Q_2(x) + 3x + 11 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ に $x = 2$ を代入すると、 $a(2-1)^2 + 8 \cdot 2 - 2 = 3 \cdot 2 + 11$ より $a = 3$ となる。

これを $\textcircled{1}$ の剰余項に代入して、 $3(x-1)^2 + 8x - 2 = 3x^2 + 2x + 1$ □

このように剰余項の未知数を減らす設定をすることで、(若干かもしれませんが)計算が簡素になるかと思われます。

(参考文献)

1. 新編 数学 (数研出版)
2. 宮原 繁 モノグラフ 『式の計算』 (科学新興新社)