

## 数学教育の多様性と共通性

北海道函館西高等学校 安房節雄

### 1 はじめに

平成21年3月に新学習指導要領が公示され、高等学校数学においては、平成24年度入学生から先行実施されている。

平成20年1月に示された中教審答申での改善の基本方針として示されているキーワードを列挙してみよう。

- ・ 数学的活動
- ・ 数学的な思考力・表現力
- ・ 学ぶ意欲
- ・ 数量や図形の系統性と反復によるカリキュラム
- ・ 数学的思考力・表現力
- ・ 知的コミュニケーション
- ・ 言葉や数、式、図、表、グラフの相互の関連
- ・ 言語活動・体験活動

一見して、今次の改訂では、理数教育の重視を重視するとともに、多様な方法により、表現やコミュニケーションができる子どもを育てることに力点が置かれている。

教科書に示されている数学的な事象についての指導について言及する。

### 2 数学的な見方や考え方

#### (1) 「数学的な見方や考え方」の定義

「数学的な見方や考え方」は、学習評価の根幹をなすものである。学習指導要領解説では、『数学的な見方や考え方のよさなどの数学のよさを認識させ、将来の学習や生活に数学を積極的に活用できるようにするとともに、知的好奇心、豊かな感性、健全な批判力、直感力、洞察力、論理的な思考力、根気強く考え続ける力などの創造性の基礎を養うことや、根拠に基づき自分で判断する力を育成することが特に大切である。』（下線部筆者）としており、教育現場に難しい課題を投げかけている。

特に下線部については、まさしく数学教育の多様性に対する期待が示されており、現場サイドからの研究に期待するところである。

#### (2) 「数学的な見方や考え方」と学ぶ意義の3つの側面

数学の授業で生徒から聞こえてきそうな第1声・・・

生徒A 数学を何故勉強するのか。

この問いに対して、先生はどう答えるか。

先生 これを理解ししておかないといひ大学には入れないぞ。分からない人は結果を覚えなさい。

・・・ここであまく納得させられないと、ずーっと生徒と気まずくなる・・・

この問いにどう答えるかは三つの側面があります。

こんな話はどうでしょうか。

側面1 未知なるものの追求

○ 数学はこれまでいろいろな人が、創り上げてきました。例えば、5次以上の方程式の解がないことを証明したガロアとアーベルがいます。

ガロアは最後に決闘に敗れて死ぬ。アーベルは、貧困と結核とによって、27年にも満たない生涯を終える。この人達は数学を何故学ぶのかと聞いたらみんなどう答えると思いますか。

きっと未知なるものを追求したいからと答えるのではないのでしょうか。

側面2 数学は役に立つか。

○ 建築、電気・電子技術、物理学などの発展に貢献しています。数学を学ぶのは、生活に役立っているのです。

側面3 思考力・表現力を身につける。

- 数学は、筋道を立てて考える論理的思考力や様々なアイデアを見いだす推論能力、事象を数式やグラフ等を使ってわかりやすく説明する表現力の力が身につきます。

(3) 「数学的な見方や考え方」についての例示

<ポリア 帰納と類比 昭和34年 丸善出版>

ア 暗示的接触

$$3 + 7 = 10 \quad 10 = 3 + 7 = 5 + 5$$

・・・「4より大きな任意の偶数は2つの奇数の素数の和である。」

イ 帰納的な考え方

F : 多面体の面の数      V : 頂点の数      E : 辺の数

多面体	F	V	E
立方体	6	8	12
三角柱	5	6	9
五角柱	7	10	15
四角錐	5	5	8
三角錐	4	4	6

$F + V = E - ?$       証明は？

ウ 一般化

$$1 + 2 + 3 = 6 = 3(1 + 3) / 2 \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4(1 + 4) / 2$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1) / 2$$

エ 特殊化

上記イについて  $n = 10$  のとき、 $100$  のとき、 $1000$  のときの結果を比べてみる。

オ 類比

$$a + b = b + a \quad \text{と} \quad ab = ba$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{と} \quad (ab)c = a(bc)$$

この例示は逆の算法を含め意味をもつ。足し算とかけ算は親戚だ！ .....

<片桐重男 数学の方法に関係した数学的な考え方>

① 帰納的な考え方

$x^n$  の微分公式を考える     $x$      $x^2$      $x^3$  から考える。

② 演繹的な考え方

実数の交換、結合、分配律から1次方程式を解く。

③ 発展的な考え方

順列の考え方から円順列、数珠順列へと導く。

④ 単純化の考え方

複雑な立体図形を投影法により図を描いてみる。

⑤ 特殊化の考え方

軌跡の問題で端点の状況を調べてみる。

⑥ 類推的な考え方

例題を参考にして他の問題を解く。

⑦ 統合的な考え方

指数法則を自然数から実数へ拡張する。

⑧ 抽象化の考え方

相加・相乗平均の性質を不等式の性質として捉える。

⑨ 一般化の考え方

相加・相乗平均の性質をn個の場合に拡張する。

⑩ 記号化の考え方

未知数を定め問題を解決する。

(4) 「数学的な考え方」の層

学習指導要領では、「数学的な考え方」ではなく「数学的な見方や考え方」としており、上記(2)に示したものの以外にも多くの研究成果がある。

富山県総合教育センターの森田正範氏は、「数学的な見方や考え方」が問題解決の過程で3つの層があるとしている。

① 第1層 ……問題把握の段階

特殊化 具体化  
記号化 数量化 図形化

② 第2層 ……問題解決の第1段階

演繹的 帰納的  
類推－発展的 類推－統合的

③ 第3層 ……問題解決の第2段階

特殊化 具体化 一般化  
統合的 抽象化

一つの单元の中で①～③の各層を想起すれば、授業づくりのイメージができあがる。

3 授業づくりをどう進めるか。

次にこの「数学的な見方・考え方」を生かす授業づくりについて言及する。

(1) 中学校、高等学校における実態

「マークシート方式の試験に対して、それを効率よく教え込む数学」、「数学は暗記だ」する見解があるなど、高等学校の数学教育は大学入試に左右される現実は否めない。

一方、大学教員から見た高校教育については、「自ら考える力」や「論理的思考力」などが乏しいとの見解がある。

このことについて、神奈川県立総合教育センターが2009年に実施したアンケート調査結果は興味深い。

質 問 項 目		中学校	高等学校
授 業	教師が説明し、生徒は黙ってノートを取る。	27%	37%
	教師は講義形式だが生徒は自由に質問できる	67%	62%
	グループや班での学習が主体	5%	1%
	その他	1%	0%
演 習	生徒が板書と説明をし、他の生徒の質問に答えたり議論できる形式	16%	8%
	生徒が板書と説明をし後は教師主導の形式	18%	16%
	生徒が板書だけし、後は教師主導の形式	59%	68%
	その他	0%	8%

(2) 総合してどんな能力を身につけさせるか。

「高等学校学習指導要領第5款の5の(1)」には、「各教科・科目等の指導に当たっては、生徒の思考力、判断力、表現力を育む観点から、基礎的・基本的な知識及び技能の活用を図る学習活動を重視するとともに、言語に対する関心や理解を深め言語

に関する能力の育成を図る上で必要な言語環境を整え、生徒の言語活動を充実すること。」としている。

数学教育を通して身につけさせたい能力には次の7点が挙げられる。

- ① 読解力（文章を読んで正しく理解する力）
- ② 聞く力（相手の表現を聞いて理解する力）
- ③ 話す力（相手に理解してもらうよう正しく伝える力）
- ④ 分析力（筋道を立てて考える力）
- ⑤ 論証力（答案を数学的に表現する力）
- ⑥ 記号処理能力（数学の記号を正しく使う力）
- ⑦ 図表化力（グラフや表で表現する力）

この7つの力を適宜使い分け、前述した「数学的な見方・考え方」をそれぞれの数学的な事象とのベストマッチングができれば、数学を好きになる生徒が増えるであろう。

#### 4 数学教育の多様性で目指すもの

数学教育の多様性について、複数の視点から言及を試みた。次の視点が重要である。

- 生徒の頭の中でどのような数学が行われているかを見つめよう。
- 教材研究を複眼的な視点から行おう。
- 人類の数学の発展の中で、その教材の数学的意義を明らかにしよう。
- 指導目標に対する形成的評価を適切に実施しよう。
- ものの感じ方は人によって異なることを理解し、生徒の発言に寛容になろう。
- 数学的なモデルをつくってみよう
- 手作り教材を作成してみよう。
- 手を変え品を変え様々な方法で授業の流れをつくろう。

数実研の会員の御意見をいただければ幸いです。

#### 5 数学教育の共通性

数学教育の共通性の論議は、学校教育法に根拠をおく、高等学校学習指導要領の具現化を目指すという意味である。

どのような構造になっているか、改めて考察を試みようと思う。

##### (1) 高等学校学習指導要領の普通教科「数学」の目標

『「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。』

短い文章に数学教育の目指すものが端的に示されており、策定者の苦勞が窺われる。次の六つの部分に分けることができる。

- ① 数学的活動を通して
- ② 数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め（知識・理解）
- ③ 事象を数学的に考察し表現する能力を高め  
(数学的な思考力・表現力、表現・処理)
- ④ 創造性の基礎を培う
- ⑤ 数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。  
(関心・意欲・態度)

・・・下線部は今回の改定で変わった部分・・・

「① 数学的活動を通して」は以下の②から⑥まですべてに係っていくことに留意す

る必要がある。

(2) 「高等学校生徒指導要録」の評価の観点及びその趣旨

見解の相違はあり得るとい認識の下、学習指導要領の教科「数学」の目標との関係を○数字で示してみた。

< 関心・意欲・態度 >

数学的活動を通して、数学の論理や体系に関心をもつとともに、数学的な見方や考え方の良さを認識し、それらの事象の考察に積極的に活用しようとする。

・・・①④⑤

< 数学的な見方や考え方 >

数学的活動を通して、数学的な見方や考え方を身に付け、事象を数学的にとらえ、論理的に考えるとともに思考の過程を振り返り多面的・発展的に考える。

・・・①③④

< 表現・処理 >

事象を数学的に考察し、表現し処理する仕方や推論の方法を身に付け、より良く問題を解決する。

・・・③④

< 知識・理解 >

数学における基本的な概念、原理・法則、用語・記号などを理解し、知識を身に付けている。

・・・②

教科「数学」の目標に対して、必ずしも単一の項目が呼応していないことに留意する必要がある。

これは、教科「数学」の目標設定の経緯と指導要録の「評価の観点」の設定の経緯が異なる時間軸で論議が進められていることによるものと推察できる。

なお、上記観点は、文部科学省の準則によるものであり、指導要録については教育委員会が定めるものであることにも留意する必要がある。

## 6 多様性と共通性の観点からの授業実践例

授業を創っていくには、まずその科目の目標の吟味が必要である。数学Ⅰを例にとって考えることにする。

(1) 「数学Ⅰ」の目標

「数学Ⅰ」の目標を改めて上記評価の4観点に基づき、文章を整理してみよう。

- ① 数と式、図形と計量、二次関数、データの分析について理解させ (知識・理解)
- ② 基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り (表現・処理)
- ③ 事象を数学的に考察する能力を培い (数学的な見方や考え方)
- ④ 数学のよさを認識できるようにするとともに、それらを活用する態度を育てる。 (関心・意欲・態度)

(2) 各単元毎の実践例

4観点による評価を意識した授業のアイデアを考えてみたい。次の事例について、御意見をいただきたい。

ア 数と式

< ねらい >

数を実数まで拡張する意義や集合と命題に関する基本的な概念を理解できるようにする。式を多面的にみたり処理したりするとともに、一次不等式を事象の考察に活用できるようにする。

事例1 実数の存在

東京書籍の教科書には、単元の扉にピタゴラスについての記載がある。ピタゴラス学派の人たちが $\sqrt{2}$ が無理数であることを最初に証明したのは興味深い。有理数、無理数、

実数等のイメージづくりをより具体例を提示し、意味づけをしたい。

・・・何となくそうかなあーとにならないようにしたい。

#### 事例2 無理数と根号計算、絶対値

分母の有理化、絶対値となる意味を理解できる生徒が少なくなる。その理由は、初めてである単項演算であることによるからであろう。単項演算の他の例としては、整数部分、小数部分を求める計算も同様である。

いろいろな演算があること、定義にもとづいて考えることなど、数学の学び方を中学校の暗記型から脱却させるようにしたい。

#### 事例3 多重根号

二重根号は、通常はずすことはできないことから出発したい。多重根号があることも、 $x^2 = 2$   $x^2 = 2 + \sqrt{2}$  ・・・いくらでもつくれることからわかる。

#### 事例4 不等式

ツリーを使って、半順序の話をしてみたい。

連立不等式で、「かつ」なのか「または」なのかも考えさせたい。

$a > b$  ・・・  $a = 0$  の場合等について考察させてみたい。

・・・解があるのかないのか。

「不等式・・・」と、「一次不等式・・・」とでは、意味が異なるなど、記号や用語の使い方にこだわることの大切さを理解させたい。

#### 事例5 集合と命題

多くの example を用いて、用語の使い方の指導を徹底したい。2つの集合の関係についても論理と真偽との関係から考察させたい。いずれにしてもたくさんの例示が必要であり、簡単な例をたくさん取り上げたい。

#### 事例6 式の展開と因数分解

中学校では、因数分解による2次方程式の解法を学んでおり、導入段階での展開や因数分解の意味付けを工夫したい。

2次式は平面図形、3次式は立体図形で説明が出来ることなどを示したい。

#### イ 二次関数

<ねらい>

二次関数とそのグラフについて理解し、二次関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識するとともに、それらの事象の考察に活用できるようにする。

#### 事例7 関数の移動

対称移動、平行移動等グラフの移動の一般論をどこかの時点で取り上げたい。実際に点を取ってみると、一般論でできあがった式を比較するのも面白い。

#### 事例8 放物線の相似と2次関数の決定条件

相似であることにより、「頂点と他の一点」、「3点」で2次関数が決定されることを直感的に理解させたい。・・・グラフの描き方の説明にもなる。

#### 事例9 解の公式の証明

中学校で学んだこととなっているが証明が行われていたかは疑問。2次関数の基本となることなので、しっかり証明できるようにしたい。

#### 事例10 判別式の利用

方程式、不等式、2次関数を統一的に判別式で説明できるようにしたい。必要十分の教材としても意味をもつ。(一般的には転換法による証明を行うことが多い。)

#### 事例11 2次関数の頂点の座標

頂点の座標、解の公式、判別式との関係を総合的に考察させたい。

#### 事例12 関数の最大・最小

初学者は「何が最大なのか」を捉えていない場合が多い。デタラメなグラフを使うなどして、たくさんの例示により理解させたい。

### 事例 13 条件付最大最小

定義域、値域の意味を多くの例示により適切に理解させたい。パラメータを含む図形がどのように動くかについてもパソコンを使ってシュミレーションをしてみたい。

パラメータを含む意味は曲線群となっていることも直感的に理解させたい。

### 事例 14 様々な方程式の解法

未知数の決定では、様々に連立方程式を解くこととなる三元一次、二元二次等は始めて学習する生徒が多い。生徒の実態に応じた指導が必要である。

### 事例 15 様々な不等式の解法

不等式の符号 ( $< 0$ 、 $> 0$  など) は値域の符号であることを確実に定着させたい。3 次以上の不等式や分数不等式、絶対値の不等式等も生徒の実態に応じて適切に取り扱う必要がある。

### 事例 16 2 次方程式・不等式の解の存在、場合分け

2 次方程式の解の分離、絶対不等式、解がない不等式等の条件を調べる問題はグラフによる解法で指導することになるが、ディスカッションや作業学習等試行錯誤をさせた後、パターン化を行ってみると面白い。

### ウ 図形と計量

くねらい

三角比の意味やその基本的な性質について理解し、三角比を用いた計量の考えの有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする。

### 事例 17 三角比の数学史

指導書には、次のように書かれている。

BC150 ギリシャのヒパルコスが創始

AD150 プトレマイオスによる「正弦の表 (と同値な表)」や「加法定理」

AD500 余弦定理をインド人が記述

10C アラビア人が余弦、正接等その他の三角比を得る。

17C 三角関数として理解される

ニュートンにより一般角が正確に認知

オイラーが複素数変数による三角関数に拡張した。

日本では、1722年に建部賢弘が三角比の表の作り方を示している。

実用面から出発した三角比が現代数学の重要な役割を果たしていることを伝えたい。

### 事例 18 三角比の定義

一般的には、直角三角形ではない三角形を与え、辺や角、面積を求めることから出発したと考えるのが自然ではないか。4、5、6の三角形の角度を求めるなどはいかがが。・・・電卓の使用を認めてやってみよう。

三辺相等では三角比の必要性がないが、2辺1角、1辺2角相等の場合に他の辺を求めようとするすると三角比の必要性が理解できる。

### 事例 19 鈍角の三角比は鋭角の三角比の一般化

鋭角の場合の性質がすべて成り立つことを丁寧に説明したい。→出来れば単位円までいきたい。このため鋭角の三角比の性質はさらりし仕上げ、単位円での説明を丁寧にしたい。

### 事例 20 正弦定理、余弦定理

作図により、一意に図形が決まるかどうかを考えさせたい。また、三角形の合同条件にそって指導することに留意したい。

### 事例 20 面積と角の2等分線、辺の2等分線

興味深い問題が多く、図形と計量の振り返りや課題探求的な活動としてとりあげたい。

## 7 授業のねらいを達成するための工夫

数学教育の共通性とは端的に言えば、学習指導要領の趣旨を踏まえ、授業のねらいを達成することである。考えるところを記載する。

### (1) 導入について

- それぞれの数学が必然的に必要であるという視点からスタートしたい。教科書の記述や定義についても高校生から見たときに「何故必要なのか」という視点からスタートしたい。
- そのため数学史や応用面からのアプローチなど、緻密な工夫が必要である。
- 洗練された数学的な思考力を磨くためには、図形と論理が大きな課題となる。導入時には特に丁寧に指導していきたい。

### (2) 指導と評価の一体化について

- あらかじめの指導計画は必要である。どういう指導をしたかに対してどう評価するかということを常に意識しておきたい。
- ワークシートやプリント学習等、教科書以外の教材を作成する機会が多いと思うが、指導の流れ（評価の流れ）を意識した教材作成に心がけたい。また、教師が黒板に書いたものを時間を取って写させるパターンが多いが、プリントを工夫すれば時間短縮にもつながるし、多くの example を扱うことができる。
- 手軽にできる教具についても活用していきたい。
  - ・ 2次関数のグラフをTPシートに焼き付けたものを全員に持たせる。
  - ・ 輪ゴムを使って分点や軌跡などを考えさせる。
  - ・ 硬質発砲スチロールで立体図形を作る。
  - ・ 2次関数のグラフが動く道具を作る。等工夫出来そうなことがたくさんある・・・東急ハンズや100均を活用したい。
- 一つの問題でも味方を変えれば別な問題になる。発問を工夫したい。
- 数学の得意な生徒と不得意な生徒に対する発問を工夫する。全員が答えられる配慮を忘れずに。
- 4観点のどの部分を評価しようとしているか。  
いろいろなパターンがある。・・・4!通り
  - ・ 関心・意欲・態度 → 知識・理解 → 表現・処理 → 数学的な考え方
  - ・ 知識・理解 → 数学的な考え方 → 表現・処理 → 関心・意欲・態度  
等々
- 「知識・理解」からさらに高度な「表現・処理」へ
  - ・ ディスカッションや研究発表等・・・課題学習は今改定の目玉

## 8 終わりに

高校時代から数学を志し、数学科に入学。数学教員、教育行政、管理職・・・と教員としての生活も定年退職を迎えることとなった。

これまでを振り返り、「自分が本当にやりたかったことは何なのか」と改めて考えてみた。ひとつ言えることは、私が両親から学んだ「ものを創り出す楽しみ」を子どもに与えたいということではないかと思っている。

これからは、多くの子どもたちに「子ども本来が持っているみずみずしい創造力」を高めるために力を尽くしていきたい。